第 4 章　关　　系

关系是离散数学中刻画元素之间相互联系的一个重要的概念，在计算机科学与技术领域中有着广泛的应用，关系数据库模型就是以关系及其运算作为理论基础的.

在诸多的关系中，最基本的涉及两个事物之间的关系，即二元关系. 本章主要讨论二元关系，先给出二元关系的定义和特性，然后讨论关系的运算及关系的闭包运算，最后给出最重要的二元关系 —— 等价关系和偏序关系.

4.1　集合的笛卡儿积

4.1.1　有序对的概念

给定一个集合，其成员之间往往存在某种关系. 例如，某一家庭集合：{父，母，儿，媳，孙} 这种成员的关系可以有多种，夫妻、上下辈份等. 对于不同的两个集合，其成员之间也可能存在某种关系. 例如，这个家庭集合中的成员与另一个家庭集合中的某成员是兄弟关系，两家的儿媳妇为姊妹关系等.

总之，可以将事物之间的结构联系抽象概括为集合中元素之间的关系. 例如，$A = \{a,b,c,d\}$ 表示男教师，$B = \{x,y,z\}$ 表示女教师集合. 如果 A、B 的元素之间有夫妻关系，是 a 和 y，c 和 z，那么

(1) a 和 y 是成对出现，c 和 z 是成对出现.

(2) 根据谓词概念，这对元素具有一定顺序.

(3) 应该给出特定的表示方法表达这种关系.

定义 4.1-1　由两个元素，比如 x 和 y，按照一定顺序构成的序列称为**有序对**，也称**序偶**或二元组，记作 $\langle x,y\rangle$（也可记作 (x,y)），其中 x 是它的**第一元素**，y 是它的**第二元素**，且 x,y，可以相同.

例如，坐标系中点的坐标 $(3,4)$，$(-1,2)$ 就是有序对.

一般说来有序对具有以下特点：

(1) 当 $x \neq y$ 时，$\langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle$，即在一个有序对中，如果两个元素不相等，那么它们是不能交换次序的. 例如，$\langle 0,1\rangle$ 与 $\langle 1,0\rangle$ 代表不同的有序对.

(2) 两个有序对相等，即 $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle$ 的充分必要条件是 $x = u$ 且 $y = v$.

这些特点是集合 $\{x,y\}$ 所不具备的，例如，当 $x \neq y$ 时，有 $\{x,y\} = \{y,x\}$. 原因在于有序对 $\langle x,y\rangle$ 中强调了 x 与 y 的顺序性，而集合 $\{x,y\}$ 中的 x 和 y 是无序的. 例如，设有序对 $\langle x+y,3\rangle = \langle 3y-2,x+5\rangle$，那么根据有序对相等的充分必要条件有 $x+y = 3y-2$ 和 $3 = x+5$，因此得到 $x = -2$，$y = 0$.

在实际问题中有时会用到有序 3 元组，有序 4 元组 …… 有序 n 元组，可以用有序对来定义有序 n 元组.

定义 4.1-2 一个**有序 n 元组**($n \geqslant 3$)是一个有序对,其中第一个元素是一个有序 $n-1$ 元组.一个有序 n 元组记作 $\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$,即

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, \cdots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle.$$

有序 3 元组 $\langle x, y, z \rangle$ 可以表示为 $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$,同样具有特点 $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle = \langle \langle u, v \rangle, w \rangle$ 的充分必要条件是 $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle, z = w$,即 $x = u, y = v, z = w$.例如,空间直角坐标系中点的坐标 $\langle 1, -1, 3 \rangle$,$\langle 2, 4.5, 0 \rangle$ 等都是有序 3 元组.n 维空间中点的坐标或 n 维向量都是有序 n 元组.

形式上也可以把 $\langle x \rangle$ 看成有序 1 元组,只不过这里的顺序性没有什么实际意义.以后提到有序 n 元组,其中的 n 可以看成任何的正整数.

4.1.2 笛卡儿积

定义 4.1-3 设 A、B 为两个集合,称由 A 中元素为第一个元素,B 中元素为第二个元素的所有有序对组成的集合为 A 与 B 的**笛卡儿积**,记作 $A \times B$.符号化表示为

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

例 4.1 已知 $A = \{0, 1\}$,$B = \{a, b, c\}$,求 $A \times B$、$B \times A$、$A \times A$ 及 $B \times B$.

解 $A \times B = \{\langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 0, c \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 1, c \rangle\}$;

$B \times A = \{\langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$;

$A \times A = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$;

$B \times B = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$.

在例 4.1 中,集合 A 中有 2 个元素,集合 B 中有 3 个元素,则 $A \times B$、$B \times A$、$A \times A$ 及 $B \times B$ 分别有 6、6、4、9 个元素.即有如下结论:如果 A 中有 m 个元素,B 中有 n 个元素,则 $A \times B$ 中有 mn 个元素.

有穷集合的笛卡儿积运算满足下述性质:

(1) 若 A、B 中有一个是空集,则它们的笛卡儿积是空集,即

$$A \times B = A \times B = \varnothing.$$

(2) 当 $A \neq B$ 且 A、B 都不是空集时,有 $A \times B \neq B \times A$.

例 4.1 已经说明了这条性质,笛卡儿积运算不适合交换律.

(3) 当 A、B、C 都不是空集时,有

$$(A \times B) \times C = \{\langle \langle a, b \rangle, c \rangle \mid (\langle a, b \rangle \in A \times B) \wedge (c \in C)\},$$
$$A \times (B \times C) = \{\langle a, \langle b, c \rangle \rangle \mid (a \in A) \wedge (\langle b, c \rangle \in B \times C)\},$$

由于 $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle$ 不是有序 3 元组,$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

如果 A、B、C 中有一个是空集,那么上面式子的左右两边都是空集.这条性质说明笛卡儿积运算不适合结合律.

(4) 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律,即

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$
$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A),$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$$
$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A).$$

我们证明其中第一个等式,其余式子请读者自行证明.由于等式的两边都是集合,故仍然使用命题演算的方法来证明它们相等,只不过集合中的元素都用有序对来标记.

证明　对于任意的$\langle x,y\rangle$,有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle \in A\times(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } y\in(B\cup C)\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ 且}(y\in B \text{ 或 } y\in C)\\ &\Leftrightarrow(x\in A \text{ 且 } y\in B)\text{ 或}(x\in A \text{ 且 } y\in C)\\ &\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times B)\text{ 或}\langle x,y\rangle\in(A\times C)\\ &\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C),\end{aligned}$$

所以
$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

可以将两个集合的笛卡儿积推广成$n(n\geqslant 2)$个集合的笛卡儿积.

定义 4.1-4　设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个集合($n\geqslant 2$),称集合

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle \mid x_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

为 ***n* 阶笛卡儿积**. 当$A_1=A_2=\cdots=A_n=A$时,记A生成的n阶笛卡儿积为A^n.

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$均为有限集合,并设$|A_i|=n_i, i=1,2,\cdots,n$,则

$$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=n_1\times n_2\times\cdots\times n_n.$$

n维笛卡儿积的性质与二维笛卡儿积的性质类似,这里不再赘述.

例如,$A=\{a,b\}$,则

$A^3=\{\langle a,a,a\rangle,\langle a,a,b\rangle,\langle a,b,a\rangle,\langle a,b,b\rangle,\langle b,a,a\rangle,\langle b,a,b\rangle,\langle b,b,a\rangle,\langle b,b,b\rangle\}$.

在以后的各章中,如果不加特别的说明,所涉及的笛卡儿积都指2阶笛卡儿积.

4.2　二元关系的概念及其特性

4.2.1　二元关系的概念

客观事物之间的关系种类是相当繁多的,我们只能研究其抽象定义. 对于具体关系只是抽象定义下的一个指派,显然这种指派仅是笛卡儿积的一个子集.

定义 4.2-1　若集合R中的全体元素均为有序的$n(n\geqslant 2)$元组,则称R为 ***n* 元关系**,特别地,当$n=2$时,称R为**二元关系**,简称为关系.

对于二元关系R,若$\langle x,y\rangle\in R$,则记为xRy,若$\langle x,y\rangle\notin R$,则记为$x \not R y$. 规定空集$\varnothing$为$n$元空关系,当然也是二元空关系,简称空关系.

例如,$R_1=\{\langle a,b,c,d\rangle,\langle 1,2,3,4\rangle,\langle$数学,语文,物理,化学$\rangle\}$为四元关系;

$R_2=\{\langle 1,2,3\rangle,\langle\alpha,\beta,\delta\rangle,\langle$爸爸,妈妈,儿子$\rangle\}$为三元关系;

$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,\langle$爸爸,妈妈$\rangle\}$和$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle\theta,\varphi\rangle,\langle a,b\rangle\}$均为二元关系;

$A_1=\{\langle 1,2,3\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,a,1\}$是集合,而不是任何关系.

定义 4.2-2　设A、B为两个集合,$A\times B$得任何子集R均称为**从*A*到*B*的二元关系**,特别地,称$A\times A$得子集R为***A*上的二元关系**.

设$A=\{a_1,a_2\}$,$B=\{b\}$,$A\times B$得子集$\varnothing$,$\{\langle a_1,b\rangle\}$,$\{\langle a_2,b\rangle\}$,$\{\langle a_1,b\rangle,\langle a_2,b\rangle\}$,为$A$到$B$的全部二元关系. $\varnothing$,$\{\langle b,a_1\rangle\}$,$\{\langle b,a_2\rangle\}$,$\{\langle b,a_1\rangle,\langle b,a_2\rangle\}$为$B$到$A$的全部二元关系. 而$B$上的二元关系有两个:$\varnothing$,$\{b,b\}$,$A$上的二元关系共有16个二元关系,这里不一一列举.

一般说来,若$|A|=m$,$|B|=n$,A到B共有2^{mn}个二元关系,A上共有2^{m^2}个二元关系. 设A为任意集合,除了$\varnothing$为A上的特别的关系,即**空关系**外,还可以定义如下的特殊关系.

定义 4.2-3 对任何集合 A,称 $E_A = \{\langle x,y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$ 为 A 上的**全域关系**. 称 $I_A = \{\langle x,x\rangle \mid x \in A\}$ 为 A 上的**恒等关系**.

若 A 是实数集或其子集,还可以定义下面的各种关系:

称 $D_A = \{\langle x,y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \mid y\}$ 为 A 上的**整除关系**,其中 $x \mid y$ 为 x 整除 y.

称 $L_A = \{\langle x,y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \leqslant y\}$ 为 A 上的**小于等于关系**.

例如,若 $A = \{1,2,3\}$,则

$E_A = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$;

$I_A = \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$;

$D_A = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$;

$L_A = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

例 4.2 设 $A = \{1,2,\cdots,10\}$,$R = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A, x+2y \leqslant 8\}$,列出 R 中的所有元素.

解 $R = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,$
$\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 6,1\rangle\}$.

如果称横纵坐标均为整数的点为整点,那么 R 中的全体有序对恰好构成了平面直角坐标系坐标轴的正方向和直线 $x+2y=8$ 所围成的区域(包括直线,但不包含坐标轴)内的所有整点.

4.2.2 关系的表示法

前面给出的关系都是用集合表达式来定义的. 对于有穷集合 A 上的关系 R,还可以用关系矩阵和关系图来给出. 下面给出关系矩阵和关系图的一般定义.

定义 4.2-4 设 $A = \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$R$ 是 A 上的关系,令

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & 若\ x_i R x_j \\ 0, & 若\ x_i \not R x_j \end{cases}, \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

则

$$(r_{ij}) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

是 R 的**关系矩阵**. 并记作 M_R.

定义 4.2-5 设 $A = \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$R \subseteq A \times A$ 是 A 上的关系,以 A 的元素为结点,若 $\langle x_i,x_j\rangle \in R$,则从结点 x_i 向 x_j 引一条有向边,这样得到的有向图称为 R 的**关系图** G_R.

例如,设 $A = \{1,2,3,4\}$,则 $R = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ 是 A 上的关系. R 的关系矩阵和关系图表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

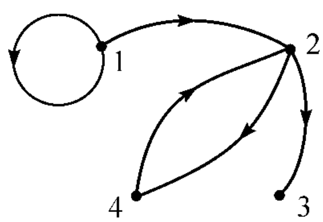


图 4-1

在图 4-1 中,图的顶点集是$\{1,2,3,4\}$,由$\langle 1,1\rangle$,$\langle 1,2\rangle$,图 4-1 $\in$ **R** 可知,在图中有一条

从 1 到 1 的边(过 1 的环),还有一条从 1 到 2 的边. 类似地可以作出对应于其余三个有序对的边.

4.2.3　关系的性质

本小节涉及的主要内容是某个集合 A 上的关系的性质,有必要说明,本节内讨论的是非空集合上的二元关系的性质.

定义 4.2-6　设 R 是集合 A 上的二元关系,如果对于每一个 $x \in A$ 均有 xRx,则称**二元关系 R 是自反的**. 即

$$R \text{ 在 } A \text{ 上是自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x,x \rangle \in R).$$

例 4.3　设 $A = \{1,2,3\}$,$R_1 = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,判断 R 是否是自反关系.

解　显然,对 x 可以取值为 1,2,3,无论 x 取 1、取 2 或取 3 均有 $\langle x,x\rangle \in R_1$,所以 R_1 是自反关系.

注意,若 $R_2 = \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$ 就不是自反关系,因为 $\forall x \in A$,当 x 取 3 时,$\langle x,x\rangle \notin R_2$,不满足定义条件.

定义 4.2-7　设 R 是集合 A 上的二元关系,如果对于每一个 $x \in A$,均有 $\langle x,x\rangle \notin R$,则称**二元关系 R 是反自反的**. 即

$$R \text{ 在 } A \text{ 上是反自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x,x \rangle \notin R).$$

例如,$A = \{1,2,3\}$,$R = \{\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$,显然 x 可以取 1,2,3,$\langle x,x\rangle \notin R$,按定义,$R$ 是反自反的.

实际中,数的大于关系、父子关系等都是反自反的. 另外,从定义可知,一个关系不可能既是自反的又是反自反的.

定义 4.2-8　设 R 是定义在集合 A 上的一个二元关系,如果对于每一个 $x,y \in A$,每当 xRy,则有 yRx,则称二元关系 R 为 A 上的**对称关系**. 即

$$R \text{ 在 } A \text{ 上对称} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx).$$

例 4.4　设 $A = \{2,3,5,7\}$,$R = \left\{\langle x,y\rangle \,\middle|\, \dfrac{x-y}{2} \text{ 是整数}\right\}$,判断 R 是否是自反关系和对称关系.

解　显然,对任意的 $x \in A$,$\dfrac{x-x}{2} = 0$ 是整数,所以 $\langle x,x\rangle \in R$,即 R 是自反的. 对任意的 $x,y \in A$,如果 $\dfrac{x-y}{2}$ 是整数,则 $\dfrac{y-x}{2}$ 也必是整数,所以 R 是对称的.

由此可见,有些集合上的关系可以既是自反的,又是对称的.

定义 4.2-9　设 R 是定义在集合 A 上的一个二元关系,如果对于每一个 $x,y \in A$,每当 xRy 且 yRx,则必有 $x = y$,称 R 为 A 上的**反对称关系**. 即

$$R \text{ 在 } A \text{ 上是反对称} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$$

在实数集中,“$\leqslant$”是反对称的,“$\subseteq$”也是反对称的. 换句话说,若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$,则必有 $x = y$;若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则必有 $A = B$.

注意,(1) 存在某种关系,既是对称的,又是反对称的.

例如,$A = \{1,2,3\}$,$R_1 = \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,$R_2 = \{\langle 1,1\rangle\}$. 其中,$R_1$ 是自反的、对称的、反对称的;R_2 既是对称的,又是反对称的.

(2) 存在某种关系,既不是对称的,又不是反对称的.

例如,$A=\{a,b,c\}$,$R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$. R 不是对称的,因为有 aRb,但无 bRa. R 又不是反对称的,因为有 aRc 且 cRa,但 $a\neq c$. 按反对称的逻辑推理,aRc,cRa,条件均为 T,但是 $a\neq c$,结论为 F,所以推理不为真,不是反对称的.

(3) 由上述可知,对称与反对称不是互逆关系.

定义 4.2-10 设 R 是定义在集合 A 上的二元关系:如果对于任意 $x,y,z\in A$. 每当 xRy 且 yRz 时,就有 xRz,则称 R 是 A 上的**传递关系**. 即

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$$

关于定义中的条件理解,要特别注意每当有 xRy,yRz 时,就有 xRz. 换句话说,若没有 xRy,yRz,就不必去考虑 xRz. 若存在一个 xRy,yRz,而没有 xRz 就不是传递的.

例如,给定集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 上的二元关系

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\},$$

讨论 R 的性质. 这里先给出 R 的关系矩阵及关系图,如图 4-2 所示.

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

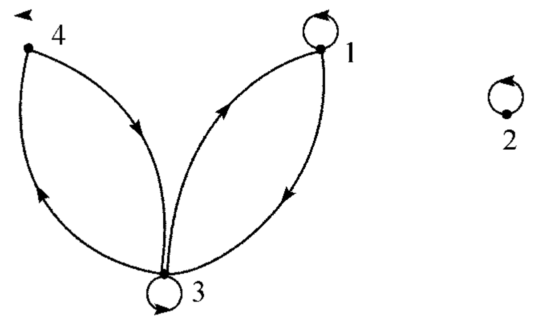


图 4-2

很容易得出 R 是自反的、对称的.

可以根据关系矩阵和关系图判断关系的性质. 一般而言:

(1) 若关系 R 是自反的,当且仅当关系矩阵的对角线上所有元素都是 1,关系图的每个顶点都有自回路.

(2) 若关系 R 是反自反的,当且仅当关系矩阵对角线上的元素皆为零;关系图的每个顶点都没有自回路.

(3) 若关系 R 是对称的,当且仅当关系矩阵是对称的;关系图中任意两个顶点间若有定向弧线,必是成对地出现.

(4) 若关系 R 是反对称的,当且仅当关系矩阵中以主对角线为对称的元素不能同时为 1,即若 $r_{ij}=1$,则 $r_{ji}=0$,若 $r_{ij}=0$,则 $r_{ji}=1$,i、$j=1,2,3,\cdots,n$(n 为顶点个数). 在关系图上,两个不同顶点间的定向弧线不能成对地出现.

(5) 传递关系的特征比较复杂,不易从关系矩阵和关系图中直接判断. 有如下结论:关系矩阵表示在 M_R^2 中 1 所在的位置,在 M_R 中相应位置也为 1;关系图中,如果结点 x_i 到 x_j 之间有边,x_j 到 x_k 之间有边,则 x_i 到 x_k 之间也有边.

4.3　二元关系的运算

二元关系作为集合,可以进行并、交、相对补、对称差等运算.除此之外,还可以定义其他一些常用的关系运算.

4.3.1　定义域与值域

定义 4.3-1　设 R 为二元关系,R 的定义域、值域和域分别记作 $\mathrm{dom}R$,$\mathrm{ran}R$,$\mathrm{fld}R$,其中

$$\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in R)\},$$
$$\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists x(\langle x,y\rangle \in R)\},$$
$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R.$$

由定义不难看出,**定义域** $\mathrm{dom}R$ 是 R 中所有有序对的第一元素构成的集合,**值域** $\mathrm{ran}R$ 是 R 中所有有序对的第二元素构成的集合,**域** $\mathrm{fld}R$ 是 R 中有序对涉及的全体元素的集合.

例如,设 $R = \{\langle a,\{b\}\rangle,\langle c,d\rangle,\langle\{a\},\{d\}\rangle,\langle d,\{d\}\rangle\}$,则

$$\mathrm{dom}R = \{a,c,\{a\},d\},$$
$$\mathrm{ran}R = \{\{b\},d,\{d\}\},$$
$$\mathrm{fld}R = \{a,c,\{a\},d,\{b\},\{d\}\}.$$

例 4.5　下列关系都是整数集 $\mathbf{Z}$ 上的关系,分别求出它们的定义域和值域.

(1)$R_1 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge x^2 + y^2 = 1\}$;

(2)$R_2 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge y = 2x\}$.

解　(1)$R_1 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge x^2 + y^2 = 1\} = \{\langle 0,1\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle -1,0\rangle\}$,

$$\mathrm{dom}R_1 = \mathrm{ran}R_1 = \{0,1,-1\};$$

(2)$R_2 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge y = 2x\}$,

$$\mathrm{dom}R_2 = \mathbf{Z},$$
$$\mathrm{ran}R_2 = \{2z \mid z \in \mathbf{Z}\},\text{即偶数集}.$$

对于从 A 到 B 的某些关系 R,有时使用图解的方法(不是 R 的关系图)来表示是很方便的.首先用两个封闭的曲线表示 R 的定义域和值域.如果 $\langle x,y\rangle \in R$,则从 x 到 y 画一个箭头.图 4-3 给出了例 4.5 中关系 R_1 和 R_2 的图示.

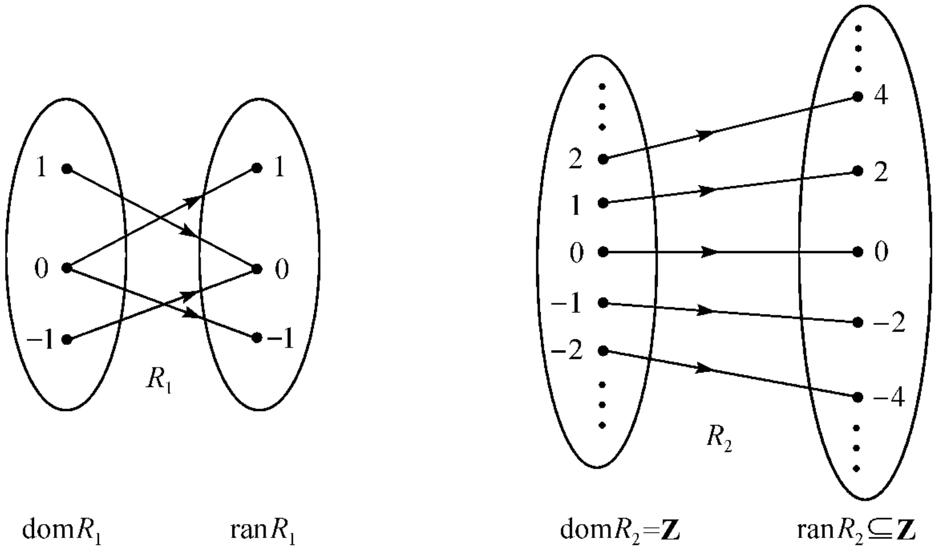


图 4-3

4.3.2 关系的基本运算

定义 4.3-2 设 R 为二元关系，R 的**逆**记作 R^{-1}，其中

$$R^{-1}=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R\}.$$

不难看出，R^{-1} 就是把 R 的每个有序对的两个元素交换以后得到的关系. 如果 R 是整数集 $\mathbf{Z}$ 上的小于关系，那么 R^{-1} 就是 $\mathbf{Z}$ 上的大于关系. 类似地，整除关系的逆就是倍数关系.

例 4.6 $A=\{2,3,6\}$，L_A 为 A 上小于等于关系，D_A 为 A 上整除关系，分别求出 L_A^{-1}，D_A^{-1}.

解

$$\begin{aligned}L_A^{-1}&=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}\\&=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\geqslant y\},\end{aligned}$$

即 L_A^{-1} 为 A 上的大于等于关系.

$$\begin{aligned}D_A^{-1}&=\{\langle 2,2\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}\\&=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\ 是\ y\ 的倍数\},\end{aligned}$$

即 D_A^{-1} 为 A 上的倍数关系.

下面定义两个关系的合成运算.

定义 4.3-3 设 R，S 为二元关系，R 与 S 的**合成**记作 $R\circ S$，

$$R\circ S=\{\langle x,z\rangle \mid \exists y(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\}.$$

例如，设 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，那么有

$$R\circ S=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\},$$

$$S\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}.$$

可以把关系看做是一种作用，如果 $\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in S$，那么 x 通过 R 的作用变到 y，y 接着通过 S 的作用又变到 z. 这就是说，在 R 和 S 的合成作用下将 x 变到了 z，因此 $\langle x,z\rangle\in R\circ S$. 这里的 y 起着中介的作用，如果对于给定的关系 R 和 S，不存在满足这种条件的中介，那么 $R\circ S=\varnothing$.

从上例可以看出，合成运算不满足交换律.

关系的运算具有下述性质.

定理 4.3-1 设 F 是任意的关系，则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$；

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$，$\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

定理 4.3-1 说明关系的逆是相互的，求逆运算以后定义域与值域互换.

下面的两个定理都与合成运算的性质相关.

定理 4.3-2 设 F，G，H 是任意的关系，则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$；

(2) $(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$.

定理 4.3-3 设 R 为 A 上的关系，则

$$R\circ I_A=I_A\circ R=R.$$

定理 4.3-2 说明合成运算满足结合律，对于多个关系的合成，只要不交换它们的次序，不管谁先参与合成，最后的结果都是一样的.

定理4.3-3说明，对于任何A上的关系R，恒等关系对于合成运算是没有贡献的. 这里的恒等关系所起的作用，就像普通乘法中的整数1一样，不管什么实数x，x与1相乘总是等于x. 具有这种性质的元素称为运算的单位元. 1是普通乘法的单位元，恒等关系I_A是A上关系合成运算的单位元.

这里我们只证明定理4.3-1，对其他定理，同学们如果感兴趣可以自己证明.

证明 （1）任取$\langle x,y\rangle$，由逆的定义有

$$\langle x,y\rangle \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in F^{-1} \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F,$$

所以有$(F^{-1})^{-1} = F$.

（2）任取x，有

$$x \in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle \in F^{-1}) \Leftrightarrow \exists y(\langle y,x\rangle \in F) \Leftrightarrow x \in \mathrm{ran}F,$$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$.

同理可证$\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$.

4.3.3 关系的幂运算

由于关系合成满足结合律，因此可以定义关系的幂运算. 这里的关系指的是集合A上的关系.

定义4.3-4 设R为A上的关系，n为自然数，则R的***n*** **次幂**定义为

(1)$R^0 = \{\langle x,x\rangle \mid x \in A\} = I_A$;

(2)$R^{n+1} = R^n \circ R$.

这个定义是递归的定义. 对于A上的任何关系R，R的最低次幂是0次幂，等于A上的恒等关系I_A，由0次幂开始，反复使用第(2)条规则，就可以得到R的任何正整数次幂. 例如，

$$R^1 = R^0 \circ R = R;$$
$$R^2 = R^1 \circ R = R \circ R;$$
$$R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R = R \circ R \circ R;$$
$$\cdots$$

由定义4.3-4可以知道，对于A上的任何关系R_1和R_2，它们的0次幂都是相等的，即$R_1^0 = R_2^0 = I_A$. R的n次幂就是n个R的合成.

怎样求出关系R的n次幂?这与关系R的表示法有关，不同的表示，求法也不同. 如果关系是用集合表达式给出的，那么可以采用关系图的方法. 为求R的n次幂，将R的图复制n次，第i个图示是从第i层的A中的结点到达第$i+1$层的A中的结点. 如果从第一层A点中的结点x，经过n步长的有向路径，可以到达最后一层($n+1$层)A中的结点y，那么$\langle x,y\rangle \in R^n$. 如果$R$是用矩阵$M_R$表示的，那么只需计算$M_R$的$n$次方，这就是$R^n$的关系矩阵. 利用关系图求关系幂的方法可能是最方便的，下面给出具体的做法.

设R的关系图是G_R，先在R^n的关系图中画出与R相同的n个顶点，然后顺序考察原来关系图G_R的每个结点x. 如果结点x到y有一条长为n的有向通路，那么就在R^n的关系图中加上一条从x到y的边. 注意，当$x=y$时，得到的是一个过x的环. 当所有的结点都检查完成，就得到R^n的关系图.

例4.7 设$A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求$R$的各次幂，分别用矩阵和关系图表示.

解 R的关系矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

则 R^2 的关系矩阵为

$$M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

同理，R^3 和 R^4 的矩阵为

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因此 $M^4=M^2$，即 $R^4=R^2$，于是可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\cdots,\quad R^3=R^5=R^7=\cdots.$$

而 $R^0=I_A$，即 R^0 的关系矩阵为

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

用关系图的方法得到 $R^0,R^1,R^2,R^3,\cdots$ 的关系图如图 4-4 所示.

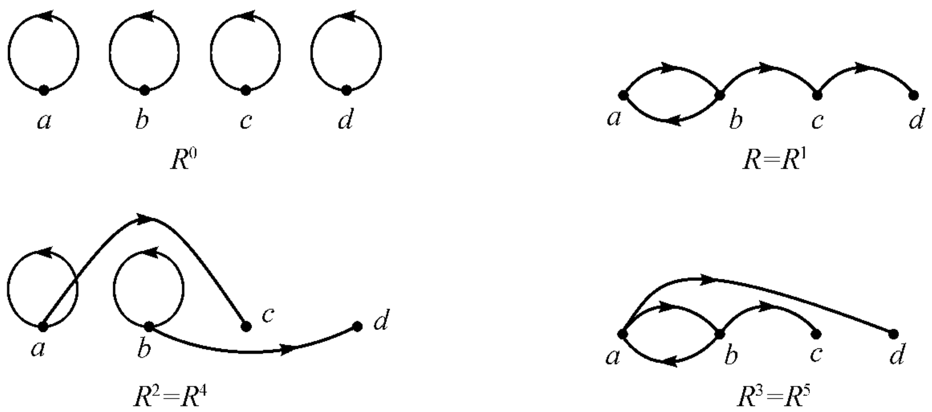


图 4-4

定理 4.3-4 设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t，使得 $R^s=R^t$.

证明 R 为 A 上的关系，由于 $|A|=n$，A 上的不同关系只有 2^{n^2} 个. 列出 R 的各次幂

$$R^0,R^1,R^2,\cdots,R^{2^{n^2}},\cdots.$$

当所列出的幂的个数超过 A 上关系的总数 2^{n^2} 时，这些幂中必有两个幂相等，即存在自然数 s 和 t，使得 $R^s=R^t$.

定理 4.3-4 说明有穷集合上的关系 R 只有有限多个不同的幂.

定理 4.3-5 设 R 是 A 上的关系，$m,n\in\mathbf{N}$，则

(1)$R^m \circ R^n = R^{m+n}$;

(2)$(R^m)^n = R^{mn}$.

证明　用归纳法.

(1) 对于任意给定的 $m \in \mathbf{N}$,施归纳于 n.

若 $n = 0$,则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}.$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$,则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1}.$$

所以,对一切 $m,n \in \mathbf{N}$,有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

(2) 对于任意给定的 $m \in \mathbf{N}$,施归纳于 n.

若 $n = 0$,则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}.$$

假设$(R^m)^n = R^{mn}$,则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = R^{mn} \circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}.$$

所以,对一切 $m,n \in \mathbf{N}$,有$(R^m)^n = R^{mn}$.

定理 4.3-6　设 R 是 A 上的关系,若存在自然数 s、$t(s < t)$,使得 $R^s = R^t$,则

(1) 对任意 $k \in \mathbf{N}$,有 $R^{s+k} = R^{t+k}$;

(2) 对任意 $k,i \in \mathbf{N}$,有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$,其中 $p = t - s$;

(3) 令 $S = \{R^0, R^1, \cdots, R^{t-1}\}$,则对于任意的 $q \in \mathbf{N}$,有 $R^q \in S$.

证明　(1)$R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$.

(2) 对 k 归纳. 若 $k = 0$,则有

$$R^{s+0p+i} = R^{s+i}.$$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$,其中 $p = t - s$,则

$$\begin{aligned} R^{s+(k+1)p+i} &= R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i} \circ R^p = R^{s+i} \circ R^p \\ &= R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}. \end{aligned}$$

由归纳法,命题得证.

(3) 任取 $q \in \mathbf{N}$,若 $q < t$,显然有 $R^q \in S$. 若 $q \geqslant t$,则存在自然数 k 和 i,使得 $q = s + kp + i$,其中 $0 \leqslant i \leqslant p - 1$. 于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}.$$

而

$$s + i \leqslant s + p - 1 = s + t - s - 1 = t - 1.$$

这就证明了 $R^q \in S$.

定理 4.3-6 给出了 R 的不同幂的个数的一个上界. 就是说,如果 $R^s = R^t$,那么 R 的不同的幂至多有 t 个. 如果 s 和 t 是使得 $R^s = R^t$ 成立的最小的自然数,那么 R 恰好有 t 个不同的幂. 这里的 $t - s$ 可以看做是一个幂变化的周期. 利用幂的周期性,在某些情况下可以将 R 的比较高的幂化简成比较低的幂. 回顾例 4.7,由于 $R^2 = R^4$,因此 R 的不同的幂至多是 4 个,即 R^0, R^1, R^2, R^3. 利用这个性质,有 $R^{100} = R^2$.

4.4　关系的闭包运算

设 R 是集合 A 上的关系,如果 R 不具有某些性质,比如说对称性,那么可以通过在 R 中

加入最少数量的有序对来扩充 R,使得扩充后的 R' 具有对称性.这种经过扩充的 R' 称为 R 的对称闭包.类似地也可以构造 R 的自反和传递闭包.

关系的闭包运算是关系上的一元运算,是包含该关系且具有某种性质的最小关系.

定义 4.4-1 设 R 是 A 上的二元关系,如果有另一个关系 R',满足:

(1)R' 是自反的(对称的、可传递的);

(2)$R \subseteq R'$;

(3) 对于任何自反的(对称的、可传递的) 关系 R'',都有 $R' \subseteq R''$,

则称关系 R' 为 R 的**自反(对称,传递) 闭包**.R 的自反、对称和传递闭包分别记为 $r(R)$、$s(R)$ 和 $t(R)$.

定理 4.4-1 设 R 为非空集合 A 上的关系,则

(1)R 是自反的,当且仅当 $r(R) = R$;

(2)R 是对称的,当且仅当 $s(R) = R$;

(3)R 是传递的,当且仅当 $t(R) = R$.

证明 (1) 如果 R 是自反的,因为 $R \supseteq R$,且任何包含 R 的自反关系 R',有 $R' \supseteq R$,故 R 就满足自反闭包的定义,即

$$r(R) = R.$$

反之,如果 $r(R) = R$,根据定义 4.4-1, 必是自反的.

(2) 和(3) 的证明完全类似.

构造 R 的自反(对称、传递)闭包的方法就是给 R 补充必要的有序对,使它具有所希望的特性.下面我们用例子来说明如何实现.

例 4.8 设集合 $A = \{a, b, c\}$,$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$ 是定义在 A 上的二元关系,求 $r(R)$,$s(R)$,$t(R)$,画出 R,$r(R)$,$s(R)$,$t(R)$ 的关系图,并写出相应的关系矩阵.

解 (1)$r(R) = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$;

(2)$s(R) = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$;

(3)$t(R) = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$.

关系图如图 4-5 所示.

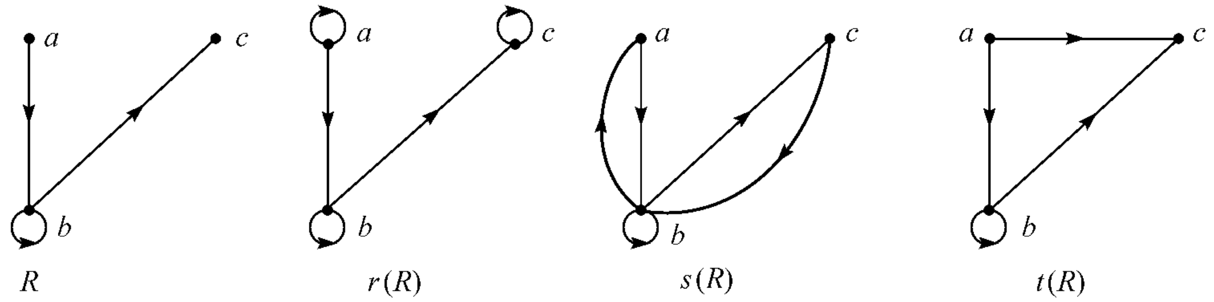


图 4-5

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{r(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{s(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由上述例子可总结出利用关系图和关系矩阵求 R 的自反(对称、传递) 闭包的方法:

(1) 求一个关系的自反闭包,即将关系图中的所有无环的结点加上环;关系矩阵中对角

线上的值 r_{ii} 全变为"1".

(2) 求一个关系的对称闭包,则在关系图中,任何一对结点之间若仅存在一条边,则加一条方向相反的边;关系矩阵中则为:若有 $r_{ij}=1(i\neq j)$,则令 $r_{ji}=1$(若 $r_{ji}\neq 1$),即 $M_{S(R)}=M_R\vee M_R{}^{-1}$.

(3) 求一个关系的传递闭包,则在关系图中,对任意结点 a、b、c,若 a 到 b 有一条边,同时 b 到 c 也有一条边,则从 a 到 c 必增加一条边(当 a 到 c 无边时);在关系矩阵中,若 $r_{ij}=1$, $r_{jk}=1$,则令 $r_{ik}=1$ (若 $r_{ik}\neq 1$).

下面以定理来体现以上的想法.

定理 4.4-2　设 R 为非空集合 A 上的关系,则

(1)$r(R)=R\cup I_A$;

(2)$s(R)=R\cup R^{-1}$;

(3)$t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i=R^1\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$.

证明　(1) 令 $R'=R\cup I_A$,对任意 $x\in A$,(I_A是恒等关系,即$\langle x,x\rangle\in R$),因为有 $\langle x,x\rangle\in I_A$,故$\langle x,x\rangle\in R'$,于是 R' 在 A 上是自反的.

又 $R\subseteq R\cup I_A$,即 $R\subseteq R'$.若有自反关系 R'',且 $R''\supseteq R$,显然有 $R''\supseteq I_A$,于是

$$R''\supseteq I_A\cup R=R',$$

故 $r(R)=R\cup I_A$.

(2) 令 $R'=R\cup R^{-1}$,因为 $R\subseteq R\cup R^{-1}$,即 $R\subseteq R'$.设$\langle x,y\rangle\in R'$ 则$\langle x,y\rangle\in R$ 或$\langle x,y\rangle\in R^{-1}$,即$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$ 或$\langle y,x\rangle\in R$,故$\langle y,x\rangle\in R\cup R^{-1}$.所以 R' 是对称的.

设 R'' 是对称的,且 $R''\supseteq R$,对任意的$\langle x,y\rangle\in R'$,则$\langle x,y\rangle\in R$,或$\langle x,y\rangle\in R^{-1}$.当$\langle x,y\rangle\in R$ 时,$\langle x,y\rangle\in R''$.当$\langle x,y\rangle\in R^{-1}$ 时,$\langle y,x\rangle\in R$,即$\langle y,x\rangle\in R''$.因 R'' 对称,所以$\langle x,y\rangle\in R''$.因此 $R'\subseteq R''$.故 $s(R)=R\cup R^{-1}$.

(3) 设 $R_1=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i$,

① 显然 $R\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i=R_1$,即 R_1 是 R 的扩充.

② 对任意 $a,b,c\in A$,若$\langle a,b\rangle\in R_1$,$\langle b,c\rangle\in R_1$,则由 $R_1=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i$,必存在 R^j,R^k($1\leqslant j$, $k<\infty$),使得$\langle a,b\rangle\in R^j$,$\langle b,c\rangle\in R^k$,即$\langle a,c\rangle\in R^{j+k}$($1\leqslant j+k<\infty$),因 $R^{j+k}\subseteq R_1$,所以$\langle a,c\rangle\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i=R_1$,即 R_1 是传递的.

③ 设 R_2 是 R 的任何一个传递的扩充关系,则有 $R\subseteq R_2\subseteq A\times A$,且 R_2 是传递的.

对任意$\langle a,b\rangle\in R_1$,存在 R^j($1\leqslant j<\infty$),使得$\langle a,b\rangle\in R^j$,所以存在 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_{j-1}\in A$,使得

$$\langle a,c_1\rangle\in R,\langle c_1,c_2\rangle\in R,\langle c_2,c_3\rangle\in R,\cdots,\langle c_{j-1},b\rangle\in R.$$

因 $R\subseteq R_2$,所以

$$\langle a,c_1\rangle\in R_2,\langle c_1,c_2\rangle\in R_2,\langle c_2,c_3\rangle\in R_2,\cdots,\langle c_{j-1},b\rangle\in R_2.$$

由于 R_2 是传递的,有

$$\langle a,c_2\rangle\in R_2,\langle c_2,c_3\rangle\in R_2,\langle c_3,c_4\rangle\in R_2,\cdots,\langle c_{j-1},b\rangle\in R_2,$$

一直下去,最终有 $\langle a,b\rangle\in R_2$.所以,$R_1\subseteq R_2$.

由 ①、②、③ 知 R_1 是 R 的传递闭包,即 $t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i$.

推论 若 $R \subseteq A \times A$，$|A| = n$，则 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

证明 当 $|A| = n$ 时，显然有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$. 所以，$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

例 4.9 设 $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是 4 个程序，R，S 是定义在 P 上的调用关系：

$$R = \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\},$$

$$S = \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_2, P_1\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\},$$

求 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$，$r(S)$，$s(S)$，$t(S)$.

解

$$\begin{aligned} r(R) = R \cup I_A &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\} \\ &\quad \cup \{\langle P_1, P_1\rangle, \langle P_2, P_2\rangle, \langle P_3, P_3\rangle, \langle P_4, P_4\rangle\} \\ &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_1, P_1\rangle, \langle P_2, P_2\rangle, \langle P_3, P_3\rangle, \\ &\quad \langle P_4, P_4\rangle\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(R) = R \cup R^{-1} &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\} \cup \{\langle P_2, P_1\rangle, \\ &\quad \langle P_3, P_1\rangle, \langle P_4, P_2\rangle, \langle P_4, P_3\rangle\} \\ &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_2, P_1\rangle, \langle P_3, P_1\rangle, \langle P_4, P_2\rangle, \langle P_4, P_3\rangle\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\} \\ &\quad \cup \{\langle P_1, P_4\rangle\} \cup F \cup F \\ &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_1, P_4\rangle\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(S) = S \cup I_A &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_2, P_1\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\} \\ &\quad \cup \{\langle P_1, P_1\rangle, \langle P_2, P_2\rangle, \langle P_3, P_3\rangle, \langle P_4, P_4\rangle\} \\ &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_2, P_1\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_1, P_1\rangle, \langle P_2, P_2\rangle, \langle P_3, P_3\rangle, \langle P_4, P_4\rangle\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(S) = S \cup S^{-1} &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_2, P_1\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\} \\ &\quad \cup \{\langle P_2, P_1\rangle, \langle P_1, P_2\rangle, \langle P_3, P_2\rangle, \langle P_4, P_3\rangle\} \\ &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_2, P_1\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_3, P_2\rangle, \langle P_4, P_3\rangle\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(S) &= S \cup S^2 \cup S^3 \cup S^4 \\ &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_2, P_1\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\} \\ &\quad \cup \{\langle P_1, P_1\rangle, \langle P_2, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle\} \\ &\quad \cup \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_2, P_1\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_1, P_4\rangle\} \\ &\quad \cup \{\langle P_1, P_1\rangle, \langle P_2, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle\} \\ &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_2, P_1\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_1, P_1\rangle, \langle P_2, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \\ &\quad \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_1, P_4\rangle\}. \end{aligned}$$

下面给出有关关系闭包的各种性质，有兴趣的读者自己证明.

定理 4.4-3 设 R_1，R_2 是集合 A 上的关系，且 $R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$；

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$；

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

定理 4.4-4 设 R_1，R_2 是集合 A 上的关系，则

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$；

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$；

(3) $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.

定理 4.4-5 设 R 是集合 A 上的关系，则

(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$，$t(R)$ 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$，$t(R)$ 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的.

在此基础上，我们还可定义求两次闭包.

定义 4.4-2　(1) 集合 A 上的关系的**自反对称闭包**定义为 $rs(R)=r(s(R))$；

(2) 集合 A 上的关系的**自反传递闭包**定义为 $rt(R)=r(t(R))$；

(3) 集合 A 上的关系的**对称传递闭包**定义为 $st(R)=s(t(R))$.

同上，还可定义 $sr(R)$，$tr(R)$，$ts(R)$，….

定理 4.4-6　设 R 是集合 A 上的关系，则

(1) $rs(R)=sr(R)$；

(2) $rt(R)=tr(R)$；

(3) $st(R)\subseteq ts(R)$.

上述(3) 只能保证是单方面的包含关系，而无法证明其相等，请看下面的例子.

例 4.10　设 $A=\{1,2\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle\}$，则

$$st(R)=s(t(R))=s(\{\langle 1,2\rangle\})=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\},$$

$$ts(R)=t(s(R))=t(\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\})=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\},$$

即 $st(R)\subset ts(R)$.

4.5　等价关系与集合的划分

前面讨论了关系的性质及运算，若一个关系满足不同的性质，则构成不同类型特征的关系空间. 事实上，五种关系性质(自反、反自反、对称、反对称、传递) 的组合状态是较多的，我们只研究其中几种具有特别重要的二元关系.

4.5.1　等价关系

定义 4.5-1　设 R 为非空集合 A 上的关系，若 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的**等价关系**，简称等价关系. 对任何 $x,y\in A$，如果 $<x,y>\in R$ (R 为等价关系)，则记作 $x\sim y$.

例 4.11　设 A 为某班学生的集合，讨论下列关系中，哪些是等价关系.

(1) $R_1=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x$ 与 y 同年生$\}$；

(2) $R_2=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x$ 与 y 同姓$\}$；

(3) $R_3=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x$ 的年龄不比 y 小$\}$；

(4) $R_4=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x$ 与 y 选修同门课程$\}$；

(5) $R_5=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x$ 的体重比 y 重$\}$.

解　易证 R_1、R_2 都具有自反、对称和传递性，因而都是等价关系，R_3 无对称性，R_4 无传递性，R_5 既无自反性又无对称性，因而他们都不是等价关系.

定义 4.5-2　设 R 是非空集合 A 上的等价关系，$\forall x\in A$，令 $[x]_R=\{y\mid y\in A\land xRy\}$，则称 $[x]_R$ 为 ***x* 的关于 *R* 的等价类**，简称为 ***x* 的等价类**，在不引起混乱时，可将 $[x]_R$ 简记为 $[x]$.

例 4.12　设 $A=\{1,2,3,4,5,8\}$，求 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\land x\equiv y(\bmod 3)\}$ 的等价类.

解

$$[1]=[4]=\{1,4\},$$
$$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\},$$
$$[3]=\{3\}.$$

定理 4.5-1 设R是非空集合A上的等价关系，对于任意的$x,y\in A$，下面的结论成立：

(1)$[x]_R\neq\varnothing$ 且$[x]_R\subseteq A$； (2) 若$\langle x,y\rangle\in R$，则$[x]_R=[y]_R$；

(3) 若$\langle x,y\rangle\notin R$，则$[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$； (4) $\bigcup\{[x]_R\mid x\in A\}=A$.

同学们可以试着证明上面的定理，我们只解释一下它的含义. 结论(1) 表明任何等价类都是集合A的非空子集. 比如，在例 4.11 中三个等价类都是A的子集. 结论(2) 和(3) 说的是在A中任取两个元素，它们的等价类或是相等，或是不交. 比如，在例 4.11 中，1 和 4 的等价类彼此相等，都是$\{1,4\}$. 但 1 和 2 的等价类彼此不交. 结论(4) 表示所有等价类的并集是A. 在例 4.11 中就是$\{1,4\}\cup\{2,5,8\}\cup\{3\}=\{1,2,3,4,5,8\}$.

定义 4.5-3 设R是非空集合A上的等价关系，以关于R的全体不同的等价关系类为元素的集合称作 ***A* 关于 *R* 的商集**，简称A的商集，记作A/R.

由定理 4.5-1 可知，A/R的任何二元素都是不可交的，且$\bigcup A/R=A$. 在例 4.11 中，

$$A/R=\{[1],[2],[3]\}=\{\{1,4\},\{2,5,8\},\{3\}\}.$$

4.5.2 集合的划分

在对集合的研究中，有时需要将一个集合分成若干个子集加以讨论.

定义 4.5-4 设A为非空集合，若存在A的一个子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$满足：

(1)$\pi\neq\varnothing$；

(2)$\forall x\forall y\in\pi$ 且$x\neq y$，则$x\cap y=\varnothing$；

(3) $\bigcup\pi=A$，

则称π是A的一个**划分**，称π中的元素为A的**划分块**.

日常生活中经常遇到划分的例子. 在切蛋糕时就是对蛋糕进行划分，切出的每个块不是空块，两个不同的切块没有公共部分，所有切块合到一起就是原来的蛋糕.

例 4.13 设$A=\{a,b,c,d\}$，给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$如下，判断是否为$A$的划分.

$$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\},\qquad \pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\},$$
$$\pi_3=\{\{a\}\{a,b,c,d\}\},\qquad \pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\},$$
$$\pi_5=\{\{a,b\},\{c,d\},\varnothing\},\qquad \pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}.$$

解 π_1和π_2是A的划分，其他都不是A的划分，因为π_3中的两个划分块相交；π_4中的划分块的并集不等于A了；π_5中含有$\varnothing$；π_6根本不是A的子集族.

定理 4.5-2 设A为非空集合，

(1) 设R为A上的任意一个等价关系，则对应R的商集A/R为A的一个划分；

(2) 设π为A的任意一个划分，令$R_\pi=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\wedge x,y$属于$\pi$的同一划分块$\}$，则$R_\pi$为$A$上的等价关系.

本定理留给读者证明.

定理 4.5-3 说明在划分和等价关系之间存在着一一对应关系. 即给定非空集合A上的一个等价关系R，由R可以唯一产生集合A的一个划分$\pi=A/R$，反之，对非空集合A的任一划分$\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$，可以唯一对应集合$A$上的一个等价关系：

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_k \times A_k).$$

例 4.14　设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\pi=\{\{1,4\},\{2,5,6\},\{3\}\}$ 是 A 的一个划分，求由划分 π 所唯一确定的 A 上的等价关系.

解　等价关系 R 为：两个元素之间有关系 R 当且仅当它们处在同一个分块中，记

$$\pi_1=\{1,4\},\pi_2=\{2,5,6\},\pi_3=\{3\},$$

构造：

$$R_1=\pi_1\times\pi_1=\{1,4\}\times\{1,4\}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\},$$

$$\begin{aligned}R_2=\pi_2\times\pi_2&=\{2,5,6\}\times\{2,5,6\}\\&=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 5,6\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 6,5\rangle,\langle 6,6\rangle\},\end{aligned}$$

$$R_3=\pi_3\times\pi_3=\{3\}\times\{3\}=\{\langle 3,3\rangle\}.$$

再构造：

$$\begin{aligned}R=R_1\cup R_2\cup R_3=\{&\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 5,5\rangle,\\&\langle 5,6\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 6,5\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 3,3\rangle\}.\end{aligned}$$

4.6　偏序关系

4.6.1　偏序关系

集合 A 上除了等价关系之外，另一种重要的关系是偏序关系，也称为为部分序关系，顾名思义就是 A 上部分元素之间的顺序关系. 这种关系在实际应用中广泛存在. 比如，通常的数之间的大于等于关系，集合之间的包含关系等都是偏序关系，下面给出偏序关系的定义.

定义 4.6-1　设 R 是非空集合 A 上的关系，若 R 是自反的，反对称和传递的，则称 R 为 A 上的**偏序关系**，简称**偏序**，记作 $\preccurlyeq$. 称有序对 $\langle A, R\rangle$ 为**偏序集**.

若 R 是偏序，$\langle A, R\rangle$ 常记为 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$，为便于书写，将 $\preccurlyeq$ 通常记为 $\leqslant$，读作“小于或等于”，因为“小于或等于”也是一种偏序，故不会产生混乱. 所以，R 是偏序，aRb 就表成 $a\leqslant b$.

注意，$x\leqslant y$ 是指在偏序关系中的顺序性，是将 x 排在 y 的前边或者 x 即是 y. 根据不同偏序的定义，对偏序有着不同的解释，如包含关系是偏序关系 $\leqslant$，$A\leqslant Y$（一般写成 $A\subseteq Y$）是指 A 包含于 Y；整除关系是偏序关系 $\leqslant$，$3\leqslant 6$（通常记为 $3\mid 6$）是指 3 整除 6 等.

例 4.15　在实数集 $\mathbf{R}$ 上，证明小于等于关系“$\leqslant$”是偏序关系.

证明　(1) 对于任何实数 $x\in\mathbf{R}$，有 $x\leqslant x$ 成立，故 $\leqslant$ 是自反的.

(2) 对任何实数 $x,y\in\mathbf{R}$，如果 $x\leqslant x$，则必有 $x=y$，故 $\leqslant$ 是反对称的.

(3) 如果 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，那么必有 $x\leqslant z$，故 $\leqslant$ 是传递的.

因此，$\leqslant$ 是个偏序关系.

例 4.16　给定集合 $A=\{2,3,6,8\}$，令“$\leqslant$”$=\{\langle x,y\rangle\mid x$ 整除 $y\}$，验证“$\leqslant$”是偏序关系.

解　“$\leqslant$”$=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\{6,6\rangle,\langle 8,8\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,6\rangle\}$.

写出关系矩阵和关系图(见图 4-6).

$$M_{\leqslant}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

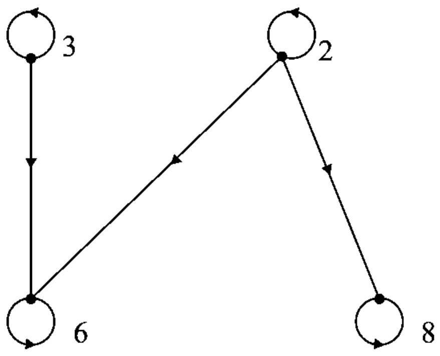


图 4-6

从关系矩阵和关系图可以看出"$\leqslant$"是自反、反对称和传递的.

定义 4.6-2　设$\langle A,\leqslant\rangle$为偏序集,对于任意的$x,y\in A$,如果$x\leqslant y$或者$y\leqslant x$成立,则称$x$与$y$是**可比**的;如果$x\prec y$(即$x\leqslant y\wedge x\neq y$),且不存在$z\in A$使得$x\prec z\prec y$,则称$y$**盖住**$x$.其中$x\prec y$读作$x$"小于"$y$,它是指在偏序中,$x$排在$y$的前边.

可见,在偏序集$\langle A,\leqslant\rangle$中,对$\forall x,y\in A$,有$x\prec y$(或$y\prec x$),$x=y$,$x$与$y$不可比三种情况发生.例如,$\langle A,\leqslant\rangle$为偏序集,其中$A=\{1,2,3,4,5\}$,是整除关系,则有

$$\leqslant=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,4\rangle\}\cup I_A.$$

那么,对任意$x\in A$都有$1\leqslant x$,所以,1 和 1,2,3,4,5 都是可比的,但是 2 不能整除 3,3 也不能整除 2,所以,2 和 3 是不可比的.对于 1 和 2 来说,$1\prec 2$,并且不存在$z\in A$使得 1 整除z并且z整除 2,所以,2 盖住 1.同样,有 4 盖住 2,但 4 不盖住 1,因为有$1\prec 2\prec 4$成立.显然,如果x与y不可比,则一定不会有x盖住y或y盖住x.

定义 4.6-3　设$\langle A,\leqslant\rangle$为偏序集,若对任意的$x,y\in A$,$x$和$y$都可比,则称$\leqslant$为$A$上的**全序关系**(或**线序**),且称$\langle A,\leqslant\rangle$为**全序集**,或**线序集**,或**链**.

存在着许多全序关系,例如,数集上的小于等于关系是全序关系,字典顺序是英文字符串集合上的全序关系,而整除关系不是正整数集合上的全序关系.

4.6.2　哈斯图

对于有穷的偏序集$\langle A,\leqslant\rangle$可以用哈斯图来描述.哈斯图的画法如下:

(1) 集合A中的每个元素用一个结点表示.

(2) 结点位置按它们在偏序中的次序从底向上排列.如果y盖住x,则在x和y之间连成一条线.

实际上哈斯图就是简化的关系图.与关系图相比,哈斯图舍弃了反映关系的自反性的每个元素的环,去掉了弧线的箭头.对于A的任意两个元素x和y,只要在其哈斯图中,从x到y有路相通,就表示其间有偏序关系,因此,其传递性已得到显示.而由下至上的方向充分表现出其反对称性.

例如,集合$A=\{2,4,6,8\}$上的小于等于关系是全序关系,其哈斯图如图 4-7 所示.可见,全序集的哈斯图是一条直线,所以,全序集也可称为线序集.

例 4.17　画出$\langle\{1,2,\cdots,12\},R_{整除}\rangle$的整除哈斯图.

解　$R_{整除}=I_A\cup\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,7\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 1,9\rangle,\langle 1,10\rangle,$
$\langle 1,11\rangle,\langle 1,12\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 2,10\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,9\rangle,$
$\langle 3,12\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 5,10\rangle,\langle 6,12\rangle\}.$

哈斯图如图 4-8 所示.

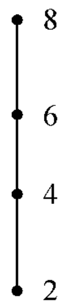


图 4-7

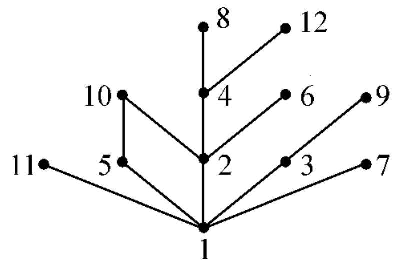


图 4-8

例 4.18　设偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的哈斯图如图 4-9 所示,求出集合 A 的偏序 $\preccurlyeq$.

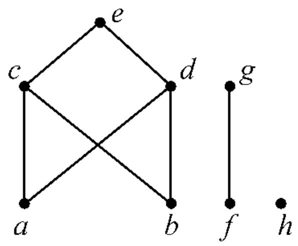


图 4-9

解　$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$\preccurlyeq = \{\langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,e\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle b,e\rangle, \langle c,e\rangle, \langle d,e\rangle, \langle f,g\rangle\} \cup I_A$.

4.6.3　特殊元素

下面研究偏序集中的一些特殊元素.

定义 4.6-4　设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集,$B \subseteq A$.

(1) 若 $\exists y \in B$,使得 $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立,则称 y 是 B 的**最小元**.

(2) 若 $\exists y \in B$,使得 $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立,则称 y 是 B 的**最大元**.

(3) 若 $\exists y \in B$,使得 $\neg \exists x(x \in B \wedge x \prec y)$ 成立,则称 y 是 B 的**极小元**.

(4) 若 $\exists y \in B$,使得 $\neg \exists x(x \in B \wedge y \prec x)$ 成立,则称 y 是 B 的**极大元**.

从本定义可知,最小元与极小元是有区别的,最小元是 B 中最小的元素,它与 B 中其他元素都可比;而极小元不一定与 B 中元素都可比,只要没有比它小的元素,它就是极小元.对于有穷集 B,极小元一定存在,且可能有多个,但最小元不一定存在,若存在则必唯一.若 B 中只有一个极小元,则它一定是 B 的最小元,类似地可讨论极大元与最大元之间区别.

例 4.19　求例 4.16 整除关系的偏序集的最小元、最大元、极小元和极大元.

解　整除关系的偏序集有最小元,是 1;没有最大元.

整除关系的偏序集有极大元 7,8,9,10,11 和 12;有极小元 1.

例 4.20　求例 4.17 偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的最小元、最大元、极小元和极大元.

解　偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 没有最小元,也没有最大元.

偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中极大元是 e,g 和 h,极小元是 a,b,f 和 h.h 为孤立结点,它与任何别的元都不可比,所以,它既是极大元,也是极小元.

定义 4.6-5 设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$为偏序集,$B \subseteq A$.

(1) 若 $\exists y \in A$,使得 $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立,则称 y 是 B 的**上界**.

(2) 若 $\exists y \in A$,使得 $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立,则称 y 是 B 的**下界**.

(3) 令 $C = \{y \mid y$ 为 B 的上界$\}$,则称 C 的最小元为 B 的**最小上界**或**上确界**.

(4) 令 $D = \{y \mid y$ 为 B 的下界$\}$,则称 D 的最大元为 B 的**最大下界**或**下确界**.

由本定义可知,B 的最小元一定是 B 的下界,并且也是 B 的最大下界;但反之不一定正确,B 的下界不一定是 B 的最小元,因为它可能不是 B 中的元素;类似地,讨论 B 的最大元与其上界的关系.

B 的上界、下界、最小上界、最大下界都可能不存在. 如果最小上界或最大下界存在,一定就是唯一的.

在例 4.16 整除关系的偏序集里,如果 $B = \{2,3,6\}$,那么 B 的上界是 6 和 12,最小上界是 6;B 的下界是 1,最大下界也是 1.

在例 4.17 中,令 $B = \{c,d,e\}$,则 B 的上界和最小上界都是 e,B 的下界为 a,b,但 B 没有最大下界.

本章小结

本章从集合概念出发,引出了关系的各种运算性质及分类,即等价关系与偏序关系等. 本章重点是关系运算、等价关系与偏序关系等有关性质. 难点是关系闭包概念及求法,这里将略去复杂的证明.

本章主要讨论了:

(1) 有序对(序偶)、n 元组、笛卡儿积的概念及性质.

(2) 二元关系的定义与表示方法(集合表示、关系矩阵和关系图) 及关系的性质(自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性).

(3) 关系定义域,值域的概念,逆关系,合成关系等的概念及性质.

(4) 关系的自反、对称和传递闭包的概念及求法.

(5) 等价关系及划分.

(6) 偏序关系及偏序集,偏序关系的关系图用哈斯图来表示.

(7) 一些特殊的二元关系:空关系、恒等关系、全域关系等.

习题 4

4.1 设有序对$\langle x+2,4\rangle$与有序对$\langle 5,2x+y\rangle$相等,则 x 和 y 分别为多少?

4.2 设 $A = \{0,1\}$,$B = \{1,2\}$,确定下面集合:

(1)$A \times B$;

(2)$A \times \{1\} \times B$;

(3)$A^2 \times B$;

(4)$(B \times A)^2$.

4.3 设 $A = \{a,b\}$,构成集合 $\rho(A) \times A$.

4.4 设 $S = \{1,2,\cdots,6\}$,下面各式定义的 R 都是 S 上的关系,分别列出 R 的元素.

(1) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S \wedge x \mid y\}$，$x \mid y$ 表示 x 整除 y.

(2) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S \wedge x$ 是 y 的倍数$\}$.

4.5　设 A、B、C、D 为任意集合，判断以下等式是否成立，说明为什么.

(1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$；

(2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$；

(3) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$；

(4) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$.

4.6　证明：若 $X\times Y=X\times Z$，且 $X\neq\varnothing$，则 $Y=Z$.

4.7　设 A、B、C、D 为任意集合，判断以下命题的真假.

(1) 若 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$，则有 $A\times B\subseteq C\times D$.

(2) 若 $A\times B\subseteq C\times D$，则有 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$.

4.8　设集合 $A=\{2,4,5,9\}$ 求 E_A、I_A、D_A 和 L_A.

4.9　设集合 $A=\{a,b,c\}$，R 为 A 上的关系，则有：

(1) $R_1=\varnothing$；

(2) $R_2=E_A$（全域关系）；

(3) $R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$；

(4) $R_4=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$；

(5) $R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$.

判断 A 中的上述关系是不是 a）自反的，b）对称的，c）可传递的，d）反对称的.

4.10　判断下列关系矩阵所具有的性质（自反、反自反、不自反；对称、反对称、不对称；传递、不传递），均为集合$\{1,2,3\}$ 上的关系.

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix};\quad M_{R_2}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix};\quad M_{R_3}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix};$$

$$M_{R_4}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix};\quad M_{R_5}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

4.11　设 $S=\{1,2,3\}$，图 4-10 给出了 S 上的 5 个关系，则它们只具有以下性质：自反的、反自反的、对称的、反对称的和传递的.

4.12　设 $X=\{1,2,3,4\}$，R 是 X 上的二元关系，则

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 1,2\rangle\}.$$

(1) 画出 R 的关系图；

(2) 写出 R 的关系矩阵；

(3) 说明 R 是否具有自反、反自反、对称、传递特性.

4.13　设 $S=\{1,2,\cdots,10\}$，定义 S 上的关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S \wedge x+y=10\}$，$R$ 具有哪些性质？

4.14　举出 $A=\{1,2,3\}$ 上关系 R 的例子，使它有下述性质.

(1) R 既是对称的又是反对称的；

(2) R 既不是对称的，又不是反对称的；

(3) R 是可传递的.

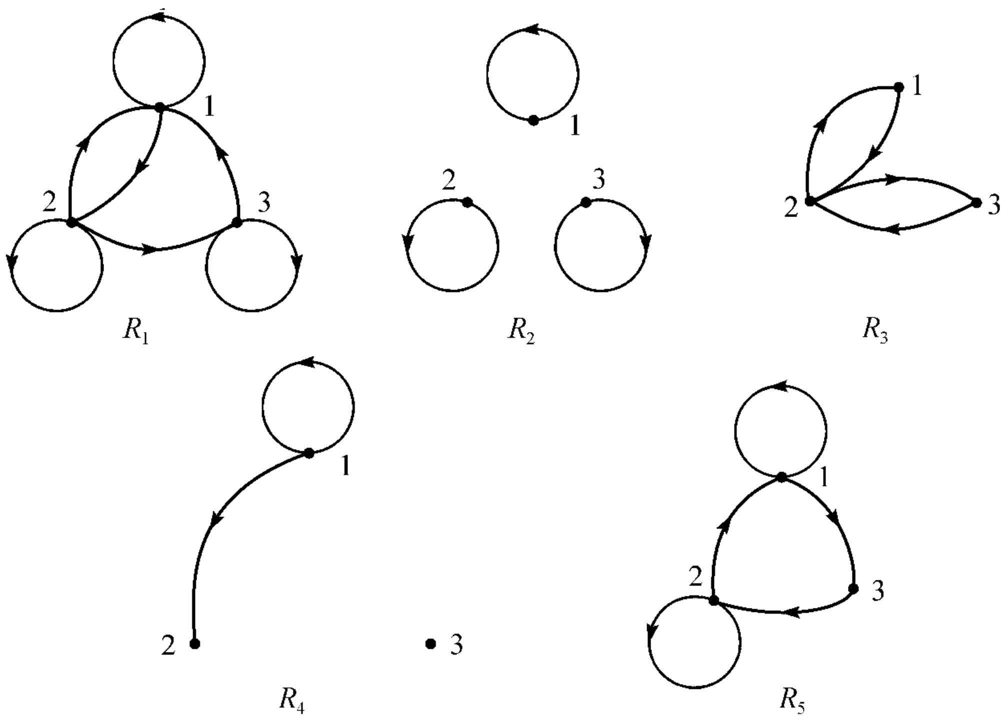


图 4-10

4.15　设 R_1 和 R_2 是 A 上的任意关系，说明以下命题的真假，并予以证明.

(1) 若 R_1 和 R_2 是自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的；

(2) 若 R_1 和 R_2 是反自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是反自反的；

(3) 若 R_1 和 R_2 是对称的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是对称的；

(4) 若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是传递的.

4.16　设 $S=\langle 1,2,3,4\rangle$，R 为 S 上的关系；其关系矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(1) 求 R 的集合表达式；

(2) 求 $\mathrm{dom}R$，$\mathrm{ran}R$；

(3) 求 $R \circ R$；

(4) 求 R^{-1}.

4.17　证明若 S 是集合 X 上的二元关系.

(1) S 是传递的，当且仅当 $(S \circ S) \subseteq S$；

(2) S 是自反的，当且仅当 $I_x \subseteq S$.

4.18　设 S 为 X 上的关系，证明若 S 是自反的和传递的，则 $S \circ S = S$，其逆为真吗？

4.19　设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，A 上的二元关系分别为：

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle\langle 3,3\rangle\},$$

$$S=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,4\rangle\},$$

求 $R \circ S$，$S \circ R$，R^2，R^{-1}，S^{-1}，$R^{-1} \circ S^{-1}$.

4.20　设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的关系：

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\},$$

用集合法、矩阵运算和作图方法求出 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包.

4.21　根据图 4-11 中的有向图,写出邻接矩阵和关系 R,并求出 R 的自反闭包和对称闭包.

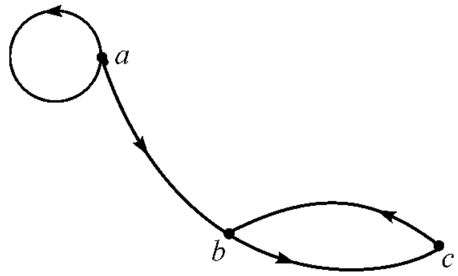


图 4-11

4.22　设 R 的关系图如图 4-12 所示,试给出 $r(R)$,$s(R)$,$t(R)$ 的关系图.

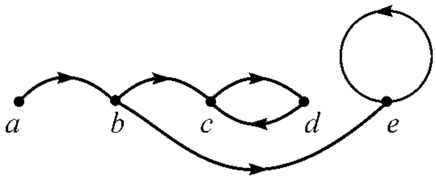


图 4-12

4.23　设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系且 $R_1 \supseteq R_2$,求证:

(1) $r(R_1) \supseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \supseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \supseteq t(R_2)$.

4.24　设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系,试判断下列命题是否正确?

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$;

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1 \cup R_2) = t(R_1) \cup t(R_2)$.

4.25　设 R 和 R' 是集合 A 上的等价关系,用例子证明 $R \cup R'$ 不一定是等价关系.

4.26　试问由 4 个元素组成的有限集上所有的等价关系的个数为多少?

4.27　设 $\mathbf{N}$ 是自然数集合,定义 $\mathbf{N}$ 上的二元关系 R:

$$R = \{\langle x,y\rangle \mid x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}, x+y \text{ 是偶数}\},$$

(1) 证明 R 是一个等价关系;

(2) 求关系 R 的等价类.

4.28　集合 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,R 为 A 上二元关系,

$$R = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,8\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,6\rangle,$$
$$\langle 5,1\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 6,4\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 7,7\rangle,\langle 8,3\rangle,\langle 8,8\rangle\},$$

求 A/R.

4.29　给定集合 $S = \{1,2,3,4,5\}$,找出 S 上的等价关系 R,此关系 R 能够产生划分 $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$ 并画出关系图.

4.30　R 是集合 A 上的关系.下列哪些是偏序?若不是,说明哪些条件不满足.

(1) A 是整数集，aRb 当且仅当 $a = 2b$；

(2) A 是集合 S 的幂集，R 是集合包含关系.

4.31 画出下列集合上整除关系的哈斯图，并指出它们的最大元、极大元、最小元、极小元.

(1) $\{1,2,3,4,5,8,12,24\}$；

(2) $\{2,3,4,8,9,10,11\}$.

4.32 图 4-13 是两个偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的哈斯图，分别写出集合 A 和偏序关系"$\preccurlyeq$"的集合表达式.

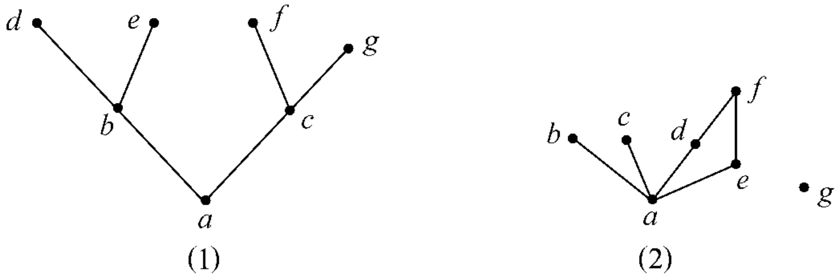


图 4-13

4.33 分别画出下列各偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的哈斯图，并找出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元.

(1) $A = \{a,b,c,d,e\}$，

$$\text{"}\preccurlyeq\text{"} = \{\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\} \cup I_A.$$

(2) $A = \{a,b,c,d,e\}$，

$$\text{"}\preccurlyeq\text{"} = \{\langle c,d\rangle\} \cup I_A.$$

第 7 章　图　论

图论的创始人是瑞士数学家欧拉,他于 1736 年首次建立“图”模型,解决了哥尼斯堡七桥问题.

图论是一个新的数学分支,也是一门很有实用价值的学科,它在自然科学、社会科学等领域均有很多应用.近年来它受计算机科学蓬勃发展的刺激,发展极其迅速,应用范围不断拓展,已渗透到诸如语言学、逻辑学、物理学、化学、电子信息工程、计算机科学以及数学的其他分支中,特别是在计算机科学中,如形式语言、数据结构、分布式系统、操作系统等方面均扮演着重要的角色.

7.1　无向图及有向图

7.1.1 图的概念

一般几何上将图定义成空间一些点(顶点)和连接这些点的线(边)的集合.图论中将图定义为一个二元组 $G=\langle V,E\rangle$,其中 V 表示顶点的集合,E 表示边的集合.这样如图 7-1 可表示为 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$.

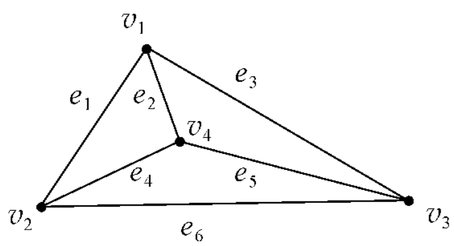


图 7-1

我们也可以用边的两个顶点来表示边.如果边 e 的两个顶点是 u 和 v,那么 e 可以写成 $e=(u,v)$,此处,(u,v) 表示 u 和 v 的无序对,即(u,v) 和(v,u) 都表达了以 u,v 为顶点的无向边.这样图 7-1 可写成:

$$G=\langle V,E\rangle,$$
$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},$$
$$E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_3),(v_2,v_4),(v_3,v_4)\}.$$

一般图 $G=\langle V,E\rangle$ 的顶点数用 $n(=|V|)$ 表示,边的数目用 $m(=|E|)$ 表示.若 $|V|$ 和 $|E|$ 都是有限的,则称图 G 是**有限图**,否则称为**无限图**.本章只讨论有限图的情况.

上面讨论的图 G 的边的两个顶点是无序的,一般称其为无向图.在实际应用中,将图的每条边分配一个方向是很自然的.当给图 G 的每一条边规定一个方向时,则称其为有向图.对有向图 $D=\langle V,E\rangle$,有向边 e 用与其关联的顶点 u,v 的有序对来表示,即 $e=\langle u,v\rangle$ 表示,u 为边 e 的起点,v 为边 e 的终点.

定义 7.1-1 设 A、B 为任意的两个集合，称

$$\{\{a,b\} \mid a \in A \land b \in B\}$$

为 A 与 B 的**无序积**，记作 $A\&B$.

定义 7.1-2 一个**无向图**是一个有序的二元组$\langle V,E\rangle$，记作 G，其中

(1)$V(\neq \varnothing)$ 称为**顶点集**，其元素称为**顶点**或**结点**；

(2)E 称为**边集**，它是无序积 $V\&V$ 的多重子集，其元素称为**无向边**，简称**边**.

例如，图 7-2 中(1)、(2) 均为 4 个顶点、3 条边的无向图.

图 7-2

例 7.1 在一次 10 周年同学会上，想统计所有人握手的次数之和，应该如何建立该问题的图论模型？

解 将每个同学分别作为一个顶点，如果两个人握过一次手就在相应的两个顶点之间画一条无向边，于是得到一个无向图.

一个人握手的次数就是这个顶点与其他顶点所连结的边的条数，进而可得出所有人握手的次数之和 .

例 7.2 在一个地方有 3 户人家，并且有 3 口井供他们使用. 由于土质和气候的关系，有些井中的水常常干枯，因此各户人家都要到有水的井去打水. 不久，这 3 户人家成了冤家，于是决定各自修一条路通往水井. 如果打算使得他们在去水井的路上不会相遇，试建立解决此问题的图论模型.

解 将 3 户人家看作 3 个顶点，且将 3 口井看作另外 3 个顶点，若 1 户人家与 1 口井之间有一条路，则在该户人家与该口井对应的顶点之间连一条无向边，这样就可以得到一个无向图.

定义 7.1-3 一个**有向图**是一个有序的二元组$\langle V,E\rangle$，记作 D，其中

(1)$V(\neq \varnothing)$ 称为**顶点集**，其元素称为**顶点**或**结点**，V 同无向图；

(2)E 为边集，它是笛卡儿积 $V\times V$ 的多重子集，其元素称为**有向边**，简称**边**.

例如，图 7-3 中均为 3 个顶点，2 条边的有向图.

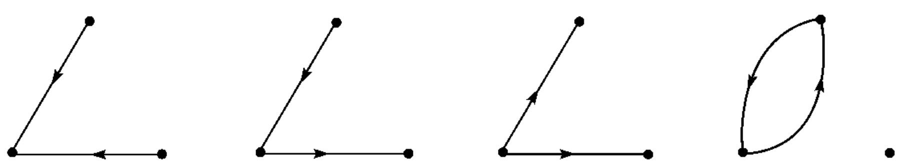


图 7-3

在图的定义中，用 G 表示无向图，D 表示有向图，但有时用 G 泛指图(无向的或有向的)，可是 D 只能表示有向图. 另外，为方便起见，有时用 $V(G)$，$E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集，若 $\mid V(G)\mid = n$，则称 G 为 n **阶图**.

在图 G 中，若边集 $E(G)=\varnothing$，则称 G 为**零图**，此时，又若 G 为 n 阶图，则称 G 为 n **阶零图**，记作 N_n. 特别地，当 $|V(G)|=1$ 时，称 N_1 为**平凡图**.

如图 7-4 所示，(1) 为平凡图，(2) 为 3 阶零图，(3) 为 4 阶图.

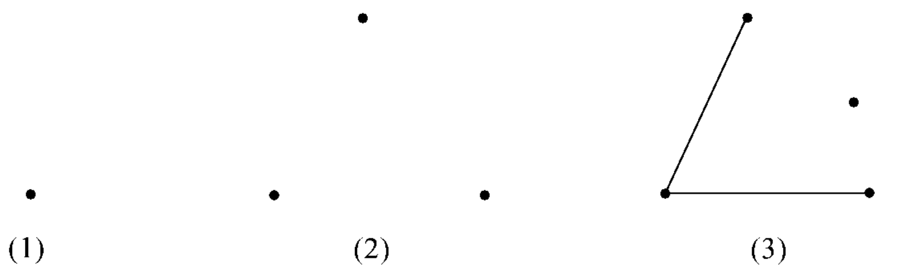


图 7-4

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图，$e_k=(v_i,v_j)\in E$，则称 v_i,v_j 为 e_k 的**端点**，e_k 与 v_i 或 e_k 与 v_j 是彼此相关联的. 若 $v_i\neq v_j$，则称 e_k 与 v_i 或 e_k 与 v_j 的关联次数为 1，若 $v_i=v_j$，则称 e_k 与 v_i 的关联次数为 2，并称 e_k 为 G 中的**环**. 对任意的 $v_1\in V$，若 $v_1\neq v_i$ 且 $v_1\neq v_j$，则称 e_k 与 v_1 的关联次数为 0.

设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图，$e_k=\langle v_i,v_j\rangle\in E$，称 v_i,v_j 为 e_k 的**端点**，若 $v_i=v_j$，则称 e_k 为 D 中的**环**. 无论在无向图中还是在有向图中，无边关联的顶点均称为**孤立点**. 只有一条边与其关联的点称为**悬挂点**，对应的边称为**悬挂边**.

显然，图的任意一条边都关联两个结点. 若一条边关联两个重合的顶点，称此边为环.

设 $G=\langle V,E\rangle$ 是图，对于任意 $u,v\in V$，若从结点 u 到结点 v 有边，则称 u 是邻接到 v 或称 u 和 v 是**邻接的**.

在无向图中，若 u 和 v 是邻接的，则 v 和 u 也是邻接的，但需要注意，在有向图中，由 u 和 v 邻接不能得出 v 和 u 邻接，邻接与结点的次序有关.

在有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 中，若 u 邻接到 v，则称 u 是 v 的**先驱元素**，v 是 u 的**后继元素**.

在无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 中，若两条边 e_1 和 e_2 有公共端点，则称边 e_1 和 e_2 是邻接的.

在无向图中，关联一对顶点的无向边如果多于 1 条，则称这些边为**平行边**，平行边的条数称为**重数**. 在有向图中，关联一对顶点的有向边如果多于 1 条，并且这些边的始点和终点相同(也就是它们的方向相同)，则称这些边为**有向平行边**，简称**平行边**. 含平行边的图称为**多重图**，既不含平行边也不含环的图称为**简单图**.

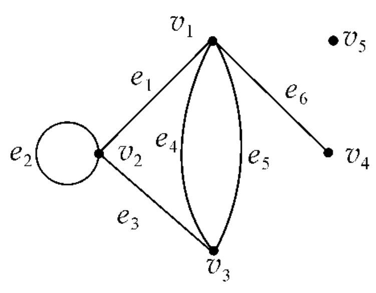


图 7-5

如图 7-5 所示，e_1 与 v_1、v_2 关联的次数均为 1，e_2 与 v_2 关联的次数为 2，边 e_1、e_4、e_5、e_6 都是相邻的，v_5 为孤立点，v_4 为悬挂点(度数为 1 的顶点)，e_6 为悬挂边，e_2 为环，e_4、e_5 为平行边，

重数为 2.

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶无向简单图,若 G 中每个顶点都与其余的 $n-1$ 个顶点相邻,则称 G 为 n **阶无向完全图**,记作 K_n.

设 $D=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶有向简单图,若对于任意的顶点 $u,v\in V(u\neq v)$,既有有向边 $\langle u,v\rangle$,又有 $\langle v,u\rangle$,则称 D 是 n **阶有向完全图**.

显然 n 阶有向完全图 K_n 的任意两个顶点都是相互邻接的,其边是成对出现的.故 n 阶有向完全图 K_n 的边数为 $n(n-1)$,N 阶无向完全图 K_n 的边数为 $n(n-1)/2$.例子如图 7-6 所示.

(4 阶无向完全图)　　(5 阶无向完全图)

图 7-6

例 7.3　设 $G=\langle V,E\rangle$ 是一无向图,其中

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\},$$

$$E=\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_2,v_3\rangle,\langle v_3,v_1\rangle,\langle v_1,v_5\rangle,\langle v_5,v_4\rangle,\langle v_4,v_3\rangle,\langle v_7,v_8\rangle\}.$$

(1) 画出 G 图解;

(2) 指出与 v_3 邻接的结点,以及和 v_3 关联的边;

(3) 指出与有 e_1 邻接的边和与 e_1 关联的点;

(4) 该图是否有孤立结点和孤立边?

(5) 判断该图是否为完全图;

(6) 该图是几阶图,结点数 n、边数 m 分别是多少?

解　(1) 所给图 G 如图 7-7 所示;

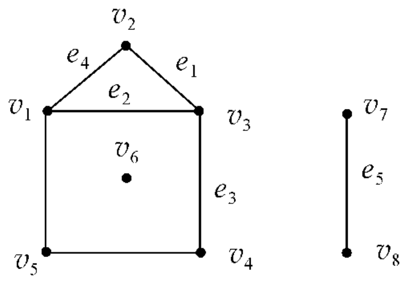


图 7-7

(2) v_1,v_2,v_4 均与 v_3 邻接,v_3 的关联边 e_1,e_2,e_3;

(3) 边 e_2,e_3,e_4 均与 e_1 邻接,e_1 关联结点 v_2,v_3;

(4) v_6 是孤立结点,e_5 是孤立边;

(5) 因为不是任意的两个顶点都是邻接的,所以该图不是完全图;

(6) 该图是 8 阶图,结点数 $n=8$,边数 $m=7$.

7.1.2　度数与握手定理

1. 顶点的度数

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，顶点 v_i 的**度数**记为 $d(v_i)$，是指与 v_i 相关联的边的条数.

在有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 中，以顶点 v 为始点引出的边的条数，称为该顶点的**出度**，记为 $d^+(v)$；以顶点 v 为终点引入的边的条数，称为该顶点的**入度**，记为 $d^-(v)$；而顶点的出度数与入度数之和称为该顶点的**度数**，简称**度**，记为 $d(v)$，即

$$d(v)=d^+(v)+d^-(v).$$

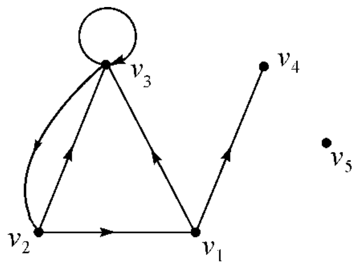


图 7-8

例如，图 7-8 的各顶点度数为：

$$d(v_1)=3,d^+(v_1)=2,d^-(v_1)=1;$$
$$d(v_2)=3,d^+(v_2)=2,d^-(v_2)=1;$$
$$d(v_3)=5,d^+(v_3)=2,d^-(v_3)=3;$$
$$d(v_4)=1,d^+(v_4)=0,d^-(v_4)=1;$$
$$d(v_5)=d^+(v_5)=d^-(v_5)=0.$$

其中，v_4 是悬挂顶点，$\langle v_1,v_4\rangle$ 为悬挂边.

设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为图 G 的顶点集，称 $d(v_1)$，$d(v_2)$，$\cdots$，$d(v_n)$ 为 G 的度数序列. 同样可以对有向图定义出度数序列 $d^+(v_1)$，$d^+(v_2)$，$\cdots$，$d^+(v_n)$，与入度数序列 $d^-(v_1)$，$d^-(v_2)$，$\cdots$，$d^-(v_n)$.

图 7-8 中的图的度数序列是 3，3，5，1，0. 图的出度数序列与入度数序列分别是 2，2，2，0，0 与 1，1，3，1，0.

2. 握手定理

定理 7.1-1　（**握手定理**）图 $G=\langle V,E\rangle$ 为任意无向图，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$（m 为边数），此时有

$$\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=2m,$$

即图中结点的度数之和等于边数的两倍.

证明　G 中每条边（包括环）均有两个端点，所以在计算 G 中各顶点度数之和时，每条边均提供 2 度，显然，m 条边，共提供 $2m$ 度.

定理 7.1-2　设 $D=\langle V,E\rangle$ 为任意有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，此时有

$$\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=2m,$$

且
$$\sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m.$$

证明　在有向图中，每条边均有一个始点与一个终点，在计算 G 中各点的出度与入度之和时，每条边均提供了一个出度与一个入度，$|E|$ 条边共提供了 $|E|$ 个出度与 $|E|$ 个入度，因而定理成立.

推论　任何图(无向的或有向的)中，奇度数顶点的个数是偶数.

证明　设 $G=\langle V,E\rangle$ 为任意一图，令
$$V_1=\{v \mid v\in V \wedge d(v)\text{ 为奇数}\},$$
$$V_2=\{v \mid v\in V \wedge d(v)\text{ 为偶数}\},$$
则 $V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知
$$2m=\sum_{v\in V} d(v)=\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v).$$

由于 $2m$、$\sum\limits_{v\in V_2} d(v)$ 均为偶数，所以 $\sum\limits_{v\in V_1} d(v)$ 为偶数，但因 V_1 中顶点数为奇数，所以 $|V_1|$ 必为偶数.

握手定理也称为图论的基本定理，图中顶点的度数是图论中最为基本的概念之一.

例 7.4　(1) (3,3,2,3) 和 (5,2,3,1,4) 能成为图的度数序列吗，为什么？

(2) 已知图 G 中有 10 条边，4 个 3 度顶点，其余顶点的度数均小于 3，问 G 中至少有多少个顶点，为什么？

解　(1) 由于两个序列中，奇度数顶点的个数均为奇数，由握手定理的推论知，不能构成图的度数序列.

(2) 因 $m=10$，由握手定理知，G 中各顶点度数之和为 20，4 个 3 度顶点占去 12 度，还剩 8 度，其余顶点的度可能为 0,1,2，若全为 2 度顶点，则还需 4 个顶点，所以 G 至少有 8 个顶点.

7.1.3　子图与补图

1. 子图

定义 7.1-4　设 $G=\langle V,E\rangle$，$G'=\langle V',E'\rangle$ 是两个图. 若 $V'\subseteq V$，且 $E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的**子图**，G 是 G' 的**母图**，记作 $G'\subseteq G$.

若 $G'\subseteq G$ 且 $G'\neq G$(即 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$)，则称 G' 是 G 的**真子图**.

若 $G'\subseteq G$ 且 $V'=V$，则称 G' 是 G 的**生成子图**.

设 $V_1\subseteq V$ 且 $V_1\neq\varnothing$，以 V_1 为顶点集，以两端点均在 V_1 中的全体边为边集的 G 的子图，称为 $\boldsymbol{V_1}$ **导出的导出子图**.

设 $E_1\subseteq E$，且 $E_1\neq\varnothing$，以 E_1 为边集，以 E_1 中边关联的顶点的全体为顶点集的 G 的子图，称为 $\boldsymbol{E_1}$ **导出的导出子图**.

在图 7-9 中，(2)、(3) 均为(1) 的子图；(3) 是生成子图；(2) 是顶点子集 $\{v_1,v_2\}$ 的导出子图，也是边子集 $\{e_4,e_5\}$ 的导出子图；(3) 又是边子集 $\{e_1,e_3,e_4\}$ 的导出子图.

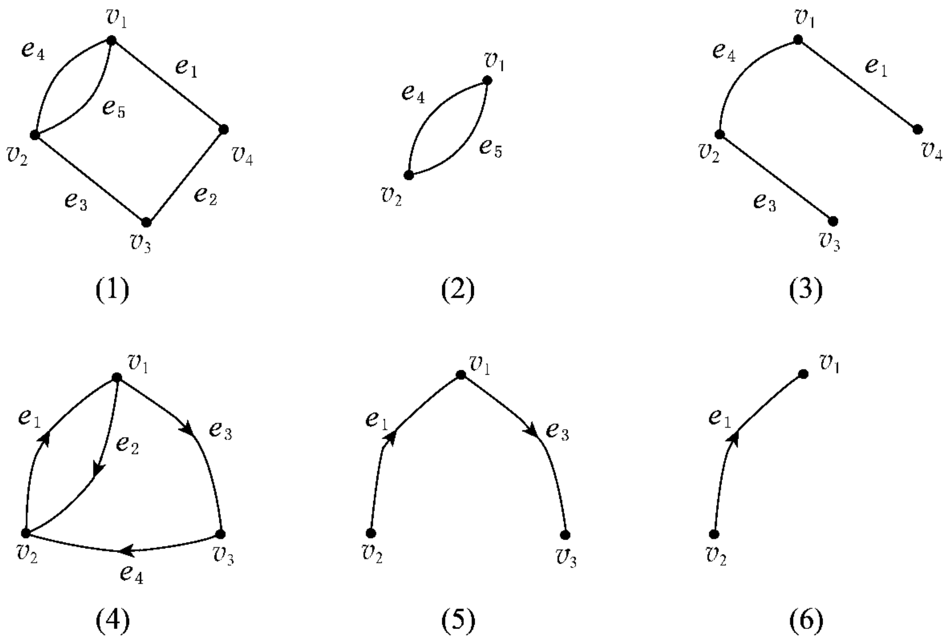


图 7-9

在图 7-9 中，(5)、(6) 是(4) 的子图，(5) 是生成子图，也是边子集$\{e_1, e_3\}$ 的导出子图；(6) 是边子集$\{e_1\}$ 的导出子图.

2. 补图

定义 7.1-5　设$G = \langle V, E\rangle$是n阶无向简单图. 以V为顶点，以所有能使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G相对于完全图K_n的补图，简称G的**补图**，记作$\overline{G}$.

有向简单图的补图可类似定义.

在图 7-10 中，(1) 是(2) 的补图，当然(2) 也是(1) 的补图，就是说，(1) 和(2) 互为补图. 同理，(3) 和(4) 互为补图.

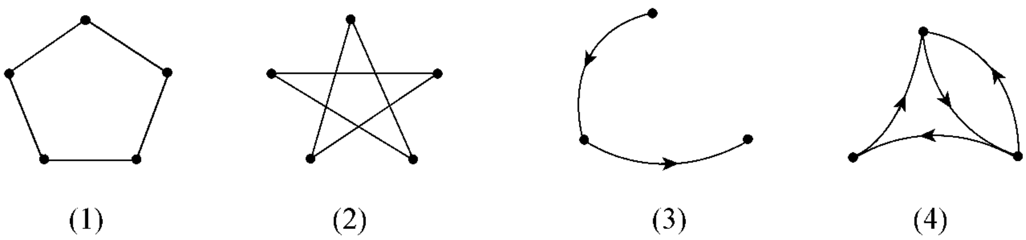


图 7-10

7.1.4　图的同构

图是表达事物之间关系的工具. 在画图时，由于顶点位置的不同，边的直、曲不同，同一个事物之间的关系可能画出不同形状的图来，因而引出了图同构的概念.

定义 7.1-6　设两个无向图$G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$，$G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$，如果存在双射函数$\theta: V_1 \to V_2$，使得对于任意的$e = (v_i, v_j) \in E_1$当且仅当$e' = (\theta(v_i), \theta(v_j)) \in E_2$，并且$e$与$e'$的重数相同，则称$G_1$与$G_2$是同构的，记作$G_1 \cong G_2$.

从这个定义可以看到，若G_1与G_2同构，它的充要条件是：两个图的结点和边分别存在一一对应关系，且保持关联关系.

在图 7-11 中，(1) $\cong$ (2)，顶点之间的对应关系为$a \leftrightarrow v_1$，$b \leftrightarrow v_2$，$c \leftrightarrow v_3$，$d \leftrightarrow v_4$，$e \leftrightarrow v_5$，则边与边之间也是一一对应. 不难验证，(3) $\cong$ (4)，(3) 所示图称为**彼德森图**.

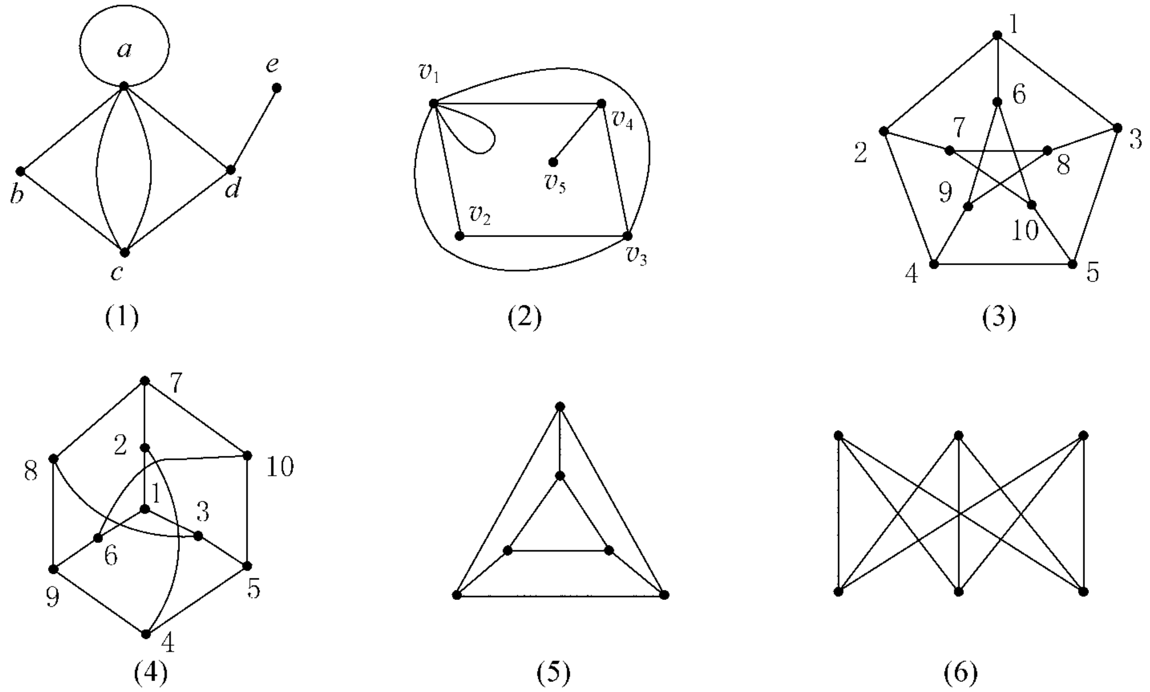


图 7-11

到目前为止，判断两图同构还只能从定义出发.判断过程中不要将两图同构的必要条件当成充分条件.

例如，在图 7-11 中，(5) 与(6) 两图，顶点个数相同，边的条数相同，每个项点都是 3 度顶点，但这些都是图同构的必要条件，不是充分条件，图(5) 与(6) 不同构.在(6) 中存在 3 个彼此不相邻的顶点，而在(5) 中却找不到 3 个彼此不相邻的顶点.

两个有向图同构的概念可类似定义，尚需注意有向边的方向.

例 7.5　(1) 画出 4 个顶点 3 条边的所有可能非同构的无向简单图；

(2) 画出 3 个顶点 2 条边的所有可能非同构的有向简单图.

解　(1) 直观上容易看出，4 个顶点 3 条边的所有非同构的无向简单图只有图 7-12 中(1)、(2)、(3) 所示的 3 个图.

(2) 3 个顶点 2 条边的所有非同构的有向简单图只有图 7-12 中(4)、(5)、(6)、(7) 所示的 4 个图.3 个顶点 2 条边的非同构的无向简单图只有 1 个，由它可派生出图(4)、(5)、(6)、(7) 所示的 4 个非同构的有向简单图.

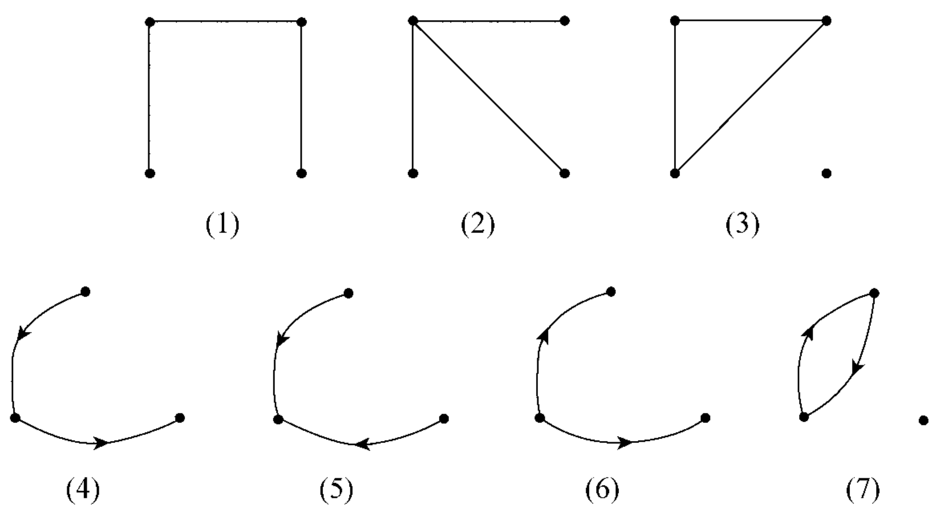


图 7-12

7.2　通路、回路与连通性

在现实世界中，常常要考虑这样一个问题：如何从一个图 G 中的给定的结点出发，沿着一些边连续移动达到另一个指定的结点，这种依次由结点和边组成的序列，就形成通路的概念.

7.2.1　通路与回路

定义 7.2-1　给定图 $G=\langle V,E\rangle$，设 $v_0,v_1,\cdots,v_n\in V$，$e_1,e_2,\cdots,e_n\in E$，其中 e_i 是关联结点 v_{i-1},v_i 的边，交替序列 $v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$ 称为联结点 v_0 到 v_n 的**通路**.

v_0 和 v_n 分别称作通路的起点和终点，当 $v_0=v_n$ 时，这条路称作**回路**.

例如，在图 7-13 中有：

通路 1：$v_1e_2v_3e_4v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_7v_3$，$v_1$ 为起点，v_3 为终点；

通路 2：$v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_3e_2v_1$，$v_5$ 为起点，v_1 为终点；

回路：$v_2e_1v_1e_2v_3e_7v_5e_6v_2$，起点和终点均为 v_2.

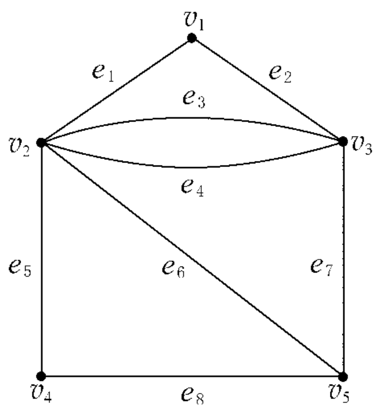


图 7-13

通路或回路中边的数目 n 称作通路或回路的**长度**.

若一条通路中所有的边 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 均不相同，称作**简单通路**. 若一条回路中所有的边 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 均不相同，称作**简单回路**.

若通路的所有顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 互不相同(从而所有边也互不相同)，则称此通路为**初级通路**. 若回路中，除 $v_1=v_n$ 外，其余顶点各不相同，所有边也各不相同，则称此回路为**初级回路**.

有边重复出现的通路称为**复杂通路**，有边重复出现的回路称为**复杂回路**.

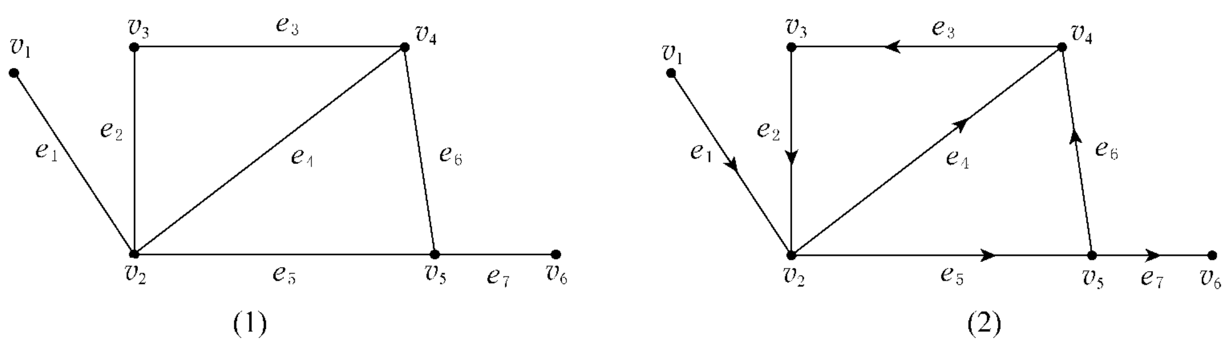


图 7-14

图 7-14(1) 中,从 v_1 到 v_6 的通路有:

$P_1: v_1 e_1 v_2 e_5 v_5 e_7 v_6$ 长度 3

$P_2: v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_4 v_2 e_5 v_5 e_7 v_6$ 长度 6

$P_3: v_1 e_1 v_2 e_5 v_5 e_6 v_4 e_4 v_2 e_5 v_5 e_7 v_6$ 长度 6

……

其中 P_1 为初级通路,P_2 为简单通路,P_3 是复杂通路.

图 7-14 (2) 中,过 v_2 的回路 (从 v_2 到 v_2) 有:

$Q_1: v_2 e_4 v_4 e_3 v_3 e_2 v_2$ 长度 3

$Q_2: v_2 e_5 v_5 e_6 v_4 e_3 v_3 e_2 v_2$ 长度 4

$Q_3: v_2 e_4 v_4 e_3 v_3 e_2 v_2 e_5 v_5 e_6 v_4 e_3 v_3 e_2 v_2$ 长度 7

……

其中,Q_1、Q_2 为初级回路,Q_3 为复杂回路.

由定义可知,初级通路(回路) 是简单通路(回路),但反之不真.

任一通路中如果删去所有回路则必得初级通路,如 P_3 中如果删去($e_5 v_5 e_6 v_4 e_4 v_2$) 就可以得到初级通路 P_1. 同理,任一回路中删去其中间的所有其余回路必得初级回路.

下面我们给出一个关于初级通路(初级回路) 长度的定理.

定理 7.2-1 在一个 n 阶图中,若从顶点 v_i 到 v_j 存在通路 ($v_i \neq v_j$),则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

证明 如果从结点 v_j 到结点 v_k 存在一条路,则该路上的结点序列是[$v_j \cdots v_i \cdots v_k$],如果在这路上有 l 条边,则序列中必有 $l+1$ 个结点,若 $l > n-1$,则必有结点 v_s,它在序列中不止一次出现,即必有序列[$v_j \cdots v_s \cdots v_s \cdots v_k$],在路中去掉从 v_s 到 v_s 的这些边,仍然得到一条从结点 v_j 到结点 v_k 的路,但此路比原来的路的边数要少. 如此重复进行下去,必得到一条从结点 v_j 到结点 v_k 小于等于 $n-1$ 条边的通路.

推论 在一个 n 阶图中,若从顶点 v_i 到 v_j 存在通路($v_i \neq v_j$),则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路.

定理 7.2-2 在一个 n 阶图中,若 v_i 到自身存在回路,则从 v_i 到自身存在长度小于等于 n 的回路.

推论 在一个 n 阶图中,若 v_i 到自身存在一个简单回路,则从 v_i 到自身存在长度小于等于 n 的初级回路.

由以上定理可知,在 n 阶图中,任何一条初级通路的长度小于等于 $n-1$,任何一条初级回路的长度小于等于 n.

7.2.2 图的连通性

1. 无向图的连通性

定义 7.2-2 在一个无向图 G 中,若从顶点 v_i 到 v_j 存在通路(当然从 v_j 到 v_i 也存在通路),则称 v_i 与 v_j 是**连通**的. 规定 v_i 到自身总是连通的.

设 v_i, v_j 为无向图G 中的任意两点,若 v_i 与 v_j 是连通的,则称 v_i 与 v_j 之间长度最短的通路为 v_i 与 v_j 之间的**短程线**,短程线的长度称为 v_i 与 v_j 之间的**距离**,记作 $d(v_i, v_j)$. 若 v_i 与 v_j 不连通,规定 $d(v_i, v_j) = \infty$.

$d(v_i, v_j)$ 具有下面性质:

(1) $d(v_i, v_j) \geqslant 0$，$v_i = v_j$ 时，等号成立.

(2) 满足三角不等式，即对任意 3 个顶点 v_i, v_j, v_n，有

$$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_n) \geqslant d(v_i, v_n).$$

(3) 有对称性，即 $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$.

定义 7.2-3　若无向图 G 是平凡图，或 G 中任意两顶点都是连通的，则称 G 是**连通图**；否则，称 G 是**非连通图**.

定理 7.2-3　无向图中顶点之间的连通关系是顶点集上的等价关系.

证明　(1) 由于规定任何顶点到自身总是连通的，所以顶点之间的连通关系具有自反性.

(2) 由定义可知，无向图中顶点之间的连通显然是相互的，故顶点之间的连通关系具有对称性.

(3) 若顶点 v_i 和 v_j 是连通的，v_j 和 v_k 是连通的，则 v_i 到 v_j 存在一条通路，v_i 到 v_k 存在一条通路，从而 v_i 经 v_j 到 v_k 存在一条通路，因此顶点之间的连通关系具有传递性.

由(1)、(2) 和(3) 可知，顶点之间的连通关系是顶点集上的等价关系.

设 G 为一个无向图，R 是 G 中顶点之间的连通关系. 按着 R 可将 $V(G)$ 划分成 $k(k \geqslant 1)$ 个等价类，记作 $V_1, V_2, \cdots, V_k$. 每个等价类中的顶点都彼此连通；不同等价类中的任意两个顶点都不连通. 由它们导出的子图 $G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_k]$ 称为 G 的连通分支，其个数记为 $p(G)$.

若 G 是连通图，则 $p(G) = 1$；若 $p(G) \geqslant 2$，则 G 一定是非连通图.

n 阶零图是具有 n 个连通分支的图，当 $n \geqslant 2$ 时，一定是非连通图.

2. 有向图的连通性

定义 7.2-4　在一个有向图 D 中，若从顶点 v_i 到 v_j 存在通路，则称 v_i **可达** v_j. 规定 v_i 到自身总是可达的.

设 v_i, v_j 为有向图 D 中任意两点，若 v_i 可达到 v_j，则称从 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的短程线，短程线的长度称为 v_i 到 v_j 的距离，记作 $d\langle v_i, v_j\rangle$. 若 v_i 不可达 v_j，规定 $d\langle v_i, v_j\rangle = \infty$. $d\langle v_i, v_j\rangle$ 具有下面性质：

(1) $d\langle v_i, v_j\rangle \geqslant 0$. 当 $v_i = v_j$ 时，等号成立.

(2) 满足三角不等式，即对任意 3 个顶点 v_i, v_j, v_k，有

$$d\langle v_i, v_j\rangle + d\langle v_j, v_k\rangle \geqslant d\langle v_i, v_k\rangle.$$

定义 7.2-5　一个有向图，如果忽略其边的方向后得到的无向图是连通的，则称此有向图为**连通图**；否则称为**非连通图**.

对于有向连通图，我们进一步将其分为三类：

定义 7.2-6　一个有向连通图 G，如果其任何两顶点间均是相互可达的，则称图 G 是**强连通**的；如果其任何两顶点间至少存在一个方向是可达的，则称图 G 是**单向连通**的；如果忽略边的方向后其无向图是连通的，则称图 G 是**弱连通**的.

在图 7-15 中，(1) 为强连通图；(2) 为单向连通图；(3) 为弱连通图.

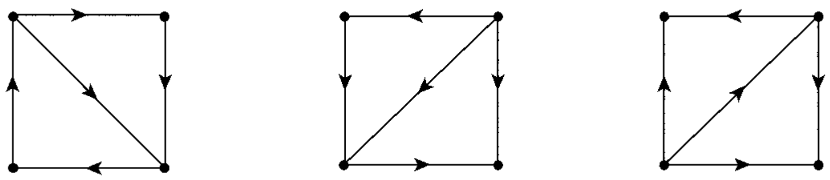


图 7-15

很显然，在有向连通图中强连通图是单向连通的，也是弱连通的. 同样的，一个单向连通图也必定是弱连通的. 但反之则不然. 一个弱连通图不一定是单向连通图或强连通图. 同样，单向连通图也不一定是强连通图.

定理 7.2-4　一个有向图 D 是强连通的，当且仅当 D 中存在一条回路，它至少经过每个顶点一次.

证明　充分性. 如果 D 中存在一条回路 C，它经过 D 中的每个顶点至少一次，则 D 中的任意两个结点均在回路 C 上，所以，D 中的任意两个结点都是可达的，因而 D 是强连通的.

必要性. D 是强连通的，则 D 中的任意两个结点都是可达的. 不妨设 D 中的结点为 v_1，v_2，…，v_n. 因为 v_i 可达 v_{i+1}，$i=1,2,\cdots,n-1$，所以 v_i 到 v_{i+1} 存在通路，且 v_n 到 v_1 也存在通路. 让这些通路首尾相连，则得一回路，显然每个顶点在回路中至少出现一次.

推论　若有向图 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路，则 D 是单向连通的.

7.2.3　点割集与边割集

对于连通图，常常由于删除了图中的一些顶点或边，而影响了图的连通性.

定义 7.2-7　设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 为连通图，若有点集 $V_1\subset V$，使图 G 删除了 V_1 的所有顶点后，所得的子图是非连通图；而删除了 V_1 的任何真子集后，所得到的子图仍然是连通图，则称 V_1 是 G 的一个**点割集**. 若某一个顶点构成一个点割集，则称该顶点为**割点**.

定义 7.2-8　设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 为连通图，若有边集 $E_1\subset E$，使图 G 删除了 E_1 的所有边后得的子图是非连通图；而删除了 E_1 的任何真子集后，所得到的子图仍然是连通图，则称 E_1 是 G 的一个**边割集**. 若某一条边构成一个边割集，则称该边为**割边**（**或桥**）.

在图 7-16 中，$\{v_3,v_5\}$，$\{v_2\}$，$\{v_6\}$ 为点割集，$\{v_4,v_2\}$ 不是点割集，因为它的真子集 $\{v_2\}$ 已经是点割集了，类似地，$\{v_1,v_6\}$ 也不是点割集.

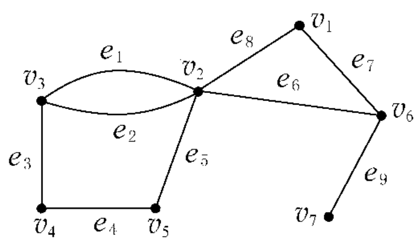


图 7-16

$\{e_3,e_4\}$，$\{e_4,e_5\}$，$\{e_1,e_2,e_3\}$，$\{e_1,e_2,e_4\}$，$\{e_9\}$ 等都是边割集，其中 e_9 是桥. $\{e_6,e_7,e_9\}$ 不是割集，因为它的真子集 $\{e_9\}$ 已是边割集. 类似地，$\{e_6,e_8,e_1,e_2,e_5\}$ 也不是边割集. 以后常称边割集为割集.

7.3　图的矩阵表示

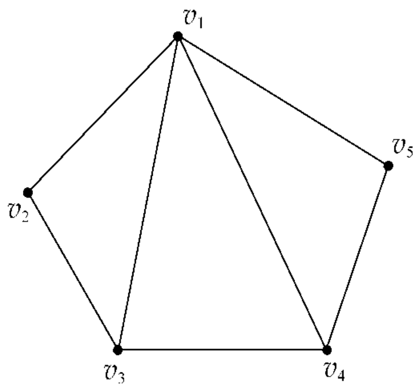
图除了用图形表示外，还可以用矩阵表示. 图的矩阵表示架起了图论与矩阵之间的桥梁，它一方面使我们可以借助于矩阵的理论和分析方法来研究图论中的问题，特别它将图的一些问题转化为矩阵运算的问题，更适合于计算机进行处理. 顺便指出，由于矩阵的行列有固定的顺序，因此在用矩阵表示图之前，必须将图的结点和边(如果需要) 进行编号. 在本节主要讨论无向图、有向图的邻接矩阵，有向图的可达矩阵，图的关联矩阵. 有关矩阵的基本知识可以参考相关书籍.

7.3.1　邻接矩阵

定义 7.3-1　设 $G=\langle V,E\rangle$ 为简单图，它有 n 个结点 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 n 阶方阵 $A(G)=(a_{ij})$ 称为 G 的**邻接矩阵**，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, v_i \text{ 邻接 } v_j\\ 0, v_i \text{ 不邻接 } v_j \text{ 或 } i=j\end{cases}.$$

例如，图 7-17 (1) 无向图的邻接矩阵为 $A(G_a)$，图 7-17(2) 有向图的邻接矩阵为 $A(G_b)$.



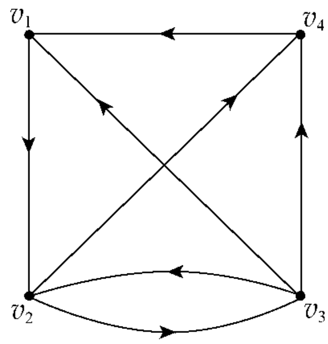


图 7-17

$$A(G_a)=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array},\qquad A(G_b)=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}v_1&v_2&v_3&v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

一个图的邻接矩阵完整地刻画了图中各顶点间的邻接关系. 不仅如此，还可由邻接矩阵很容易地辨认出其对应图的一些特征.

当给定的简单图是无向图时，邻接矩阵为对称的，当给定图是有向图时，邻接矩阵不一定对称.

邻接矩阵显然与结点标定的次序有关，例如，图 7-17 的邻接矩阵显然与 n 个顶点的标定次序$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 有关. 如果将图 7-17(2) 中的结点 v_1 和 v_2 的次序对调，那么新的邻接矩

阵由原来的邻接矩阵的第一行和第二行对调，第一列和第二列对调而得到.

如果给定的图是零图，则其对应的矩阵中所有的元素都为零，它是一个零矩阵，反之亦然，即邻接矩阵为零矩阵的图必是零图. 一个矩阵的元素除对角线元素为 0 外全为 1，则其对应的图为完全图. 如下列矩阵中矩阵 A 为零图，而矩阵 B 为完全图.

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

我们还可以通过对矩阵元素的运算得到对应图的某些性质.

设有向图 $G=\langle V,E\rangle$，其邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

(1) 有关的结论如下：

第 i 行的元素是由结点 v_i 出发的边所决定的，第 i 行第 j 列为 1 的元素，表示了在 v_i 和 v_j 之间有边相连，即存在边 $\langle v_i,v_j\rangle$；

第 i 行中值为 1 的元素的数目等于从 v_i 出发的出度，即 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^{(1)}=d^{+}(v_i)$；

第 j 列中值为 1 的元素的数目等于从 v_j 进入的入度，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^{(1)}=d^{-}(v_j)$.

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^{(1)}=\sum\limits_{i=1}^{n}d^{+}(v_i)=2m,m=|E|$，所有元素之和为 D 中边的总数的 2 倍，也可看成 D 中长度为 1 的通路总数的 2 倍.

(2) 令 $B=A^2$，则有

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\times a_{kj}),$$

其中 b_{ij} 表示从 v_i 到 v_j 长度为 2 的通路数目. 若 b_{ij} 等于 0，则表示从 v_i 到 v_j 没有长度为 2 的通路. b_{ii} 给出了经过 v_i 的长度为 2 的回路数目.

(3) 令 $C=A^l$，则此时 c_{ij} 表示从 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数目. 若 c_{ij} 等于 0，则表示从 v_i 到 v_j 没有长度为 l 的通路. c_{ii} 给出了经过 v_i 的长度为 l 的回路数目.

(4) 设 $B_r=A+A^2+\cdots+A^r(r\geqslant 1)$，则 B_r 中元素 $b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度小于等于 r 的通路总数，$\sum\limits_{ij}b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的通路总数，其中 $\sum\limits_{i}b_{ii}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的回路总数.

例 7.6　给定一图 $G=\langle V,E\rangle$，如图 7-18 所示，求 A,A^2,A^3 和 A^4.

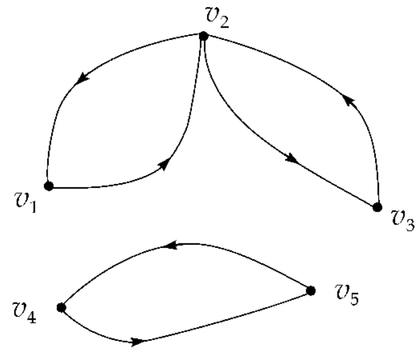


图 7-18

解

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},A^2=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&2&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},A^4=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&4&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

从上面的矩阵中我们可以看到一些结论，如 v_1 与 v_2 之间有两条长度为 3 的通路，结点 v_1 与 v_3 之间有一条长度为 2 的通路，在结点 v_2 有四条长度为 4 的回路.

在许多问题中需要判断有向图的一个结点 v_i 到另一个结点 v_j 是否存在通路的问题. 如果利用图 G 的邻接矩阵 A，则可计算 $A,A^2,A^3,\cdots,A^n,\cdots$，当发现其中的某个 A^l 的 $a_{ij}^{(l)}\geqslant 1$，就表明结点 v_i 到 v_j 可达. 但这种计算比较繁琐，且 A^l 不知计算到何时为止. 从前面我们得知，如果有向图 G 有 n 个结点：

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},$$

v_i 到 v_j 有一条路，则必有一条长度不超过 n 的通路，因此只要考察 $a_{ij}^{(l)}$ 就可以了，其中 $1\leqslant l\leqslant n$. 对于有向图 G 中任意两个结点之间的可达性，亦可用可达矩阵.

7.3.2　可达矩阵

定义 7.3-2　令 $G=\langle V,E\rangle$ 是一个简单有向图，$|V|=n$，假定 G 的结点已编序，即 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，定义一个 $n\times n$ 矩阵 $P(p_{ij})$. 其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 至少存在一条路}\\0, & \text{从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 不存在路}\end{cases},$$

称矩阵 P 是图 G 的**可达矩阵**.

可达矩阵表明了图中任意两个结点间是否至少存在一条路以及在任何结点上是否存在回路.

一般地讲可由图 G 的邻接矩阵 A 得到可达矩阵 P. 即令 $B_n=A+A^2+\cdots+A^n$，在 B_n

中将不为 0 的元素改为 1，而为零的元素不变，这样改换的矩阵即为可达矩阵 P.

例 7.7 设图 G 的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

求 G 的可达矩阵.

解

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix},\quad A^4=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&2&2&3\\3&3&2&3\\2&1&0&1\end{bmatrix},$$

故
$$B_4=A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}3&4&2&3\\5&5&4&6\\7&7&4&7\\3&2&1&2\end{bmatrix},$$

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

由此可知图 G 中任意两个结点间均是可达的，并且任意一个结点均有回路，此图是连通图.

上述计算可达矩阵的方法还是比较复杂，因为可达矩阵是一个元素为 0 或 1 的布尔矩阵，由于在每个 A^l 中，对于两个结点间的路的数目不感兴趣，它所关心的是这两个结点间是否有路存在，因此我们可将矩阵 $A,A^2,\cdots,A^n$ 分别改为布尔矩阵 $A,A^{(2)},\cdots,A^{(n)}$，故

$$P=A\vee A^{(2)}\vee\cdots\vee A^{(n)},$$

其中 $A^{(i)}$ 表示在布尔运算下 A 的 i 次方.

例 7.8 求图 7-19 所示的可达矩阵 P.

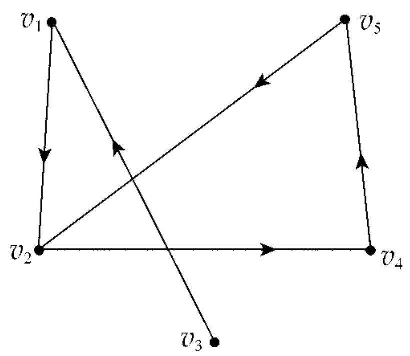


图 7-19

解

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

同理可得

$$A^4=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},\quad A^5=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

$$P=A\vee A^2\vee A^3\vee A^4\vee A^5=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\\1&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}.$$

上述可达性矩阵的概念可以推广到无向图中，只要将无向图的每一条边看成是具有相反方向的两条边，这样，一个无向图就可以看成是有向图. 无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵，其可达矩阵称为连通矩阵.

7.3.3　完全关联矩阵

对于一个无向图 G，除了可用邻接矩阵以外，还对应着一个称为图 G 的完全关联矩阵，假定图 G 无自回路，如因某种运算得到自回路，则将它删去.

定义 7.3-3　给定无向图 G，令 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 和 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 分别记为 G 的结点和边，则矩阵 $M(G)=(m_{ij})$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & 若\ v_i\ 关联\ e_j\\0, & 若\ v_i\ 不关联\ e_j\end{cases},$$

称 $M(G)$ 为**完全关联矩阵**.

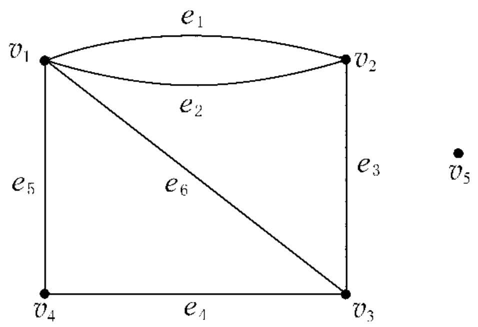


图 7-20

例如，对于图 7-20，可写出完全关联矩阵：

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

从关联矩阵中可以看出图形的一些性质：

(1)$M(G)$ 的每一列只有两个 1，这反映出图中每条边关联两个结点；

(2) 每一行元素的和数对应于该结点的度数；

(3) 一行中的元素全为 0，表示其对应的结点为孤立点；

(4) 两个平行边其对应的两列相同；

(5) 同一图当结点或边的编序不同，其对应的 $M(G)$ 仅有行序、列序的差别.

当一个图是有向图时，亦可用结点和边的关联矩阵来表示.

定义 7.3-4　给定简单有向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，$n\times m$ 阶矩阵 $M(G)=(m_{ij})$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{在 } G \text{ 中 } v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的起点} \\ -1, & \text{在 } G \text{ 中 } v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点,} \\ 0, & \text{在 } G \text{ 中 } v_i \text{ 不关联 } e_j\end{cases}$$

称 $M(G)$ 为 G 的**完全关联矩阵**.

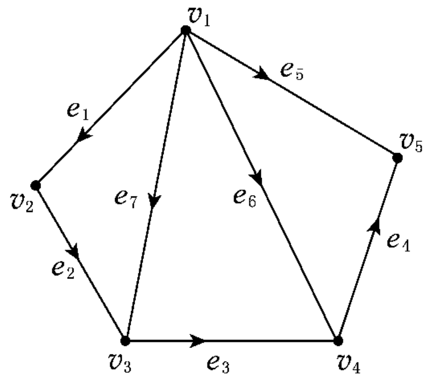


图 7-21

例如，由图 7-21 可写出其关联矩阵：

$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}.$$

有向图的完全关联矩阵也有类似于无向图的一些性质. 不难由图 7-21 的关联矩阵 $M(G)$ 看出如下性质：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{ij}=0, j=1,2,\cdots,m$，该式说明 $M(G)$ 中每列的元素之和为 0，即每条边都有一个始点和一个终点，从而 $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} m_{ij}=0$（$M(G)$ 中所有元素的代数和为 0）；

(2) $\sum\limits_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^{+}(v_i)$，该式说明第 i 行为 1 的元素个数为 v_i 的出度；

(3) $\sum\limits_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=-d^{-}(v_i)$，该式说明第 i 行为 -1 的元素个数为 v_i 的入度；

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=\sum\limits_{i=1}^{n} d^{+}(v_i)=m=\sum\limits_{i=1}^{n} d^{-}(v_i)=-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)$，即所有 1 的个数和所有 -1 的个数相同，均为边的数目 m.

例 7.9　求图 7-22 的关联矩阵.

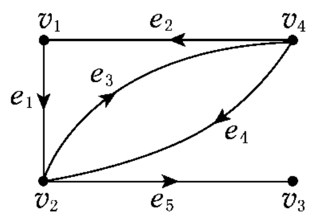


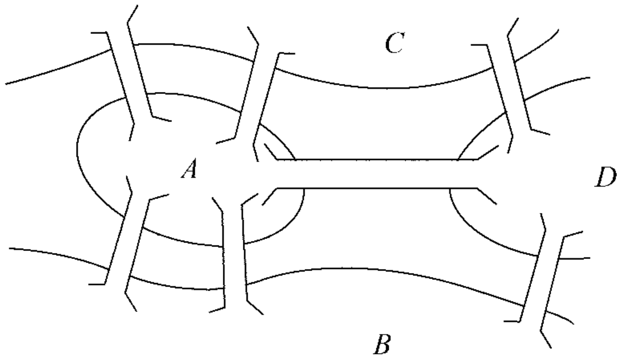
图 7-22

解

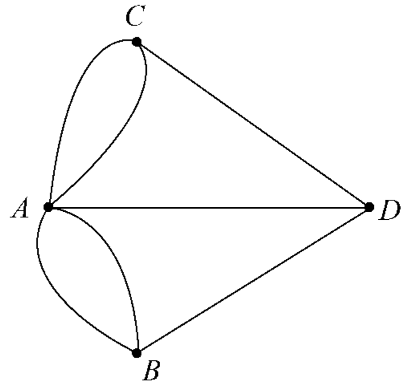
$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}.$$

7.4　欧拉(Euler)图

1736 年，瑞士数学家欧拉(Euler) 发表了图论的第一篇论文“哥尼斯堡七桥问题”. 在当时的哥尼斯堡城有一条横贯全市的普雷格尔河，河中的两个岛与两岸用七座桥联结起来，如图7-23 (1) 所示. 当时那里的居民热衷于一个难题：游人怎样不重复地走遍七桥，最后回到出发点.



(1)



(2)

图 7-23

为了解决这个问题，欧拉用 A、B、C、D 四个字母代替陆地，作为 4 个结点，将联结两块陆地的桥用相应的线段表示，于是哥尼斯堡七桥问题就变成了图 7-23（2）中，是否存在经过每条边一次且仅一次，经过所有的结点的回路问题了.欧拉在论文中指出，这样的回路是不存在的.并由此引出欧拉通路和欧拉回路等概念.

定义 7.4-1 给定无孤立点图 G，若存在一条路，经过图中每边一次且仅一次，该条路称为**欧拉通路**（欧拉迹）；若存在一条回路，经过图中的每边一次且仅一次，该回路称为**欧拉回路**（欧拉闭迹）.

具有欧拉回路的图称为**欧拉图**.

具有欧拉通路的图不能称为欧拉图，我们可以称为**半欧拉图**.

定理 7.4-1 无向图 G 具有一条欧拉路，当且仅当 G 是连通的，且有零个或两个奇数度结点.

证明 必要性.设 G 具有欧拉路，即有点边序列 $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_iv_ie_{i+1}\cdots e_kv_k$，其中结点可能重复出现，但边不重复，因为欧拉路经过图 G 中每一个结点，故图 G 必是连通的.

对任意一个不是端点的结点 v_i，在一个欧拉路中每当 v_i 出现一次，必关联两条边，故虽然 v_i 可重复出现，但 $d(v_i)$ 必是偶数.对于端点，若 $v_0=v_k$，则 $d(v_0)$ 为偶数，即 G 中无奇数度结点，若端点 v_0 与 v_k 不同，则 $d(v_0)$ 为奇数，$d(v_k)$ 为奇数，G 中就有两个奇数度结点.

充分性.若图 G 连通，有零个或两个奇数度结点，我们构造一条欧拉路如下：

（1）若有两个奇数度结点，则从其中的一个结点开始构造一条简单通路，即从 v_0 出发关联 e_1"进入"v_1，若 $d(v_1)$ 为偶数，则必由 v_1 再经过 e_2 进入 v_2，如此进行下去，每次仅取一次.由于 G 是连通的，故必可到达另一奇数度结点停下，得到一条简单通路 L_1：$v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_iv_ie_{i+1}\cdots e_kv_k$.若 G 中没有奇数度结点，则从任一结点 v_0 出发，用上述的方法必可回到结点 v_0，得到上述一条简单回路 L_1.

（2）若 L_1 通过了 G 的所有边，则 L_1 就是欧拉路.

（3）若 G 中去掉 L_1 后得到子图 G'，则 G' 中每一点的度数为偶数，因原图是连通的，故 L_1 与 G' 至少有一个结点 v_i 重合，在 G' 中由 v_i 出发重复（1）的方法，得到简单回路 L_2.

（4）当 L_1 与 L_2 组合在一起，如果恰是 G，即得欧拉路，否则重复（3）可得简单回路 L_3，以此类推直到得到一条经过图 G 中所有边的欧拉路.

推论 无向图 G 具有一条欧拉回路，当且仅当 G 是连通的，并且所有结点度数为偶数.

由于有了欧拉路和欧拉回路的判别准则，因此哥尼斯堡七桥问题立即有了确切的答案，

因为有四个结点的度数皆为奇数，故欧拉路必不存在.

与七桥问题类似的还有一笔画的判别问题，要判定一个图 G 是否可一笔画出，有两种情况：一种情况是从图 G 中某一结点出发，经过图 G 的每一边一次且仅一次到达另一结点；另一种情况就是从 G 的某个结点出发，经过 G 的每一边一次且仅一次回到该结点. 上述两种情况可以由欧拉通路和欧拉回路的判定条件给予解决.

如图 7-24（1）所示的图存在欧拉通路，而图 7-24（2）所示的图存在着欧拉回路.

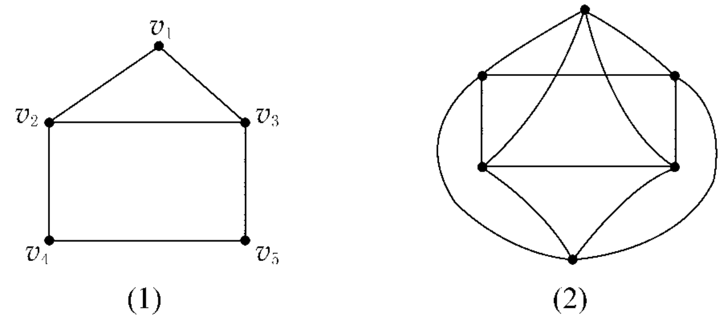


图 7-24　欧拉路和欧拉回路

例 7.10　图 7-25 中各图能否一笔画成？

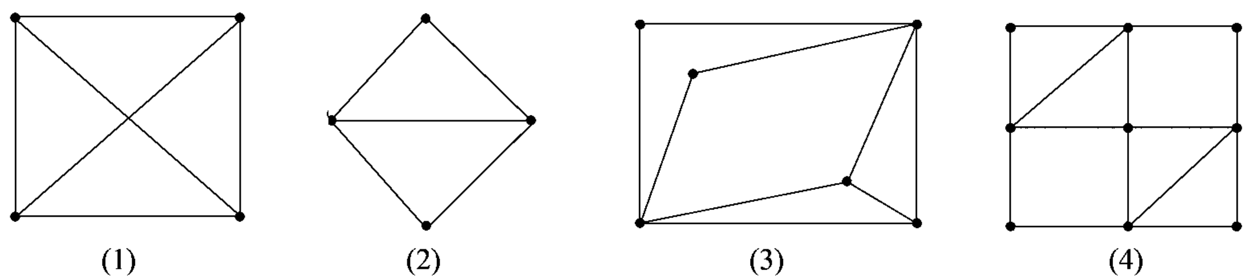


图 7-25

解　（1）有 4 个奇度结点，无欧拉回路或通路，不能一笔画成.

（2）与（3）都是 2 个奇度结点，其余均为偶度结点，具有欧拉通路，可一笔画成.

（4）图中均为偶度结点，具有欧拉回路，可一笔画成.

例 7.11　“两只蚂蚁比赛问题”. 两只蚂蚁甲、乙分别处在图 7-26 中的结点 a、b 处，并设图中各边长度相等. 甲提出同乙比赛：从它们所在结点出发，走过图中所有边最后到达结点 c 处. 如果它们速度相同，问谁最先到达目的地？

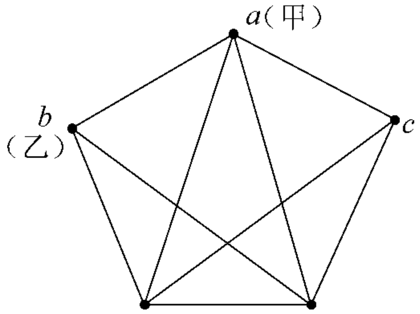


图 7-26

解　图 7-26 中，有两个奇度结点 b、c，因此存在从 b 到 c 的欧拉通路，蚂蚁乙走到 c 只要

走一条欧拉通路，边数为 9，而蚂蚁甲要想走完图中所有边到达 c，至少要先走一条边到达 b，再走一条欧拉通路，故它至少要走 10 条边才能到达 c，所以乙必胜.

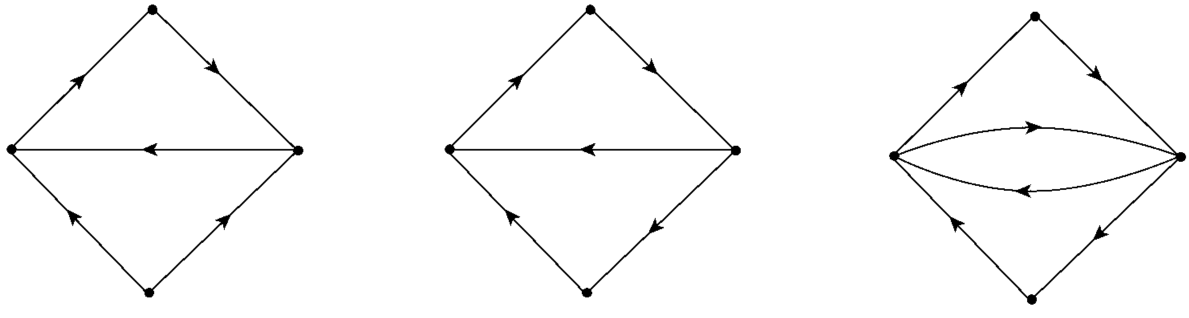
欧拉路和欧拉回路的概念，很容易推广到有向图上去.

定义 7.4-2　给定有向图 G，通过每边一次且仅一次的一条单向路(回路)，称作**单向欧拉路(回路)**.

定理 7.4-2　有向图 G 具有一条单向欧拉回路，当且仅当是连通的，且每个结点的入度等于出度. 一个有向图 G 具有单向欧拉路，当且仅当是连通的，而且除两个结点外，每个结点的入度等于出度，但这两个结点中，一个结点的入度比出度大 1. 另一个结点的入度比出度小 1.

这个定理的证明可以看作是无向图的欧拉路的推广，因为对于有向图的任意一个结点来说，如果入度与出度相等，则该结点的总度数为偶数，若入度和出度之差为 1 时，其总度数为奇数. 因此定理的证明与定理 7.4-1 相似.

例 7.12　判断图 7-27 是否为欧拉图.



(1)　　(2)　　(3)

图 7-27

解　由定理 7.4-2 可得(1) 不是欧拉图，也无欧拉通路. (2) 不是欧拉图，但有欧拉通路. (3) 是欧拉图，也就是有欧拉回路.

例 7.13　计算机鼓轮设计. 设有旋转鼓轮其表面等分成 2^4 个部分，如图 7-28 所示，其中每一部分分别由绝缘体或导体组成. 绝缘体部分给出的信号为 0，导体部分给出的信号为 1，在图 7-28 中所示的阴影部分为导体，空白部分表示绝缘体，根据图中鼓轮的位置，触点得到的信号为 1101，如果将鼓轮顺时针方向转一个部分，触点将有信号 1010. 问鼓轮上的 16 个绝缘体和导体怎样安排，才能使鼓轮每旋转一个部分，四个触点能得到一组不同的四位二进制码.

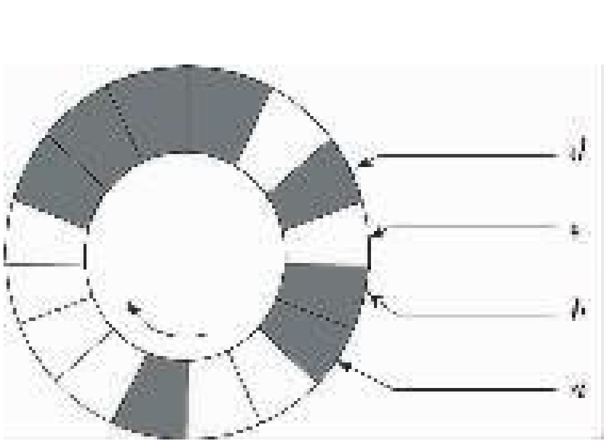


图 7-28

设八个结点的有向图，如图 7-29 所示，其结点分别记为三位二进制码{000,001,010,011,100,101,110,111}，设 $\alpha_i \in \{0,1\}$，从结点 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 可引出两条有向边 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 0$ 和 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 1$. 按照上述的方法，对于八个结点的有向图共有 16 条边，在这种图的任一条路中，其邻接的边必是 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 和 $\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 的形式，即第一条边标号的后三位与第二条边标号的头三位相同. 因为图中的 16 条边被记成不同的二进制数，可见前述鼓轮转动所得的 16 个不同的位置触点的二进制码，即对应着图中的一条欧拉回路. 图 7-29 每个结点的入度为 2，出度也为 2，图中的欧拉回路是{0000,0001,0010,0100,1001,0011,0110,1101,1010,0101,1011,0111,1111,1110,1100,1000}. 根据相邻边的记法 16 个二进制数可写成对应的 0-1 码 0000100110101111. 将它安排成环状，即是所求的鼓轮，如图 7-28 所示.

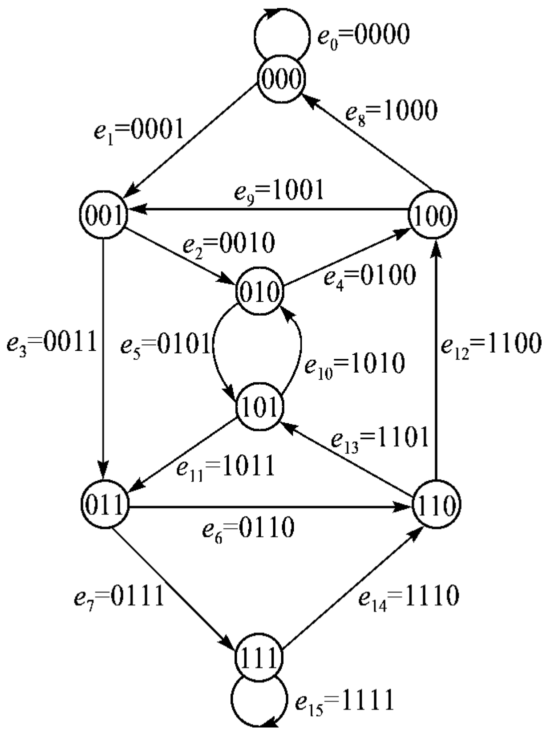


图 7-29

上述的例子可以推广到有 n 个触点的鼓轮.

7.5 哈密尔顿(Hamilton)图

与欧拉回路非常类似的问题是哈密尔顿回路问题. 1859 年威廉・哈密尔顿爵士在给他的朋友的一封信中，首先谈到关于十二面体的一个数学游戏，能不能在图 7-30 中找到一条回路，使它含有这个图的所有结点？他把结点看作是一座城市，联结两个结点的边看成是交通线，于是它的问题是能不能找到旅行路线，沿着交通线经过每一个城市恰好一次，再回到原来的出发地？他把这个问题称为周游世界问题.

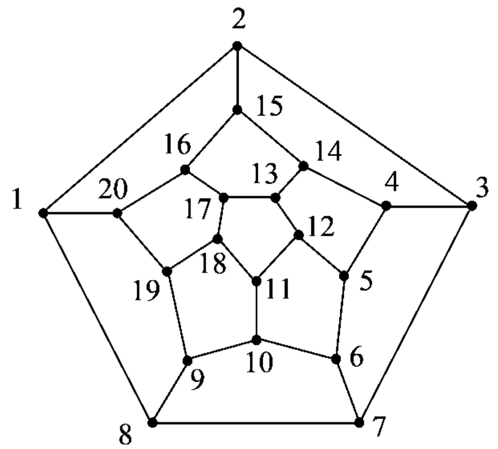


图 7-30

定义 7.5-1 给定图 G，若存在一条路经过图中的每一个结点恰好一次，这条路称作**哈密尔顿路**. 若存在一条回路，经过图中的每一个结点恰好一次，这个回路称作**哈密尔顿回路**. 具有哈密尔顿回路的图称为**哈密尔顿图**.

定理 7.5-1 若图 $G=\langle V,E\rangle$ 具有哈密尔顿回路，则对于结点集 V 的每一个非空子集 S 均有 $W(G-S)\leqslant|S|$ 成立. 其中 $W(G-S)$ 是 $G-S$ 中连通分支数.

证明 设 C 是 G 的一条哈密尔顿回路，则对于 V 的任何一个非空子集 S 在 C 中删去 S 中任一结点 a_1，则 $C-a_1$ 是连通非回路，若删去 S 中的另一个结点 a_2，则 $W(C-a_1-a_2)\leqslant 2$，由归纳法得知

$$W(C-S)\leqslant|S|,$$

同时 $C-S$ 是 $G-S$ 的一个生成子图，因而

$$W(G-S)\leqslant W(C-S),$$

所以

$$W(G-S)\leqslant|S|.$$

利用定理 7.5-1 可以证明某些图是非哈密尔顿图. 如图 7-31(1) 中取 $S=\{v_1,v_4\}$，则 $G-S$ 中有三个分图，故 G 不是哈密尔顿图.

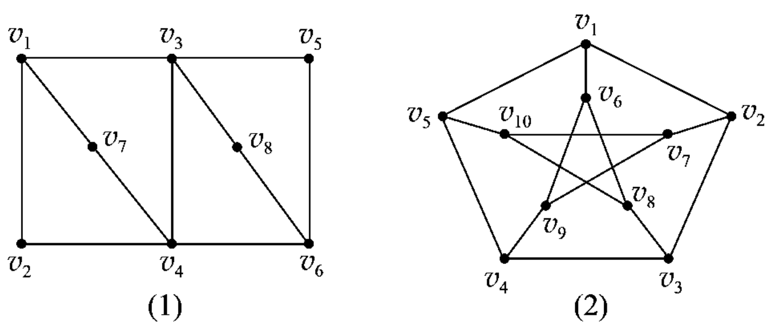


图 7-31

这个方法并不是总是有效的. 例如，著名的彼得森(Peterson) 图，如图 7-31(2) 所示，在图中删去任一个结点或任意两个结点，不能使它不连通；删去三个结点，最多只能得到有两个连通分支的子图；删去四个结点，最多只能得到有三个连通分支的子图；删去五个或五个以上的结点，余下的结点数都不大于 5，故必不能有 5 个以上的连通分支数. 所以该图满足 $W(C-S)\leqslant|S|$，但是可以证明它非哈密尔顿图.

虽然哈密尔顿回路问题和欧拉回路问题在形式上极为相似，但对图 G 是否存在哈密尔顿回路还无充要的判别准则. 下面我们给出一个无向图具有哈密尔顿路的充分条件.

定理 7.5-2　设 G 是具有 n 个结点的简单图，如果 G 中每一对结点的度数之和大于等于 $n-1$，则在 G 中存在一条哈密尔顿路.

证明　我们首先证明 G 是连通的. 若 G 有两个或更多互不连通的分图，设一个分图有 n_1 个结点，任取一个结点 v_1，设另一个分图有 n_2 个结点，任取一个结点 v_2，因为 $d(v_1) \leqslant n_1 - 1$，$d(v_2) \leqslant n_2 - 1$，故 $d(v_1) + d(v_2) \leqslant n_1 + n_2 - 2 < n - 1$，这表明与题设矛盾，故 G 必连通.

其次，我们从一条边出发构成一条路，证明它是哈密尔顿路.

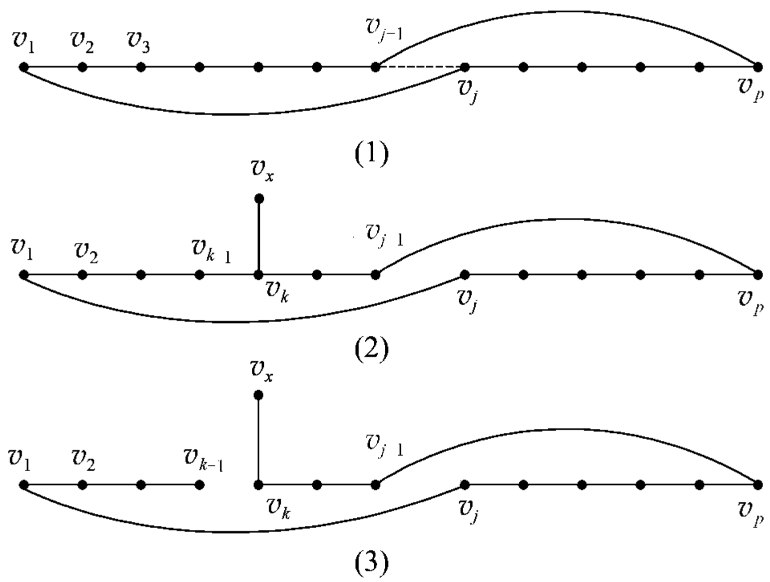


图 7-32

设在 G 中有 $p-1$ 条边的路，$p < n$，它的结点序列为 $v_1, v_2, \cdots, v_p$. 如果有 v_1 或 v_p 邻接于不在这条路上的一个结点，我们可立即扩展这条路，使它包含这一个结点，从而得到 p 条边的路. 否则，v_1 和 v_p 都只能邻接于这条路上的结点，我们证明在这种情况下，存在一条回路包含结点 $v_1, v_2, \cdots, v_p$. 若 v_1 邻接于 v_p，则 $v_1, v_2, \cdots, v_p, v_1$ 即为所求的回路. 假设与 v_1 邻接的结点集是 $\overbrace{\{v_l, v_m, \cdots, v_j, \cdots, v_t\}}^{k}$，这里 $2 \leqslant l, m, \cdots, t \leqslant p-1$，如果是邻接于 $v_{l-1}, v_{m-1}, \cdots, v_{j-1}, \cdots, v_{t-1}$ 中之一，譬如说 v_{j-1}，如图 7-32（1）所示，$v_1 v_2 v_3 \cdots v_{j-1} v_p v_{p-1} \cdots v_j v_1$ 是所求的包含结点的回路 $v_1, v_2, \cdots, v_p$.

如果 v_p 不邻接于 $v_{l-1}, v_{m-1}, \cdots, v_{j-1}, \cdots, v_{t-1}$ 中任一个，则 v_p 至少邻接于 $p-k-1$ 个结点，$d(v_p) \leqslant p-k-1$，$d(v_1) \leqslant k$，故 $d(v_p) + d(v_1) \leqslant p-k-1+k = p-1 < n-1$，即 v_1 与 v_p 度数之和至多为 $n-2$，得到矛盾.

至此，我们有包含所有结点 $v_1, v_2, \cdots, v_p$ 的一条回路，因为 G 是连通的，所以在 G 中必有一个不属于该回路的结点 v_x 与 $v_1, v_2, \cdots, v_p$ 中的每一个结点 v_k 邻接，如图 7-32（2）所示，于是就得到一条包括 p 条边的路（$v_x, v_k, v_{k+1}, v_{j-1}, v_p, v_{p-1}, v_j, v_1, v_2, v_{k-1}$）. 如图 7-32(3) 所示，重复前述的构造方法，直到得到 $n-1$ 条边的路.

容易看出，定理 7.5-2 的条件是图中的哈密尔顿路的存在的充分条件，但是并不是必要的条件. 设图是 n 边形，如图 7-33 所示，其中 $n=6$，虽然任何两个结点度数之和是 $4 < 6-1$，但在 G 中有一条哈密尔顿路.

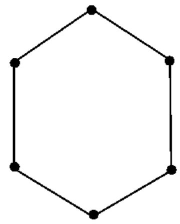


图 7-33

例 7.14　考虑在七天内安排七门功课的考试，使得同一位教师所任的两门课程考试不安排在连续的两天里，试证如果没有教师担任多于四门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的.

证明　设 G 为七个结点的图，每一个结点对应一门功课的考试，如果这两个结点对应的课程的考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，因为每个教师所任的课程不超过 4，故每个结点的度数至少是 3，任两个结点度数的和至少是 6，故 G 总包含一条哈密尔顿路，它对应于一个七门考试科目的一个适当安排.

定理 7.5-3　设图 G 是具有 n 个结点的简单图，如果 G 中每一对结点的度数大于等于 n，则在 G 中存在一条哈密尔顿回路.

证明　由定理 7.5-2 可知必有一条哈密尔顿路，设为 $v_1v_2\cdots v_n$，如果 v_1 与 v_n 邻接，则定理得证.

如果 v_1 与 v_n 不邻接，假设 v_1 邻接 $\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_j}\}$，$2\leqslant i_j\leqslant n-1$，可以证明 v_n 必邻接于 $v_{i_1-1},v_{i_2-1},\cdots,v_{i_k-1}$ 中之一. 如果不邻接于 $v_{i_1-1},v_{i_2-1},\cdots,v_{i_k-1}$ 中的任意一点，则 v_n 至多邻接于 $n-k-1$ 个结点，因而 $d(v_n)\leqslant n-k-1$，而 $d(v_1)=k$，故 $d(v_1)+d(v_n)\leqslant n-k-1+k=n-1$，与题设矛盾，所以必有哈密尔顿回路 $v_1v_2\cdots v_{j-1}v_nv_{n-1}\cdots v_iv_1$，如图 7-34 所示.

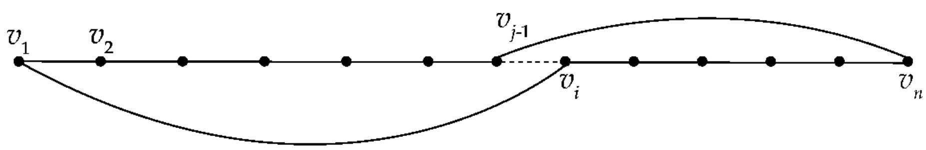


图 7-34

定义 7.5-2　给定图 $G=\langle V,E\rangle$ 有 n 个结点，若将图 G 中度数之和至少是 n 的非邻接结点连接起来得到图 G'，对图 G' 重复上述步骤，直到不再有这样的结点为止，所得的图称为原图 G 的**闭包**，记作 $C(G)$.

如图 7-35 给出了六个结点的一个图，构造它的闭包过程. 在这个例子中 $C(G)$ 是一个完全图. 一般情况下，$C(G)$ 也可能不是一个完全图.

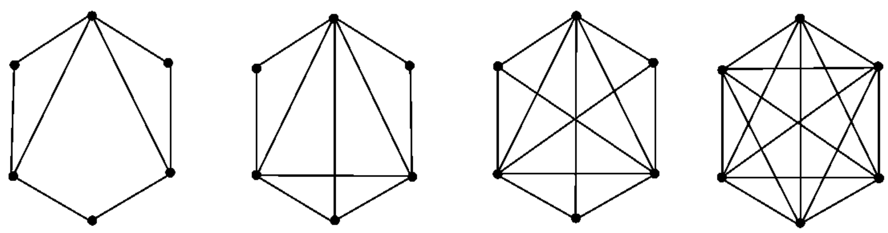


图 7-35

定理 7.5-4 当且仅当一个简单图的闭包是哈密尔顿图时，这个简单图是哈密尔顿图.

由以上的定理可知，至今遗憾的是尚未找到一个判别哈密尔顿回路和通路的充分必要条件. 虽然有些充分非必要，或必要非充分的条件，但在大部分情况下，还是采用尝试的办法.

例 7.15 判断图 7-36 是否具有哈密尔顿回路、通路.

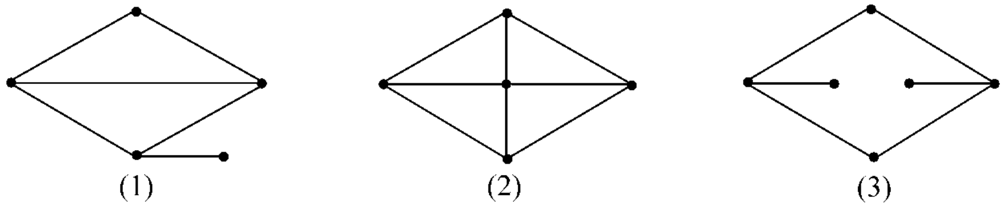


图 7-36

解 (1) 存在哈密尔顿通路，但不存在哈密尔顿回路.

(2) 是哈密尔顿图，存在哈密尔顿回路和通路.

(3) 不存在哈密尔顿回路，也不存在哈密尔顿通路.

例 7.16 画一个无向图，使它

(1) 具有欧拉回路和哈密尔顿回路；

(2) 具有欧拉回路而没有哈密尔顿回路；

(3) 具有哈密尔顿回路而没有欧拉回路；

(4) 既没有欧拉回路，也没有哈密尔顿回路.

解 所求的图分别如图 7-37 所示.

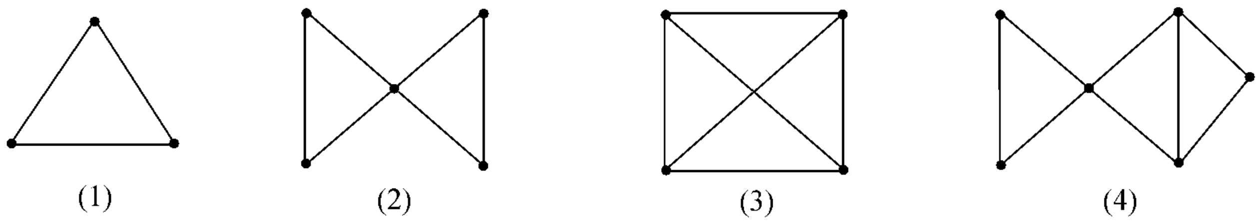


图 7-37

7.6 二部图

二部图是一类十分重要的数学模型，有着许多应用，很多实际问题都可以使用二部图来解决，如资源分配、任务派遣、择偶等. 本节讨论的图均为无向图.

定义 7.6-1 若能将无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 的结点集 V 划分成两个子集 V_1 和 V_2（$V_1 \cap V_2 = \varnothing$），使得 G 中任何一条边的两个端点一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为**二部图**（也称为**偶图**）. V_1、V_2 称为互补结点子集，此时可将 G 记成 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$.

若 V_1 中任一结点与 V_2 中每一个结点均有且仅有一条边相关联，则称二部图 G 为完全二部图（或完全偶图），若 $|V_1|=n$，$|V_2|=m$，则记完全二部图 G 为 $K_{n,m}$.

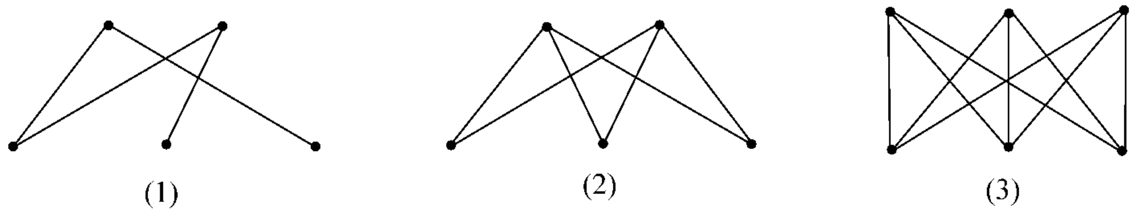


图 7-38

在图 7-38 中,(1)、(2)、(3) 都是二部图,其中(2)、(3) 分别是完全二部图 $K_{2,3}$ 和 $K_{3,3}$. $K_{3,3}$ 是重要的完全二部图,它与 K_5 一起在平面图的判断中起着重要的作用.

在完全二部图 $K_{r,s}$ 中,它的结点数 $n=r+s$,边数 $m=r\times s$.

给定一个图,判断它是否为二部图,有下面的定理.

定理 7.6-1　一个无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 是二部图当且仅当 G 中无奇数长度的回路.

证明　必要性. 已知 G 为二部图,要证明 G 中无奇数长度的回路,其实只要证明 G 中无奇数长度的初级回路.

若 G 中无回路(初级的或简单的),结论显然成立.

若 G 中有回路,设 C 为其中的一条初级回路,$C=v_{i1}v_{i2}\cdots v_{il}v_{i1}$,则 $l\geqslant 2$. 不妨设 $v_{i1}\in V_1$,$v_{il}\in V_2=V-V_1$,显然 l 为偶数,于是 C 是长度为偶数的初级回路.

充分性. 已知 G 中无奇数长度的回路,要证明 G 为二部图.

若 G 是零图,结论显然成立. 下面不妨设 G 是连通图. 设 v_0 为 G 中任一结点,令

$V_1=\{v\mid v\in V(G)\wedge d(v_0,v)$ 为偶数$\}$,$V_2=\{v\mid v\in V(G)\wedge d(v_0,v)$ 为奇数$\}$,则 $V_1\neq\varnothing$,$V_2\neq\varnothing$,且 $V_1\cap V_2=\varnothing$,$V_1\cup V_2=V$. 下面只要证明 V_1 中任意两结点不相邻,V_2 中任意两结点也不相邻. 若存在 $v_i,v_j\in V_1$,使得边 $e=(v_i,v_j)\in E$,设 v_0 到 v_i 和 v_j 的短程线分别为 P_1 和 P_2,则 P_1 和 P_2 的长度 $d(v_0,v_i)$ 与 $d(v_0,v_j)$ 均为偶数. 于是 $P_1\cup e\cup P_2$ 含 G 中奇数长的初级回路,这与已知矛盾,类似可证,V_2 中任意两结点也不相邻,所以,G 是二部图.

例 7.17　利用定理 7.6-1 判断图 7-39 各图是否是二部图.

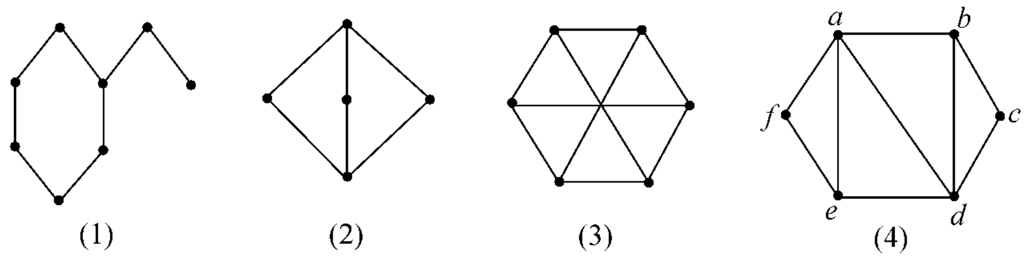


图 7-39

解　图 7-39 中 (1)、(2)、(3) 均无奇数长度的回路,所以,它们都是二部图,其中(2)、(3) 分别与图 7-38 中的(2)、(3) 同构,即 $K_{2,3}$ 和 $K_{3,3}$.

图(4) 不是二部图,因图中存在长为 3 的回路 $bcdb$.

7.7　平面图

在现实生活中,常常要画一些图形,希望边与边之间尽量减少相交的情况,例如,印刷线

路板的布线,交通道路的设计等.如无特殊声明,本节所说图 G 均指无向图.

7.7.1　平面图的概念

定义 7.7-1　一个图 G 如果能以这样的方式画在平面上:除顶点处外没有边交叉出现,则称 G 为**平面图**.画出的没有边交叉出现的图称为 G 的一个**平面嵌入**或 G 的一个**平图**.

在图 7-40 所示的图中,(2) 是(1)(K_4) 的平面嵌入,所以(1) 是平面图,当然单独看(2),它也是平面图.

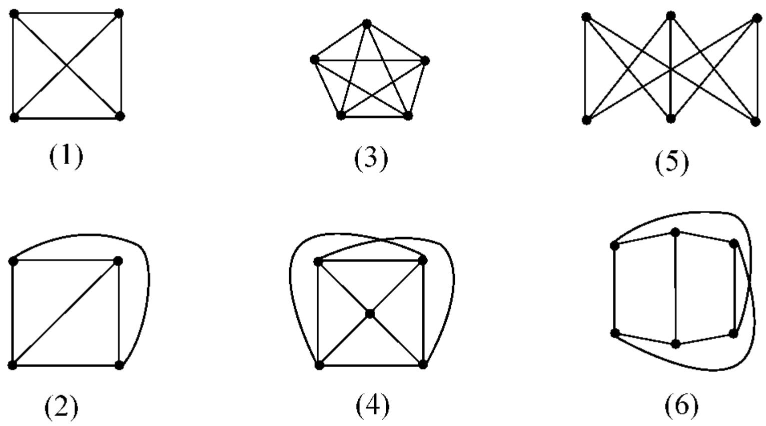


图 7-40

对于(3)(K_5) 无论怎样画法,也不能将边的交叉全去掉,(4) 是(3) 的边交叉最少(一个)的画法.

(6) 是(5)($K_{3,3}$) 的边的交叉最少的画法.

可以证明(3)、(5) 都不是平面图,即 K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图.

定义 7.7-2　设 G 是一个连通的平面图(指 G 的某个平面嵌入),G 的边将 G 所在的平面划分成若干个区域,每个区域称为 G 的一个**面**,记成 R.其中面积无限的区域称为**无限面**或**外部面**,常记成 R_0,面积有限的区域称为**有限面**或**内部面**,包围每个面的所有边所构成的回路(可能是初级回路或简单回路,也可能是复杂回路.)称为该面的**边界**,边界的长度称为该面的**次数**,R 的次数记为 $d(R)$.

对于非连通的平面图 G 可以类似地定义它的面、边界及次数.设非连通的平面图 G 有 $k(k \geqslant 2)$ 个连通分支,则 G 的无限面 R_0 的边界由 k 个回路围成.

图 7-41(1) 所示为连通的平面图,共有 3 个面 R_0、R_1、R_2.

R_1 的边界为初级回路 $v_1v_3v_4v_1$,$d(R_1)=3$;

R_2 的边界为初级回路 $v_1v_2v_3v_1$,$d(R_2)=3$;

R_0 的边界为复杂回路 $v_1v_4v_5v_6v_5v_4v_3v_2v_1$,$d(R_0)=8$.

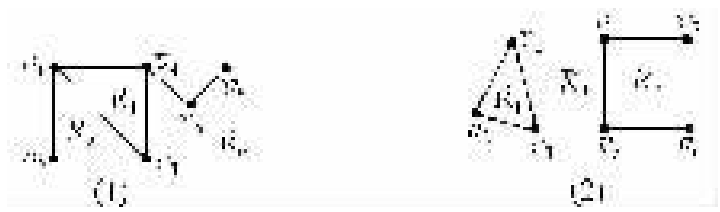


图 7-41

图 7-41(2) 所示为非连通的平面图，有两个连通分支. $d(R_1)=3$，$d(R_2)=4$，R_0 的边界由两个初级回路 $v_1v_2v_3v_1$ 和 $v_4v_5v_6v_7v_4$ 围成，$d(R_0)=7$. 无论是连通的还是非连通的平面图，各面次数之和均等于边数的两倍，有下面的定理.

定理 7.7-1 在一个平面图 G 中，所有面的次数之和都等于边数 m 的 2 倍，即

$$\sum_{i=1}^{r} d(R_i) = 2m,$$

其中，r 为面数.

本定理的证明是简单的. G 中每条边无论作为两个面的公共边界，还是作为一个面的边界，在计算总的次数时都计算两次，所以定理中的结论是显然的.

同一个平面图可以有不同形状的平面嵌入，但它们都是同构的. 另外，还可以将一个平面嵌入中的某个有限面变换成无限面，无限面变换成有限面，得到不同形状的另一个平面嵌入.

例如，在图 7-42 中，(2) 与(3) 都是(1) 的平面嵌入，它们都与(1) 同构，但形状不同，图(2) 中，$d(R_0)=3$；图(3) 中，$d(R_0)=4$.

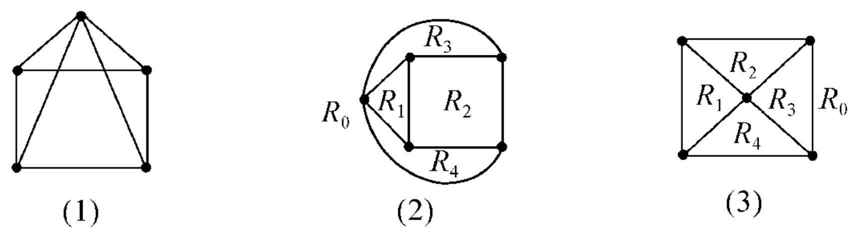


图 7-42

7.7.2 欧拉公式

平面图的重要性质是满足欧拉公式.

定理 7.7-2 设 G 为任意的连通的平面图，则有 $n-m+r=2$ 成立. 其中，n 为 G 中顶点数，m 为边数，r 为面数.

该定理中的公式称为欧拉公式.

可用多种方法证明此定理，下面给出一种证明.

证明 对边数 m 作归纳法.

(1)$m=0$ 时，G 为孤立点，此时 $n=1$，$r=1$，结论自然成立.

(2) 设 $m=k-1(\geqslant 1)$ 时结论成立，要证明 $m=k$ 时结论成立.

首先，若 G 为树(在下一节讲解)，任取一树叶 v 并删除它，得 $G'=G-v$，则 G' 是连通的，G' 中有 $n'=n-1$ 个顶点，$m'=m-1$ 条边，$r'=r$，由归纳假设有下式成立：

$$n'-m'+r'=2,$$

即

$$(n-1)-(m-1)+r=2,$$

整理后得

$$n-m+r=2.$$

其次，G 不是树，则 G 中必有初级回路. 设 C 为一初级回路，则 e 在 C 上. 令 $G'=G-e$，由于 e 在 C 上，所以，G' 仍连通，在 G' 中，$n'=n$，$m'=m-1$，$r'=r-1$，利用归纳假设有下式成立：

$$n'-m'+r'=2,$$

可得

$$n-m+r=2.$$

若 G 不是连通的平面图，则欧拉公式不成立，这时，n，m，r 之间的关系还与连通分支数 p 有关.

欧拉公式可以推广为：对于任意的 $p(p \geqslant 2)$ 个连通分支的平面图 G，有 $n-m+r=p+1$ 成立.

利用欧拉公式还可以证明以下定理：

定理 7.7-3　设 G 为连通的平面图，且每个面的次数至少为 $l(l \geqslant 3)$，则

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-2),$$

其中，n 为 G 中顶点数，m 为边数.

证明　由定理 7.7-1 及本定理中的条件可知：

$$2m = \sum_{i=1}^{r} d(R_i) \geqslant l \cdot r, \qquad ①$$

其中，r 为 G 的面数. 由于 G 是连通的平面图，因而满足欧拉公式 $n-m+r=2$. 从中解出 r 得

$$r = 2-n+m, \qquad ②$$

将 ② 代入 ①，经过整理，得

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-2).$$

推广：设 G 为 $p(p \geqslant 2)$ 个连通分支的平面图，且每个面的次数至少为 $l(l \geqslant 3)$，则

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-p-1).$$

利用定理 7.7-3 可证明 K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图.

K_5 的顶点数 $n=5$，边数 $m=10$. 若 K_5 是平面图，则每个面的次数至少为 3，由定理 7.7-3 可得 $10 \leqslant 3(5-2)=9$. 这是矛盾的，因而 K_5 不是平面图.

类似地，$K_{3,3}$ 的顶点数 $n=6$，边数 $m=9$. 若 $K_{3,3}$ 是平面图，则每个面的次数至少为 4，因而有 $9 \leqslant 2(6-2)=8$，这也是矛盾的，因而 $K_{3,3}$ 也不是平面图.

定理 7.7-4　设 G 为连通的简单平面图$(n \geqslant 3)$，则 $m \leqslant 3n-6$.

证明　设 G 为顶点数 $n \geqslant 3$ 的连通的简单平面图，G 的每个面有三条或更多条边围成，因此所有面的次数之和大于或等于 $3r$. 由定理 7.7-1 可知，所有面的次数之和等于边数 m 的两倍，则 $2m \geqslant 3r$. 所以，$r \leqslant 2m/3$.

代入欧拉公式 $n-m+r=2$，得 $2-n+m \leqslant 2m/3$，化简即得证 $m \leqslant 3n-6$.

定理 7.7-5　设 G 为连通的简单的平面图，则 G 中至少有一个顶点 v，有 $d(v) \leqslant 5$.

证明　反证法. 假设 G 中所有顶点的度数大于 5，由定理 7.7-4，$3n-6 \geqslant m$，得 $2(3n-6) \geqslant 2m = \sum d(v) \geqslant 6n$，这是不可能的.

因此，连通的简单平面图，至少有一个顶点 v，$d(v) \leqslant 5$.

7.7.3　平面图的判断

下面讨论平面图的判断问题.

在图 7-43 (1) 中，从左到右的变换称为消去 2 度顶点 w. 图 7-43(2) 中从左到右的变换称为插入 2 度顶点 w. 显然，在图 G 中消去和插入 2 度顶点都不会影响图 G 的平面性.

图 7-43

定义 7.7-3 如果两个图 G_1 和 G_2 同构，或经过反复插入或消去 2 度顶点后同构，则称 G_1 与 G_2 **同胚**.

图 7-44 中，(2) 是经过(1) 消去 2 度顶点 a、e，插入 2 度顶点 h、i 而得到的. 易知图(1)、(2) 两图同胚.

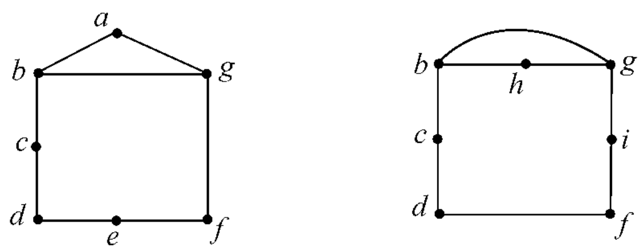


图 7-44

定义 7.7-4 图 G 中相邻顶点 u，v 之间的初等收缩由下面方法给出：删除边(u,v)，用新的顶点 w 取代 u，v，使 w 关联 u，v 关联的一切边(除(u,v) 外).

图 7-45 中，(1) 顶点 v_2、v_3 之间的初等收缩结果由(2) 给出.

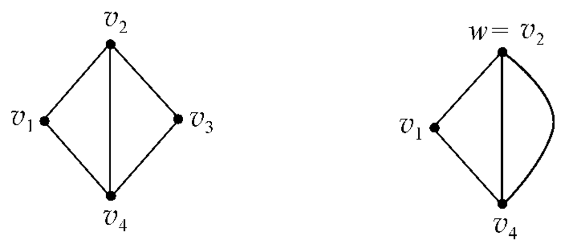


图 7-45

定理 7.7-6 一个图是平面图当且仅当它不含与 K_5 同胚子图，也不含与 $K_{3,3}$ 同胚子图.

以上定理称为库拉图斯基定理. 它还有另一种叙述形式，如以下定理.

定理 7.7-7 一个图是平面图当且仅当它没有可以收缩到 K_5 的子图，也没有可以收缩到 $K_{3,3}$ 的子图.

图 7-46(1) 中，消去 2 度顶点 a,b,c,d,e 后与 K_5 同胚，所以它不是平面图；又若将 a,b,c,d,e 分别收缩到 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5，则得 K_5，所以它也不是平面图.

图 7-46(2) 为彼德森图，去掉两条边(7,8) 与(4,5)，消去 2 度顶点 7,8,4,5 与 $K_{3,3}$ 同胚；如果将外层顶点收缩到内层对应顶点变成 K_5，所以它不是平面图.

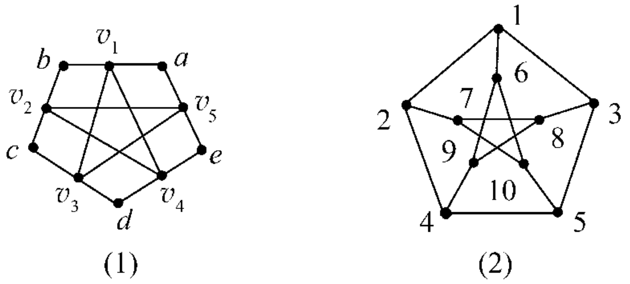


图 7-46

在图 7-47(1) 中,去掉两条虚线边所得图为 $K_{3,3}$,所以它不是平面图.

在图 7-47(2) 中,去掉两条粗线边所得图与 K_5 同胚;如果保留粗线边,去掉 4 条虚线边,所得图与 $K_{3,3}$ 同胚,所以它不是平面图.

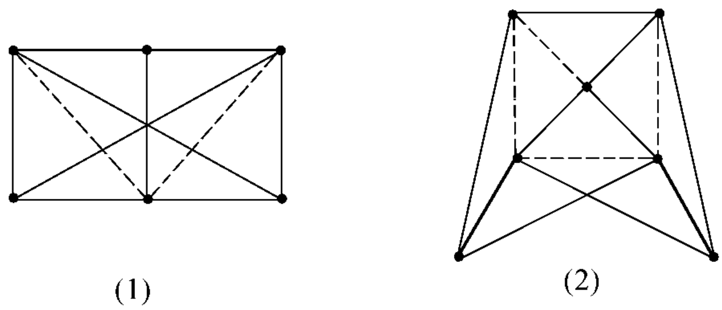


图 7-47

7.8　树

树是图论中的一个重要概念,它在许多学科,特别是在计算机学科中得到了广泛的应用.本节中所谈回路均指简单回路或初级回路,而不含复杂回路(有重复边出现的回路).

7.8.1　无向树

定义 7.8-1　连通而不含回路的无向图称为**无向树**,简称**树**,常用 T 表示树.

若一个无向图的连通分支数大于等于 2,且每个连通分支均是树,则称此非连通无向图为**森林**.平凡图称为**平凡树**.

设 $T=\langle V,E\rangle$ 为一棵无向树,$v\in V$,若 $d(v)=1$,则称 v 为 T 的**树叶**.若 $d(v)\geqslant 2$,则称 v 为 T 的分支点.

例如,图 7-48 中,(1) 与(4) 是树,(4) 为平凡树;(2) 有回路,不是树;(3) 不连通,也不是树,但它有 2 个连通分支,每个连通分支都是树,故(3) 是森林.

图 7-48(1) 所示的树中,a、b、e、f 是树叶,c、d 是分支点.

树具有许多等价的定义,下面用定理给出.

定理 7.8-1　给定图 T,以下关于树的定义是等价的:

(1) 无回路的连通图;

(2) 无回路且 $m=n-1$,其中 m 为边数,n 为结点数;

(3) 连通且 $m=n-1$;

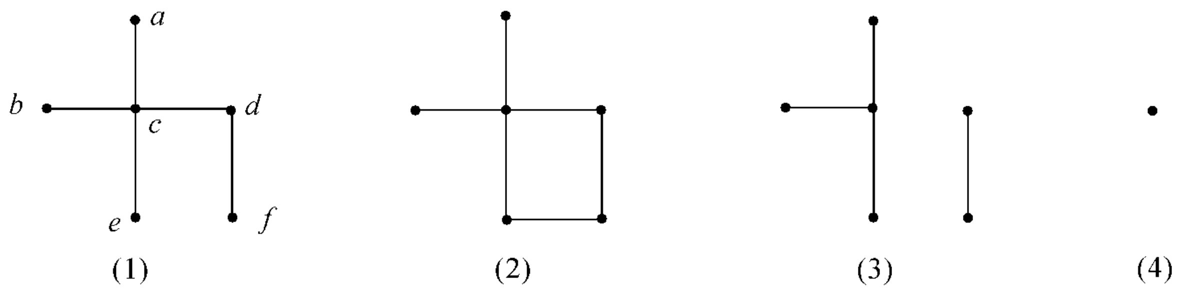


图 7-48

(4) 无回路且增加一条新边，得到一个且仅一个回路；

(5) 连通且删去任何一个边后不连通；

(6) 每一对结点之间有且仅有一条通路.

证明 (1)⇒(2)

设在图 T 中，当 $n=2$ 时，连通无向图 T 中的边数 $m=1$，因此 $m=n-1$ 成立.

设 $n=k-1$ 时命题成立，当 $n=k$ 时，因为是无向图且连通，故至少有一条边其一个端点 u 的度数为 1. 设该边为(u,w)，删去结点 u，便得到一个 $k-1$ 个结点的连通无向图 T'，由归纳假设，图 T' 的边数 $m'=n'-1=(k-1)-1=k-2$，于是再将结点 u 和关联边(u,w)加到图 T' 中得到原图 T，此时图 T 的边数为$m=m'+1=(k-2)+1=k-1$，结点数 $n=n'+1=(k-1)+1=k$，故 $m=n-1$ 成立.

(2)⇒(3)

若 T 不连通，并且有 $k(k\geqslant 2)$ 个连通分支 $T_1,T_2,\cdots,T_k$，因为每个分图是连通无回路，则我们可证：如 T_i 有 n_i 个结点 $n_i<n$ 时，T_i 有 n_i-1 条边，而

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k,$$

$$m=(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)=n-k,$$

但 $m=n-1$，故 $k=1$，这与假设 G 是不连通即 $k\geqslant 2$ 相矛盾.

(3)⇒(4)

若 T 连通且有 $n-1$ 条边.

当 $n=2$ 时，$m=n-1=1$，故 T 必无回路. 如增加一条边得到且仅得到一个回路.

设 $n=k-1$ 时命题成立.

考察 $n=k$ 时的情况，因为 T 是连通的，$m=n-1$，故每个结点 u 有 $d(u)\geqslant 1$. 可以证明至少有一结点 u_0，使 $d(u_0)=1$，若不然，即所有结点 u 有 $d(u)\geqslant 2$，则 $2m\geqslant 2n$，即 $m\geqslant n$ 与假设 $m=n-1$ 矛盾. 删去 u_0 及其关联的边，而得到图 T'，由归纳假设得知 T' 无回路，在 T' 中加入 u_0 及其关联边又得到 T，故 T 无回路的. 如在 T 中增加一条边(u_i,u_j)，则该边与 T 中 u_i 到 u_j 的路构成一个回路，则该回路必是唯一的，否则若删除这条新边，T 必有回路，得出矛盾.

(4)⇒(5)

若图 T 不连通，则存在结点 u_i 与 u_j，u_i 与 u_j 之间没有路，显然若加边(u_i,u_j)不会产生回路，与假设矛盾. 又由于 T 无回路，故删去任一边，图就不连通.

(5)⇒(6)

由连通性可知，任两个结点间有一条路，若存在两点，在它们之间有多于一条的路，则 T 中必有回路，删去该回路上任一条边，图仍是连通的，与(5) 矛盾.

(6)⇒(1)

任意两点间必有唯一一条路，则 T 必连通，若有回路，则回路上任两点间有两条路，与(6)矛盾.

定理 7.8-2 设 $T=\langle V,E\rangle$ 是 n 阶非平凡的树，则 T 中至少有 2 片树叶.

证明 因为 T 是非平凡树，所以 T 中每个顶点的度数都大于等于 1，设有 K 片树叶，则有 $(n-k)$ 个顶点度数大于等于 2. 由握手定理可知

$$2m=\sum_{i=1}^{k}d(v_i)\geqslant k+2(n-k).$$

由定理 7.8-1 可知，$m=n-1$，将此结果代入上式经过整理得 $k\geqslant 2$，这说明 T 至少有 2 片树叶.

7.8.2 生成树

定义 7.8-2 设 $G=<V,E>$ 是无向连通图，T 是 G 的生成子图，并且 T 是树，则称 T 是 G 的**生成树**，G 在 T 中的边称为 T 的**树枝**.

图 7-49 中，(2) 为(1) 的一棵生成树 T，(3) 为 T 的**余树**，注意余树不一定是树.

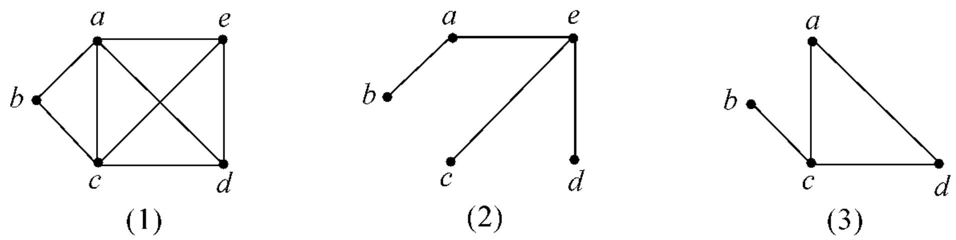


图 7-49

定理 7.8-3 任何连通图 G 至少存在一棵生成树.

证明 设连通图 G 没有回路，则它本身就是一棵生成树. 若 G 至少有一个回路，我们删去回路上的一条边，得到 G_1，它仍然是连通的，并与 G 有相同的结点集. 若 G_1 没有回路，则 G_1 就是 G 的生成树. 若 G_1 仍然有回路，再删去 G_1 回路上的一条边，重复上面的步骤，直到得到一个连通图 H，它没有回路，但与 G 有相同的结点集，因此 H 为 G 的生成树.

由定理 7.8-3 的证明的过程中可以看出，一个连通图有许多生成树. 因为取定一个回路后，就可以从中去掉任何一条边，去掉的边不一样，故可以得到不同的生成树.

下面介绍带权图中的最小生成树问题.

定义 7.8-3 设无向连通带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$，T 是 G 的一棵生成树，T 各边带权之和称为 T 的权，记作 $W(T)$. G 的所有生成树中带权最小的生成树称为**最小生成树**.

求最小生成树的算法很多，在这里只介绍避圈法(Kruskal 算法).

设 n 阶无向连通带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 中有 m 条边 e_1、e_2、…、e_m，它们带的权分别为 a_1，a_2，…，a_m，不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m$.

(1) 取 e_1 在 T 中(e_1 非环，若 e_1 为环，则弃 e_1)；

(2) 若 e_2 不与 e_1 构成回路，取 e_2 在 T 中，否则弃 e_2，再查 e_3，继续这一过程，直到形成生成树 T 为止.

用以上算法生成的 T 是最小生成树.

在图 7-50 中,图(3) 和图(4) 所示的生成树均由避圈法得到的图(1) 和图(2) 相对应的最小生成树,但生成树并不是唯一的. 图(3) 中,$W(T)=15$,图(4) 中,$W(T)=23$.

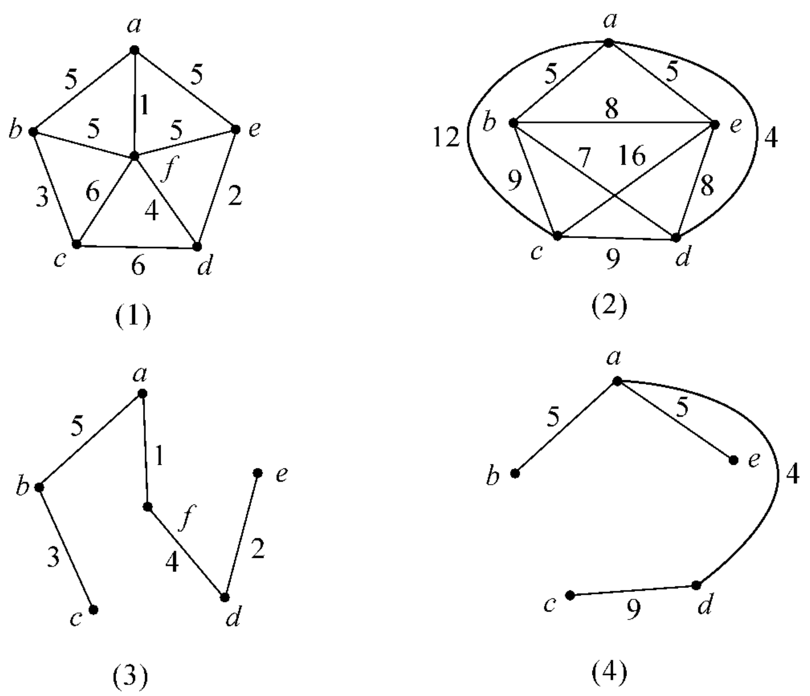


图 7-50

7.8.3　根树及应用

1. 根树的定义

一个有向图 D,如果略去有向边的方向所得无向图为一棵无向树,则称 D 为有向树. 在有向树中,最重要的是根树.

定义 7.8-4　一棵非平凡的有向树,如果有一个顶点的入度为 0,其余顶点的入度均为 1,则称此有向树为**根树**. 入度为 0 的顶点称为**树根**;入度为 1、出度为 0 的顶点称为**树叶**;入度为 1、出度大于 0 的顶点称为**内点**,内点和树根统称为**分支点**.

图 7-51(1) 为一棵根树,v_0 为树根,v_1,v_3,v_4,v_6,v_7 为树叶,v_2,v_5 为内点,v_0,v_2,v_5 均为分枝点,由于在根树中有向边的方向均一致(向下),故可省略掉其方向,在图 7-51 中用图(2) 代替图(1).

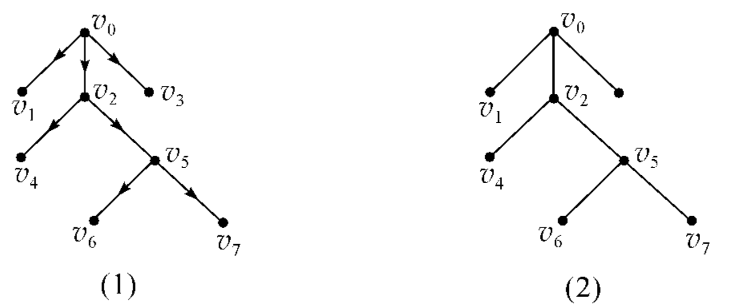


图 7-51

在根树中,从树根到任意顶点 v 的通路长度称为 v 的层数,记为 $l(v)$,称层数相同的顶点在同一层上. 层数最大的顶点的层数称为树高. 根树 T 的树高记为 $h(T)$. 图 7-51 所示的根树

中，v_0 处在第 0 层上，v_1，v_2，v_3 在第 1 层上，v_4，v_5 在第 2 层上，v_6，v_7 在第 3 层上. 树高为 3，在树叶 v_6，v_7 上达到这个高度.

一棵根树可以看成是一棵家族树：

(1) 若顶点 a 邻接到顶点 b，则称 b 为 a 的儿子，a 为 b 的父亲；

(2) 若 b，c 同为 a 的儿子，则称 b，c 为兄弟；

(3) 若 $a \neq d$，而 a 可达 d，则称 a 为 d 的祖先，d 为 a 的后代.

定义 7.8-5　设 T 为一棵根树，a 为 T 中一个顶点，且 a 不是树根，称 a 及其后代导出的子图 T' 为 T 的以 a 为**根的子树**，简称**根子树**.

在应用中，往往将同层上的顶点或它们所关联的边排序.

定义 7.8-6　如果将根树每一层上的顶点都规定次序，这样的根树称为**有序树**.

次序可排在顶点处，也可以排在边上. 次序常常是从左向右，不一定是连续的. 下面图 7-52 为有序树，次序排在边上.

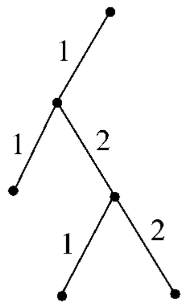


图 7-52

2. 根树的分类

根据每个分支点的儿子数以及是否有序，可将根树分成若干类.

定义 7.8-7　设 T 为一棵根树，

(1) 若 T 的每个分支点至多有 r 个儿子，则称 T 为 r **元树**；

(2) 若 T 的每个分支点都恰好有 r 个儿子，则称 T 为 r **元正则树**；

(3) 若 r 元树 T 是有序的，则称 T 是 r **元有序树**；

(4) 若 r 元正则树 T 是有序的，则称 T 是 r **元有序正则树**；

(5) 若 T 是 r 元正则树，且所有树叶的层数相同，都等于树高，则称 T 为 r **元完全正则树**；

(6) 若 r 元完全正则树 T 是有序树，则称 T 是 r **元有序完全正则树**.

图 7-53 (1) 为 2 元有序树，(2) 为 2 元有序正则树，(3) 为 2 元有序完全正则树.

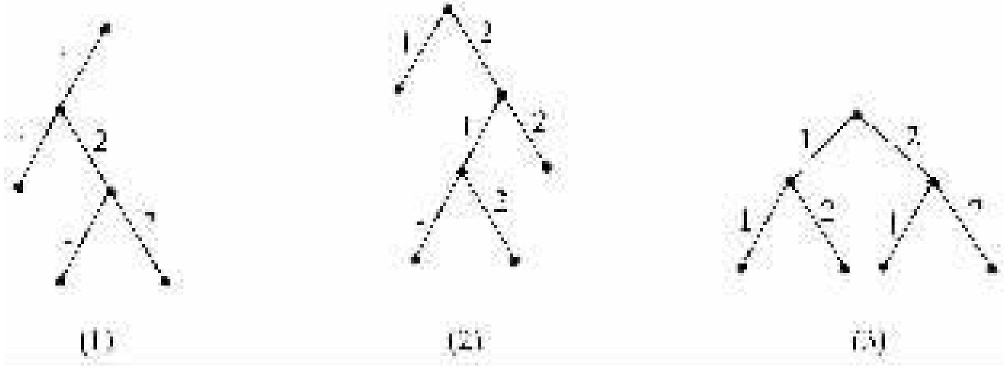


图 7-53

在所有的 r 元有序正则树中，2 元有序正则树最重要.

3. 最优 2 元树的定义

定义 7.8-8　设 2 元树 T 有 t 片树叶，分别带权为 $w_1, w_2, \cdots, w_i, \cdots, w_t$（$w_i$ 为实数，$i = 1, 2, \cdots, t$），称 $W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i L(w_i)$ 为 T 的**权**，其中 $L(w_i)$ 为带权 w_i 的树叶 v_i 的**层数**. 在所有的带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的 2 元树中，带权最小的 2 元树称为最优 2 元树.

图 7-54 中所示的 3 棵树，都是带权 1,3,4,5,6 的 2 元树，$W(T_1) = 47$，$W(T_2) = 54$，$W(T_3) = 42$，但它们中有无最优树还不知道.

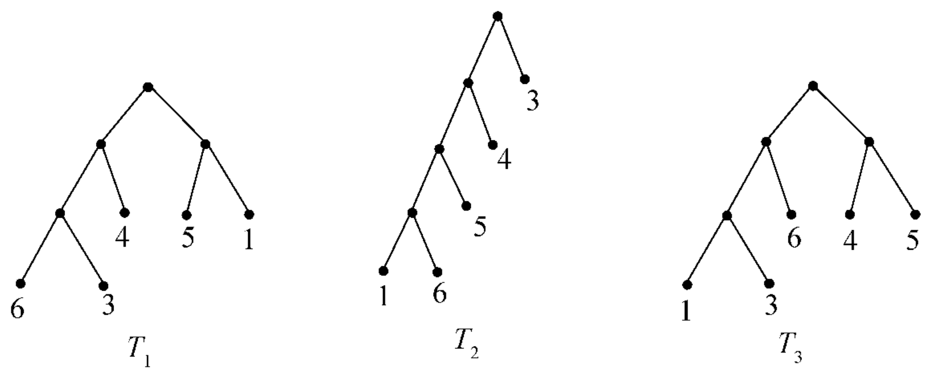


图 7-54

4. Huffman 算法

求最优树的算法是由 Huffman 给出的.

Huffman 算法：

给定实数 $w_1, w_2, \cdots, w_t$，且 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$，

(1) 连接以 w_1, w_2 为权的两片树叶，得一分支点，其权为 $w_1 + w_2$；

(2) 在 $w_1 + w_2, w_3, \cdots, w_t$ 中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点（不一定都是树叶），得分支点及其所带的权；

(3) 重复(2)，直到形成一棵有 $t - 1$ 个分支点，t 片树叶的树为止.

例 7.18　(1) 求带权为 1,3,4,5,6 的最优 2 元树；

(2) 求带权为 2,3,5,7,8,9 的最优 2 元树.

解　(1) 图 7-55 给出了求带权为 1,3,4,5,6 的最优 2 元树的过程. 图(4) 给出的是最优 2 元树 T，$W(T) = 42$. 因此可知，图 7-55(3) 所示的树 T_3 也是带权为 1,3,4,5,6 的最优 2 元树，因为 $W(T_3)$ 也为 42. 可见，最优树是不唯一的，但由 Huffman 算法得到的树一定是最优树.

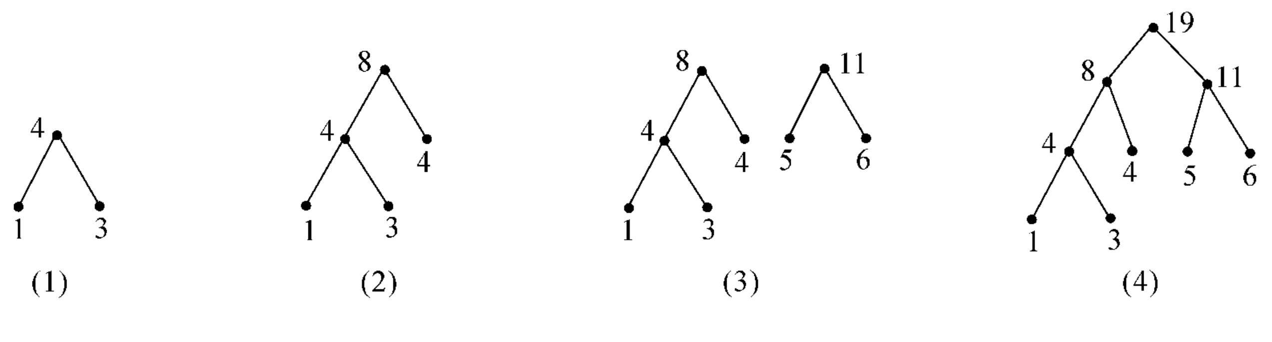


图 7-55

(2) 由 Huffman 算法求出的带权为 2,3,5,7,8,9 的最优树 T 如图 7-56 所示,其权 $W(T)=83$.

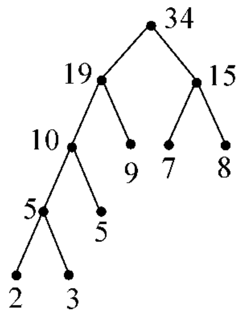


图 7-56

5. 根树的 3 种行遍法

对于一棵根树的每个顶点都访问一次且仅一次称为行遍或周游一棵树. 对于 2 元有序正则树主要有以下 3 种行遍方法:

(1) 中序行遍法

其访问次序为:左子树,树根,右子树,在每棵子树中也按同一次序行遍.

(2) 前序行遍法

其访问次序为:树根,左子树,右子树,在每棵子树中也按同一次序行遍.

(3) 后序行遍法

其访问次序为:左子树,右子树,树根,在每棵子树中也按同一次序行遍.

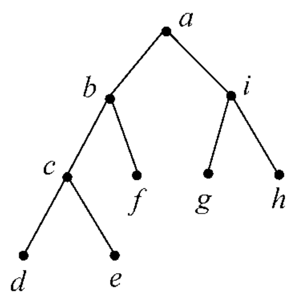


图 7-57

对于图 7-57 所示的根树,按中序行遍法,其行遍结果为$((dce)bf)a(gih)$.

按前序行遍法行遍结果为 $a(b(cde)f)(igh)$.

按后序行遍法行遍结果为$((dec)fb)(ghi)a$.

利用二元有序树可以表示算式,然后根据不同的访问法可以产生不同的算法. 在表达算式时,规定运算符放在分支点上,数字或变量放在树叶上. 另外,规定被减数和被除数放在左子树树叶上.

例 7.19　(1) 用 2 元有序树表示下面算式:$((a+(b*c))*d+e)\div(f*g)$;

(2) 用 3 种行遍法访问(1) 中根树,写出行遍结果.

解　(1) 所得根树 T 如图 7-58 所示.

(2) 中序行遍法访问此树:

$$((a+(b*c))*d+e)\div(f*g). \qquad ①$$

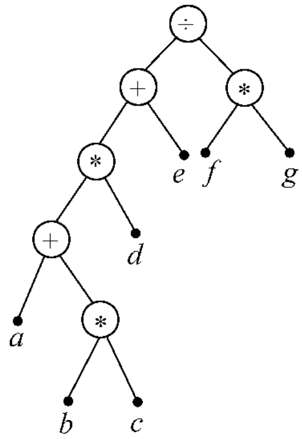


图 7-58

① 式是还原算式.

前序行遍法访问此树：

$$\div(+(*(+a(*bc))d)e)(*fg). \quad ②$$

后序行遍法访问此树：

$$(((a(bc*)+)d*)e+)(fg*)\div. \quad ③$$

在 ② 式中，可将全部括号去掉：

$$\div+*+a*bcde*fg. \quad ④$$

在 ④ 中规定，每个运算符与它后面紧邻的两数进行计算，其计算结果是正确的. 在此种算法中，因为运算符在参加运算的两数的前面，因而称为前缀符号法或波兰符号法.

在 ③ 式中，也可将全部括号去掉：

$$abc*+d*e+fg*\div \quad ⑤$$

在 ⑤ 式中规定，每个运算符与它前面紧邻的两数进行运算，其计算结果也是正确的. 在这种算法中，因为运算符在参加运算两数的后面因而称为后缀符号法或逆波兰符号法.

本章小结

本章介绍了离散数学中最重要的内容之一 —— 图论. 首先从最基础的概念出发，详细清晰地讲述了图论中的各种图以及它们的关系，并用矩阵的形式抽象出其性质. 进而介绍了图论中两个有代表性的特殊图：欧拉图和哈密尔顿图，并对两种图的性质进行了分析和讲解. 最后介绍了二部图、平面图及树的基本概念及相应的判断方法和性质，还介绍了二叉树的应用.

本章主要讨论了：

(1) 图的基本概念与表示，边与点之间的关系，各种不同的图.

(2) 路与回路的概念，图的连通性.

(3) 图的邻接矩阵、可达性矩阵以及完全关联矩阵的表示和相关性质.

(4) 欧拉图的定义及其判断.

(5) 哈密尔顿图的定义及判断是否为哈密尔顿图的充分条件和必要条件.

(6) 二部图的基本概念和判断方法.

(7) 平面图的基本概念、性质，欧拉公式和判断方法.

(8) 树、有向树、无向树、子树、生成树等的基本概念和性质及二叉树的应用.

习题 7

7.1　设 $G=<V,E>$ 是一个无向图，其中

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_8\},$$

$$E=\{\langle v_1,v_1\rangle,\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_1,v_3\rangle,\langle v_1,v_4\rangle,\langle v_3,v_2\rangle,\langle v_2,v_4\rangle,\langle v_6,v_7\rangle\},$$

(1) 画出 G 的图解；

(2) $G=\langle V,E\rangle$ 的 $|V|$，$|E|$ 各是多少？

(3) 指出与 v_3 邻接的结点，以及与 v_3 关联的边；

(4) 指出与 e_1 邻接的边，以及与 e_1 关联的结点；

(5) 该图是否有孤立结点和孤立边？

(6) 求出各结点的度数，并判断是不是完全图？

7.2　下列各组数中，哪些能构成无向图的度数列？哪些能构成无向简单图的度数列？

(1) 1，1，1，2，3

(2) 2，2，2，2，2

(3) 3，3，3，3

(4) 1，2，3，4，5

(5) 1，3，3，3

7.3　设有向简单图的度数列为 2、2、3、3，入度列为 0、0、2、3，试求 G 的出度列.

7.4　设G是4阶有向简单图，度数列为3,3,3,3，它的入度列(或出度列)能为1,1,1,1吗？

7.5　设图 G 是具有 3 个结点的完全图，试问：

(1) G 有多少个子图？

(2) G 有多少个生成子图？

(3) 如果没有任何两个子图是同构的，则 G 的子图个数是多少?将它们构造出来.

7.6　给定下列六个图(见图 7-59)：

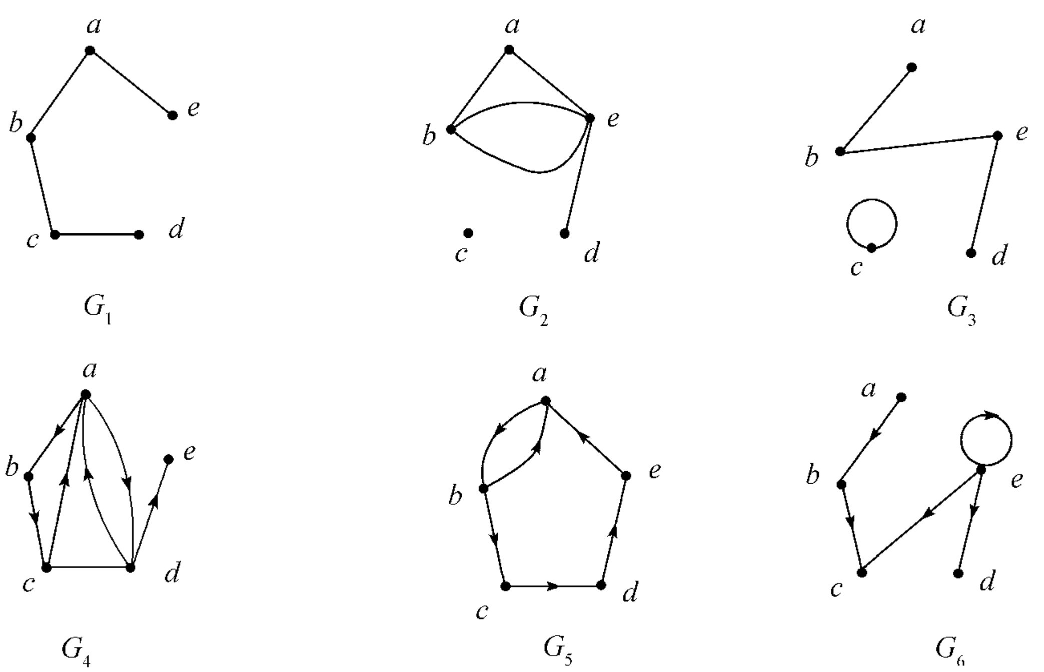


图 7-59

$G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$,其中 $V_1 = \{a,b,c,d,e\}$,$E_1 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,e\rangle\}$;
$G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$,其中 $V_2 = V_1$,$E_2 = \{(a,b),(b,e),(e,b),(a,e),(d,e)\}$;
$G_3 = \langle V_3, E_3 \rangle$,其中 $V_3 = V_1$,$E_3 = \{(a,b),(b,e),(e,d),(c,c)\}$;
$G_4 = \langle V_4, E_4 \rangle$,其中 $V_4 = V_1$,$E_4 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,d\rangle,\langle d,a\rangle,\langle d,e\rangle\}$;
$G_5 = \langle V_5, E_5 \rangle$,其中 $V_5 = V_1$,$E_5 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,a\rangle\}$;
$G_6 = \langle V_6, E_6 \rangle$,其中 $V_6 = V_1$,$E_6 = \{(a,a),(a,b),(b,c),(e,c),(e,d)\}$.

试问:(1) 哪些图是有向图?哪些图是无向图?
(2) 哪些是简单图?哪些是多重图?
(3) 哪些是强连通图?哪些是单侧连通图?哪些是弱连通图?

7.7　给定图 $G = \langle V, E \rangle$,如图 7-60 所示,试问:
(1) 在 G 中找出一条长度为 7 的通路;
(2) 在 G 中找出一条长度为 4 的简单通路;
(3) 在 G 中找出一条长度为 5 的初级通路;
(4) 在 G 中找出一条长度为 8 的复杂通路;
(5) 在 G 中找出一条长度为 7 的回路;
(6) 在 G 中找出一条长度为 4 的简单回路;
(7) 在 G 中找出一条长度为 5 的初级回路;
(8) 在 G 中找出一条长度为 7 的复杂回路.

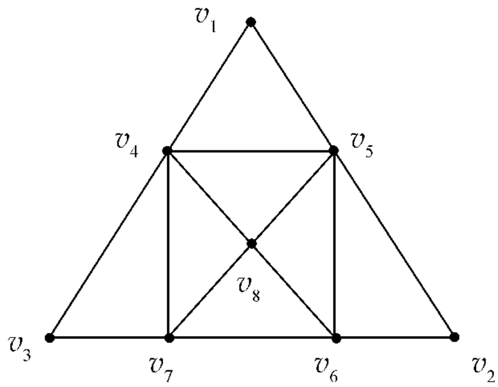


图 7-60

7.8　如图 7-61 所示的无向图中,试问:

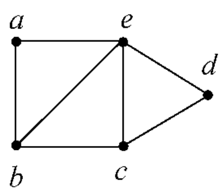


图 7-61

(1)a,d 之间所有不同的初级通路共有多少条;
(2)a,d 之间的短程线;
(3)a,d 之间的距离.

7.9　设有向图 D(见图 7-62),求图 D 从 v_2 到 v_4 长度分别为 1,2,3,4 的通路各有几条.

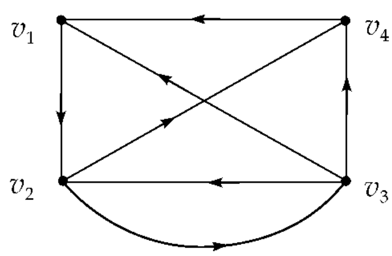


图 7-62

7.10　求习题 7.6 中图 G_2 的关联矩阵,图 G_3 的相邻矩阵,图 G_4 的邻接矩阵,图 G_5 的关联矩阵和图 G_6 的可达矩阵.

7.11　有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 如图 7-63 所示.

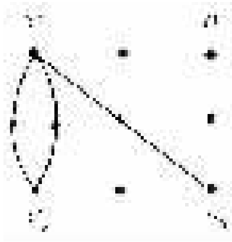


图 7-63

(1)D 中 v_1 到 v_4 的长度为 1 的通路有多少条?长度为 2 的通路有多少条?长度为 3 的通路有多少条?长度为 4 的通路有多少条?

(2)D 中长度为 3 的通路(不含回路)有多少条?长度为 3 的回路有多少条?

7.12　判别图 7-64 中的两幅图是否可以一笔画出?

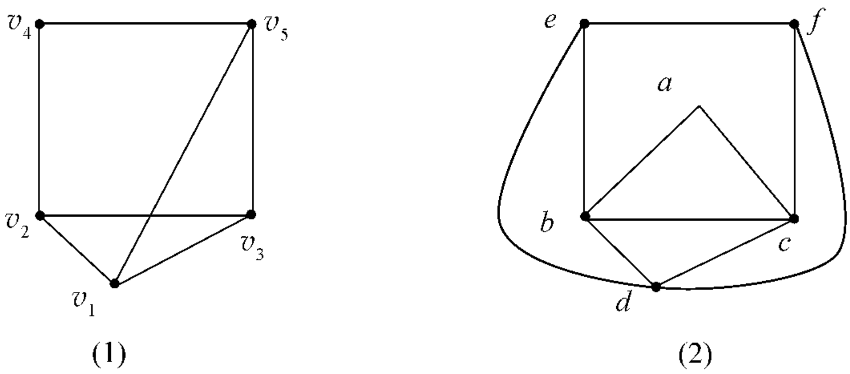


图 7-64

7.13　判定图 7-65 中,两个图是否有欧拉回路?若有请把欧拉回路写出来.

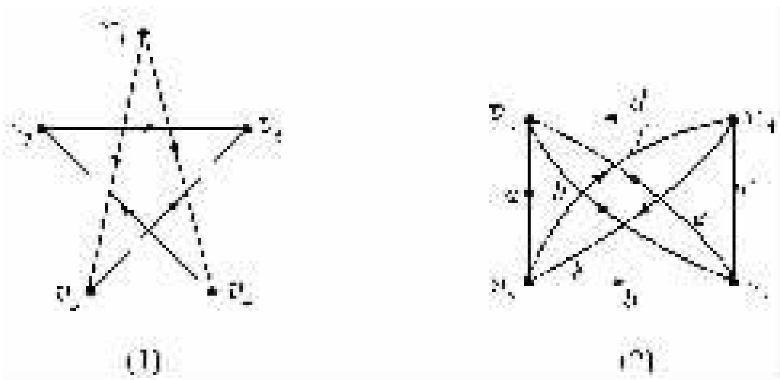


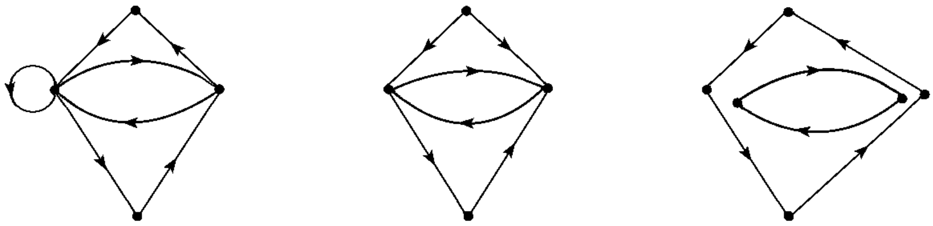
图 7-65

7.14　指出图 7-66 各图是否是哈密顿图,有无哈密顿通路、回路?

7.15　画出完全二部图 $K_{1,3}$、$K_{2,2}$ 和 $K_{2,3}$.

7.16　完全二部图 $K_{n,m}=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 中共有多少条边?有多少个结点?

7.17　图 7-67 是否二部图?若是,试写出它的互补结点集.



(1)　　(2)　　(3)

图 7-66

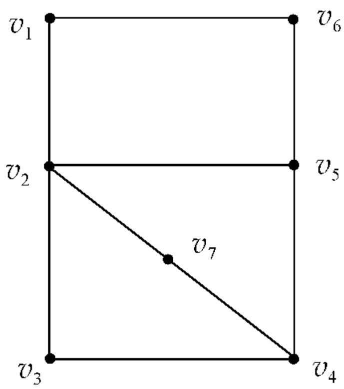
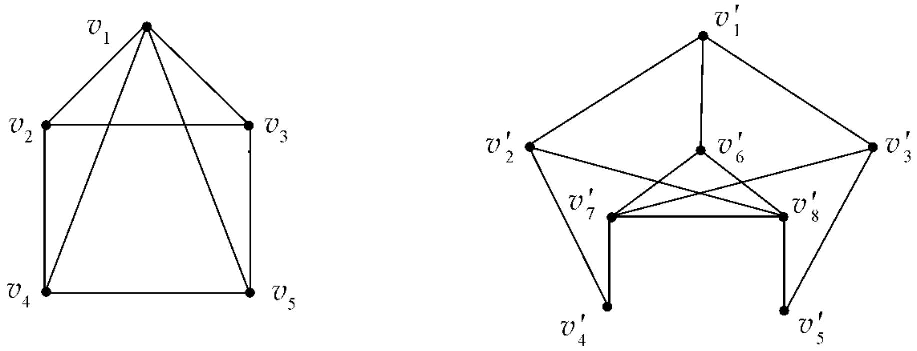


图 7-67

7.18　设 $G=\langle V,E\rangle$，$|V|=n$，$|E|=m$ 为连通平面图且有 r 个面，则 r 为多少？

7.19　判断图 7-68 中两个图是否为平面图？



(1)　　(2)

图 7-68

7.20　在具有 n 个结点的完全图 K_n 中，需要删去多少条边才能得到树.

7.21　设 G 是图，无回路，但若外加任意一条边于 G 后，就形成一回路. 试证明 G 必为树.

7.22　设无向树 T 有 3 个 3 度、2 个 2 度顶点，其余顶点都是树叶，问 T 有几片树叶？

7.23　一棵树有两个结点度数为 2，一个结点度数为 3，3 个结点度数为 4，问它有几个度数为 1 的结点.

7.24　设 G 是完全二元树，G 有 15 个结点，其中有 8 个是树叶，则 G 有多少条边，G 的总度数是多少，G 的分支点数是多少，G 中度数为 3 的结点数是多少.

7.25　无向图 G 具有生成树，充要条件是什么，若 G 是有 n 个结点，m 条边的连通图，要确定 G 的一颗生成树，必须删去 G 的多少条边.

7.26　对于图 7-69，利用 Kruskal 算法求一棵最小生成树.

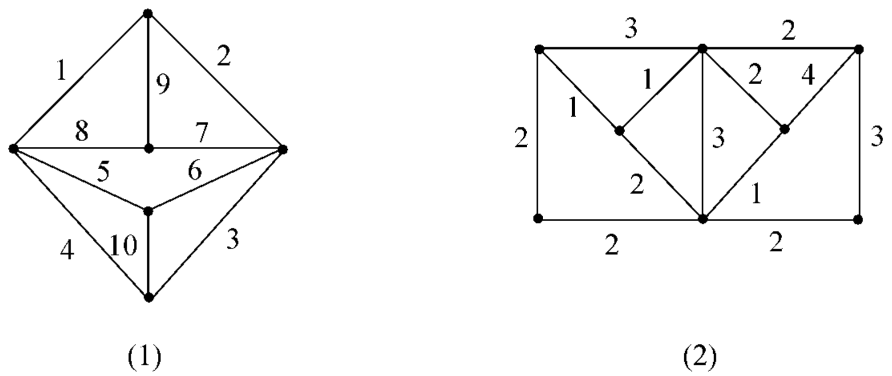


图 7-69

7.27　图 7-70 给出两个带权图.

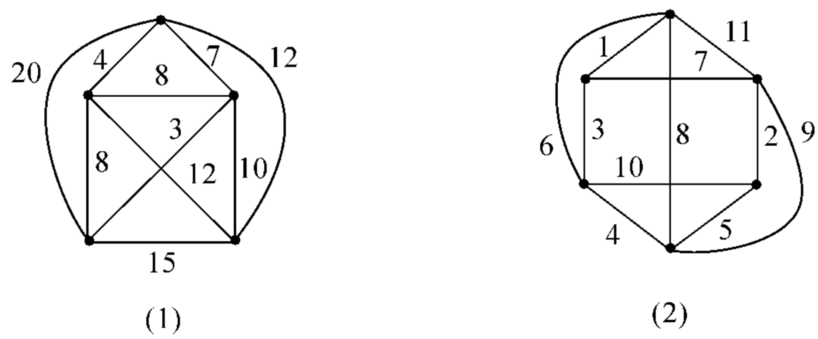


图 7-70

(1) 图 7-70(1) 中最小生成树的权;

(2) 图 7-70(2) 中最小生成树的权.

7.28　求带权为 1,2,3,4,5,6,7,8 的最优二元树.

7.29　求带权为 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100 的最优二元树.

7.30　分别用前序、中序、后序行遍法行遍如图 7-71 所示的二元树.

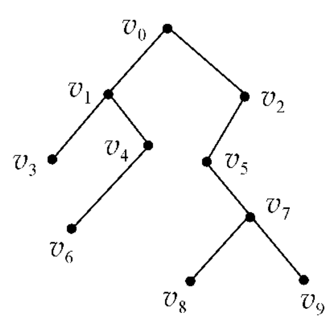


图 7-71