第一章　函　　数

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，是高等数学的主要研究对象. 高等数学这门学科，主要研究定义在实数集上的函数，函数的概念及其性质中学已经学过，本章主要复习和巩固函数的一些基础知识.

第一节　函数的概念

为了研究问题的方便，首先来介绍高等数学中经常需要用到的几个基本概念.

一、集合、区间和邻域

(一) 集合

集合概念是数学中的一个最基本的概念，一般可以把**集合**(简称**集**)理解为具有某种特定性质的事物的总体. 例如，某学校全体师生组成的一个集合；某学校某个班级的全体同学组成的一个集合；全体实数组成的一个集合；全体正整数组成的一个集合等. 集合中的每个事物称为集合的**元素**(简称**元**). 习惯上用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 如果元素 a 是集合 A 中的元素，记作 $a\in A$(读作 a 属于 A)；如果元素 a 不是集合 A 中的元素，记作 $a\notin A$(读作 a 不属于 A).

如果一个集合只含有有限个元素，那么称这个集合为有限集；不是有限集的集合称为无限集. 例如，全体英文字母组成的一个集合是有限集，全体整数组成的集合是无限集.

给定一个集合，就是给出这个集合由哪些元素组成，给出集合的方法通常有两种：列举法和描述法.

列举法就是把集合中的所有元素都列举出来写在大括号内. 例如，由 1，2，3，4，5，6，7，8 八个数组成的集合 A 可记作

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

描述法就是把集合中所有元素的公共属性描述出来，记作

$$A=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如，

$$A=\{x \mid 0<x<6\}$$

表示满足不等式 $0<x<6$ 的实数.

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

表示在 xOy 平面上以原点 O 为中心，半径为 2 的圆周及其内部所有点所组成的集合.

习惯上，全体实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$，即 $\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$；全体有理数组成的集合记作 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q} = \{x \mid x \text{ 为有理数}\}$；全体整数组成的集合记作 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z} = \{x \mid x \text{ 为整数}\}$；全体自然数组成的集合记作 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N} = \{x \mid x \text{ 为自然数}\}$.

设 A, B 是两个集合，如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，记作

$$A \subset B(\text{读作 } A \text{ 包含于 } B) \quad \text{或} \quad B \supset A(\text{读作 } B \text{ 包含 } A)$$

如果集合 B 与集合 A 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 B 与集合 A 相等，记作

$$A = B$$

例如，集合 $A = \{2, 3\}$，集合 $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$，则 $A = B$.

特别地，不包含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 并规定空集是任何集合的子集.

例如，$\{x \mid x^2 + 1 = 0 \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\}$ 是空集，因为满足条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的.

注意 以后用到的集合主要指数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是指实数.

集合的基本运算有以下几种：并、交、差.

设 A, B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**)，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**)，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**)，记作 $A \backslash B$，即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

特别地，若集合 B 包含于集合 A(即 $B \subset A$)，则称 $A \backslash B$ 为 B 关于 A 的**余集**，或称为**补集**，记作 $C_A B$. 通常我们所讨论的问题是在一个大集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时称 $I \backslash A$ 为 A 的余集，记作 $C_I A$ 或 A^C.

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A = \{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 5\}$ 的余集为

$$A^C = \{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 5\}$$

集合的并、交、差运算满足下面的基本法则.

设 A, B, C 为三个任意集合，则下列法则成立：

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$$

(4) 幂等律　$A \cup A = A,\quad A \cap A = A$

(5) 吸收律　$A \cup \varnothing = A,\quad A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup B = B,\quad A \cap B = A$,其中 $A \subset B$

$A \cup (A \cap B) = A,\quad A \cap (A \cup B) = A$

(6) 对偶律　$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

以上法则都可以利用集合的定义来验证.

在许多问题中还经常用到乘积集合的概念. 设 A,B 是任意两个非空集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,把有序对(x,y)作为新的元素,它们的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积,记作 $A \times B$,即

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

例如,设 $A = \{x \mid a < x < b\}, B = \{y \mid c < y < d\}$,则

$$A \times B = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\}$$

它表示 xOy 平面上以$(a,c),(b,c),(b,d),(a,d)$为顶点的矩形内部的所有点构成的集合,而 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 就表示整个坐标平面,记作 $\mathbf{R}^2$.

(二) 区间

在很多情况下,集合可以用区间来表示. 设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$,集合$\{x \mid a < x < b\}$称为**开区间**,记作(a,b),即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,但不包括端点 a 及端点 b,如图 1-1 所示.

集合$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$称为**闭区间**,记作$[a,b]$,即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,包括两个端点,如图 1-2 所示.

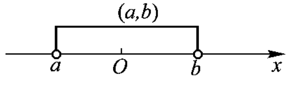


图　1-1

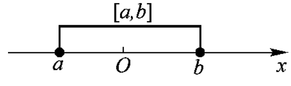


图　1-2

还有其他类似的区间:

集合$\{x \mid a < x \leqslant b\}$记作$(a,b]$,称为左开右闭区间,如图 1-3 所示.

集合$\{x \mid a \leqslant x < b\}$记作$[a,b)$,称为左闭右开区间,如图 1-4 所示.

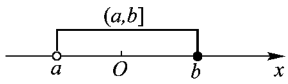


图　1－3

图　1－4

上述两个区间$(a,b]$和$[a,b)$统称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间,数$b-a$称为这些区间的长度.从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段.

此外还有所谓无限区间,引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大),则无限区间表示如下:

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,如图1-5所示.$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,如图1-6所示.

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,如图1-7所示.$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$,如图1-8所示.

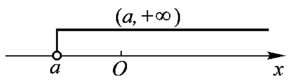


图　1－5

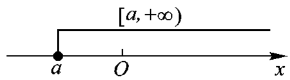


图　1－6

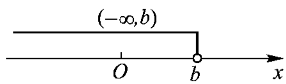


图　1－7

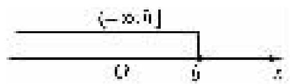


图　1－8

全体实数的集合$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x\mid x$为任意实数$\}$,它也是无限区间.

注意　以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的问题时,就简单地称它为"区间",且常用I来表示.

(三)邻域

设a与δ是两个实数且$\delta>0$,则称数集

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

或

$$\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

为点a的δ**邻域**,记作$U(a,\delta)$,并称点a为该邻域的中心,δ为该邻域的半径.如图1－9所示.

因为$|x-a|$表示点x与点a间的距离,所以$U(a,\delta)$表示与点a距离小于δ的一切点x的全体.实际上,邻域就表示以点a为中心的任何开区间.

点a的δ邻域去掉中心点a后的集合,称为点a的去心δ邻域,记作$\mathring{U}(a,\delta)$,并且

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

其中$0<|x-a|$就表示$x\neq a$.

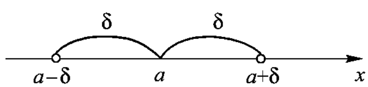


图　1－9

例如，点 0 的$\frac{1}{5}$邻域为$\{x \mid |x| < \frac{1}{5}\}$；点 2 的$\frac{1}{2}$去心邻域为$\{x \mid 0 < |x-2| < \frac{1}{2}\}$.

设 a 与 δ 是两个实数且 $\delta > 0$，则称数集

$$\{x \mid a < x < a + \delta\}$$

与

$$\{x \mid a - \delta < x < a\}$$

分别为点 a 的右 δ 邻域与点 a 的左 δ 邻域，分别记作 $U_+(a,\delta)$，$U_-(a,\delta)$.

例如，点 0 的右$\frac{1}{5}$邻域为$\{x \mid 0 < x < \frac{1}{5}\}$，点 0 的左$\frac{1}{5}$邻域为$\{x \mid -\frac{1}{5} < x < 0\}$.

思考　某个班级的所有高个子学生能用一个集合来表示吗？为什么？

二、函数的基本概念

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中，人们会碰到许多用来表示不同事物的量，通常可将它们分为两类：一类是在某个问题的研究过程中保持不变的量，称之为常量；一类是在某个问题的研究过程中会出现变化，即可以取不同的值的量，称之为变量.

例如，学校的体育馆的面积是保持不变的，是常量，而每天来体育馆打球的人数是不同的，因而是变量.

又如，将一密闭的容器中的气体进行加热，在加热过程中，容器中的气体的体积、分子数保持不变，是常量；而气体的温度、容器内的气压在不断变化，是变量.

在研究实际问题的过程中，常常发现有几个变量同时变化，它们并不是孤立的，它们不仅是相互联系的，而且还是遵循一定变化规律联系的，下面先举例说明两个变量的情形.

例 1　正方体的体积 V 与其边长 x 之间的关系由公式 $V = x^3$，这里 V 和 x 都是变量，当边长 x 变化时，其体积 V 也随之作相应的变化.

例 2　在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，如果取开始下落的时刻 $t = 0$，那么 s 和 t 之间的依赖关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g\text{ 为重力加速度})$$

表示，若物体到达地面的时刻 $t = T$，则在时间区间$[0,T]$上任取一个数值时，由上面的公式都可以确定出 s 的对应值.

例 3　设某产品的固定成本为 100 万元，每生产 100 件成本就增加 4 万元，已知该商品市场前景看好，即产品可以全部销售出去，又知其需求量函数为 $q = 200 - 2p$（其中 p 表示销售单价）. 显然，总成本为

$$C(q) = 100 + 4q$$

总收益为

$$R(q) = pq = \frac{1}{2}(200 - q)q = 100q - \frac{1}{2}q^2$$

因此,总利润为

$$L(q)=R(q)-C(q)=100q-\frac{1}{2}q^2-(100+4q)=-\frac{1}{2}q^2+96q-100$$

即总利润是随需求量的变化而变化的.

上面三个例子的实际意义虽然不同,但却有共同之处,每个例子所描述的变化过程都有两个变量,当其中一个变量在一定变化范围内取定一个数值时,按照某一确定的法则,另一个变量有唯一确定的数值与之对应.两个变量之间的这种对应关系,在数学上就是函数的概念.

定义 1　设 D 为一个给定的实数集,对于每个 $x\in D$,按照某种对应法则 f,总存在唯一确定的实数值 y 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**,习惯上也称 y 是 x 的函数,并记作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,实数集 D 称为这个函数 f 的**定义域**.

函数定义中,对于每个 $x\in D$,按照某种对应法则 f,总存在唯一确定的实数值 y 与之对应,这个实数值 y 称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$.当 x 遍取实数集 D 的每个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 f 的**值域**.

值得注意的是记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的,f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值.

如果 $x_0\in D$,则称函数 f 在点 x_0 处有定义或有意义;如果 $x_0\notin D$,则称函数 f 在点 x_0 处无定义或无意义.当 $x=x_0$ 时,函数 f 的值为 y_0,记为 $y_0=f(x_0)$.如果函数在某个区间 I 上每一点都有定义,就说这个函数在该区间 I 上有定义.

如果 y 是 x 的函数,有时也可记为 $y=g(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$ 或 $y=y(x)$ 等.当讨论到几个不同的函数时,为了区别起见,需要用不同的记号来表示它们.

由于函数的定义域和对应法则被确定后,其值域就随之而定,因此定义域和对应法则就成了函数的两个要素.如果两个函数的定义域和对应法则都相同,则称这两个函数相同,否则就不同.

例 4　函数 $y=x^3$ 与 $y=t^3$,它们的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,且其对应法则都是“自变量的三次方”,因此,虽然表示变量的字母不同,但它们仍然是两个相同的函数.可是对于函数 $y=\frac{1}{x+2}$ 与 $y=\frac{x}{x^2+2x}$,由于它们的定义域不同,所以它们是两个不同的函数.对于函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 有相同的定义域,但当 $x<0$ 时,两个函数的对应法则不同,所以它们也是两个不同的函数.

在研究函数时必须注意它的定义域.在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的.如例 1 中定义域为 $D=(0,+\infty)$,例 2 中定义域为 $D=[0,T]$,例 3 中定义域为

$D=[0,200)$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时约定函数的定义域就是使得这个式子的运算有意义的所有实数值.这种定义域又称为函数的自然定义域.

通常情况下,求函数定义域时要注意以下几点:

(1) 分式中分母不能为零;

(2) 偶次根式中,被开方式的值非负;

(3) 对数式中的真数大于零,底数大于零且不等于 1.

例 5　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$ 的定义域 .

解　要使 $f(x)$ 有意义,必须使 $9-x>0$,即 $x<9$.所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$ 的定义域为 $\{x \mid x<9\}$.

例 6　求函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义,只有 $\dfrac{x}{x-2}>0$,即 $x>2$ 或 $x<0$.所以函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

一般情况下,表示函数的方法主要有三种:表格法、图形法、解析法(公式法).

用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形.

在用解析法表示函数时,有些函数在整个定义域范围内,可以用一个数学式子表示,但有些函数在其定义域的不同部分用不同数学式子才能表示,这类函数我们称之为分段函数.值得注意的是,分段函数的定义域是几个不相交的子定义域的并集.求分段函数值时,应该把自变量的值代入相应的取值范围的式子中进行计算.

例如,函数 $y=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1\\ -x-1, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 是一个分段函数,其定义域为 $\{x \mid -1\leqslant x<1\}$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,　$f(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$;

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时,　$f(-\dfrac{1}{2})=-(-\dfrac{1}{2})-1=-\dfrac{1}{2}$.

下面举几个函数的例子.

例 7　函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域

为$[0,+\infty)$，它的图形如图 1-10 所示.

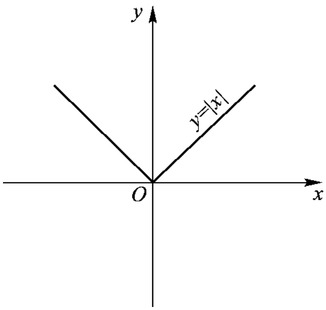


图　1-10

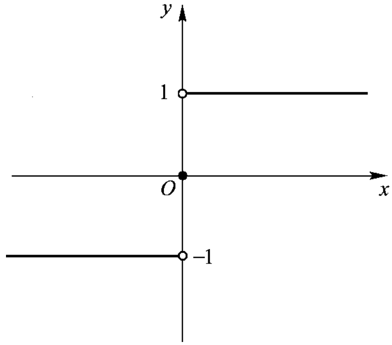


图　1-11

例 8　函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-11 所示.

例 9　函数 $y=f(x)=[x]=n,n\leqslant x<n+1$，其中 n 为整数，记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如，$\left[\dfrac{3}{5}\right]=0,[\sqrt{3}\,]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-4.6]=-5$.

显然，函数 $y=[x]$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为全体整数，它的图形如图 1-12 所示，这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1，这函数称为取整函数.

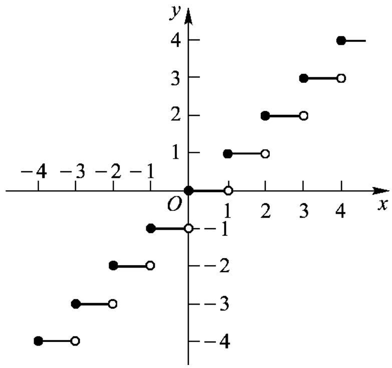


图　1-12

思考　函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$ 是同一个函数吗？应该从哪几个方面判断两个不同的解析式所表示的函数是否为同一函数？

习题 1-1

1. 设 A,B 分别为下列两个给定的集合，试求 $A\cup B,A\cap B,A\backslash B,B\backslash A$.

(1)$A=\{1,3,5,7,8\},B=\{2,4,6,8\}$；

(2)$A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty),B=[-10,3)$；

(3)$A=\left\{0,1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\},B=\left\{1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$.

2. 设 $A=\{x\mid x^2+x-6<0\},B=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，试求 $A\cap B$.

3. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$； (2) $y=\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)$； (3) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；

(4) $y=\tan(x+1)$； (5) $y=\ln(x+1)$； (6) $y=\arcsin(\ln x)$.

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=2\ln x, g(x)=\ln x^2$； (2) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}, g(x)=x-3$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$； (4) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, g(x)=1$；

(5) $f(x)=x, g(x)=\arcsin(\sin x)$； (6) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

5. 求下列各函数值：

(1) 设 $f(x)=x^3-1$，求 $f(0), f(-x)$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 1, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 求 $f(0), f(-1), f(1)$；

(3) 设 $g(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $g\left(\frac{\pi}{6}\right), g\left(\frac{\pi}{4}\right), g\left(-\frac{\pi}{4}\right), g(-2)$.

第二节 函数的几种特性

研究函数性质的目的是为了了解函数所具有的特性，以便掌握它的变化规律. 本节主要讨论与函数的几何图形有关的单调性、有界性、奇偶性和周期性.

一、函数的单调性

定义 1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于任意 $x_1, x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的，如图 1-13 所示.

如果对于任意 $x_1, x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的，如图 1-14 所示. 单调增加的函数和单调减少的函数统称为单调函数，若 $f(x)$ 在区间 I 上是单调函数，则称 I 是该函数的**单调区间**. 若沿着 x 轴的正方向看，单调增加函数的图形是一条上升的曲线，单调减少函数的图形是一条下降的曲线.

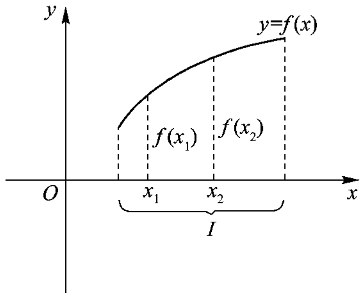


图 1-13

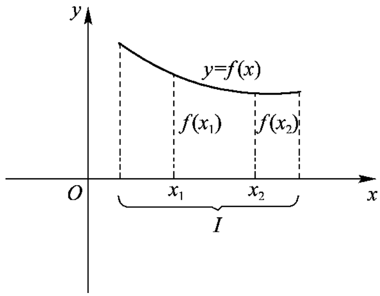


图 1-14

例 1 函数 $f(x)=x^2$ 在$[0,+\infty)$上为单调增加函数，函数 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,0]$上为单调减少函数，但是，函数 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内却不是单调函数，如图 1-15 所示.

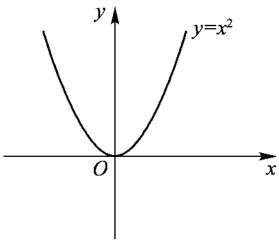


图 1-15

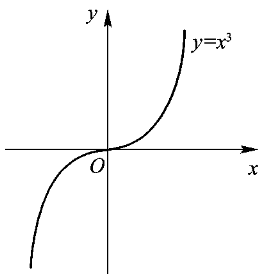


图 1-16

例 2 函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的，如图 1-16 所示.

例 3 用定义证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

证 对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}=\left(1-\frac{1}{1+x_2}\right)-\left(1-\frac{1}{1+x_1}\right)=$$
$$\frac{1}{1+x_1}-\frac{1}{1+x_2}=\frac{(1+x_2)-(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}=$$
$$\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}>0$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$，故函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

思考 指出正弦函数 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的单调区间. 在定义域$[0,2\pi]$内，$y=\sin x$ 是单调函数吗?

二、函数的有界性

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

(1) 如果存在一个常数 m,使得对于任意 $x \in D$,恒有

$$f(x) \geqslant m$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界且 m 就是 $f(x)$ 的一个**下界**;

(2) 如果存在一个常数 M,使得对于任意 $x \in D$,恒有

$$f(x) \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界且 M 就是 $f(x)$ 的一个**上界**;

(3) 如果存在两个常数 m 与 M,使得对于任意 $x \in D$,恒有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**.

这个定义表明,函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 D 上即有上界又有下界.

如果记 $\max\{|m|,|M|\}=K$,那么可得到一个等价定义:如果存在一个常数 $K>0$,使得对于任意 $x \in D$,恒有 $|f(x)| \leqslant K$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的 K 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 D 上无界. 换句话说,如果对于任何正数 K,总存在一个 $x_1 \in D$,使得 $|f(x_1)|>K$,则函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

例 4 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上就是有界函数. 因为对于任意 $x \in (-\infty,+\infty)$,恒有 $|\cos x| \leqslant 1$.

例 5 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,5)$ 内是有界的,但函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内就无界. 因为对于任意正数 M,总能找到一个数 $x_1=\dfrac{1}{M+1} \in (0,1)$,使得

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1}=M+1>M$$

从而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界.

值得注意的是,单调性和有界性是关于函数在所讨论区间上的概念,不能离开区间来谈函数的单调性和有界性.

思考 如果函数在某区间上有界,那么界是唯一的吗?5 是余弦函数 $y=\cos x$ 的上界吗?

三、函数的奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意 $x \in D$,恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任意 $x \in D$，恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的，如图 1－17 所示；**奇函数的图形关于原点是对称的**，如图 1－18 所示.

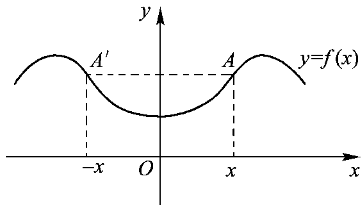


图　1－17

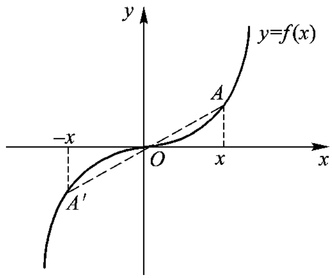


图　1－18

例 6　函数 $f(x) = \cos x, g(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 都是偶函数，因为 $\cos(-x) = \cos x$，$(-x)^2 = x^2$.

例 7　函数 $f(x) = \sin x, g(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 都是奇函数，因为 $\sin(-x) = -\sin x$，$(-x)^3 = -x^3$.

注意　不能说函数 $f(x)$ 不是奇函数就一定是偶函数，或者说不是偶函数就一定是奇函数.

例 8　函数 $f(x) = x + 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上既不是奇函数，也不是偶函数. 因为 $f(-1) = 0, f(1) = 2$，既无 $f(-1) = -f(1)$，也无 $f(-1) = f(1)$.

例 9　函数 $f(x) = \sin x + \cos x, g(x) = x^2 + x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上既不是奇函数也不是偶函数. 因为

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq -f(x) = -\sin x - \cos x$$

$$g(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3 \neq -g(x) = -x^2 - x^3$$

例 10　证明函数 $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数.

证　因为 $f(-x) = \lg(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \lg \dfrac{(\sqrt{1 + x^2} - x)(\sqrt{1 + x^2} + x)}{\sqrt{1 + x^2} + x} =$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = -\lg(x + \sqrt{1 + x^2}) = -f(x)$$

所以，函数 $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数.

注意　判断函数的奇偶性，除用定义判断外，还可以利用奇函数和偶函数之间的运算性质

来判别. 例如,两个奇函数的代数和仍为奇函数;两个偶函数的代数和仍是偶函数,奇函数与偶函数的乘积是奇函数,两个奇函数的乘积或两个偶函数的乘积是偶函数等.

例 11 证明定义在关于原点对称的区间上任何函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证 令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$. 因为

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)+f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$$

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)-f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\psi(x)$$

所以 $\varphi(x)$ 是偶函数,$\psi(x)$ 是奇函数;而

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\varphi(x)+\psi(x)$$

故函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

思考 奇、偶函数的图形各有什么特点?怎样判断一个函数的奇偶性?

四、函数的周期性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 T,使得对于任何 $x\in D$,都有

$$f(x\pm T)=f(x)\text{ 且 }(x\pm T)\in D$$

则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**,其中 T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**. 通常情况下,我们说的周期是指最小正周期,但并非每个周期函数都存在最小正周期.

例 12 函数 $\sin x$,$\cos x$ 是周期函数,最小正周期都是 2π;函数 $\tan x$,$\cot x$ 是周期函数,最小正周期是 π;函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi_0)$ 与 $y=A\cos(\omega x+\varphi_0)$ 是周期函数,最小正周期是$\frac{2\pi}{\omega}$.

但是,函数 $f(x)=C$(C 为常数),存在 $T>0$,使得 $f(x\pm T)=f(x)$,但这样的周期 T 无最小正值.

通常情况下,判断一个函数是否是周期函数的步骤如下:

(1) 将函数分解成已知其周期的函数(比如三角函数等)的代数和,再求这些周期函数的周期的最小公倍数.

例如,函数 $y=2\sin^2 x$,因为 $2\sin^2 x=1-\cos 2x$,且 $\cos 2x$ 是以 π 为周期的函数,所以 $y=2\sin^2 x$ 是以 π 为周期的函数.

(2) 列出方程 $f(x+T)-f(x)=0$,以 T 为未知量解此方程.

若解出的 T 是与 x 无关的正数,则 $f(x)$ 是周期函数;反之,如果利用一些已知的运算法则推出矛盾的结果,就可断定函数是非周期函数.

例 13 判断函数 $y=\sin x^2$ 是否为周期函数.

解 假定它是周期函数，且存在正周期 T，则

$$\sin(x+T)^2 = \sin x^2$$

令 $x=0$，得
$$\sin T^2 = 0$$
解方程，得
$$T^2 = k\pi$$
即
$$T = \sqrt{k\pi}$$
其中 $k \in \mathbf{N}$. 再令 $x=\sqrt{2}T$，得

$$\sin[(\sqrt{2}+1)^2 k\pi] = 0$$

即
$$(\sqrt{2}+1)^2 k\pi = l\pi \quad (l \in \mathbf{N})$$
则
$$(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{l}{k} \quad (l,k \in \mathbf{N})$$

由于$\dfrac{l}{k}$为有理数，而$(\sqrt{2}+1)^2$不是有理数，从而得出矛盾. 所以函数 $y=\sin x^2$ 不是周期函数.

例 14 讨论函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的初等性质.

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$|f(x)| = \left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right| \leqslant \frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1$$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x} = -f(x)$$

对于任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1) = \frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}} - \frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}} = \frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})} > 0$$

即
$$f(x_2) > f(x_1)$$

要使得 $f(x+T)=f(x)$，即

$$\frac{e^{x+T}-e^{-x+T}}{e^{x+T}+e^{-x+T}} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

易知，只有 $T=0$，故函数 $f(x)$ 不是周期函数，但函数在$(-\infty,+\infty)$上是有界的、单调增加的奇函数.

思考 函数 $y=C$（C 为常数）是周期函数吗？它有最小正周期吗？为什么？

习题 1－2

1. 讨论下列函数在指定区间上的单调性：

(1) $y=\lg x$ 在$(0,+\infty)$内；　　(2) $y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内；

(3) $y = 2x$ 在 $(0,1)$ 内；

(4) $y = -4x + 2$ 在定义域内；

(5) $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内；

(6) $y = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

2. 判断下列函数是否有界：

(1) $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$；

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$.

3. 下列函数哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$；

(2) $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$；

(3) $f(x) = x^3 + 1$；

(4) $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$；

(5) $f(x) = 2x^4 + x - 1$；

(6) $f(x) = \sin x - \cos x + 1$.

4. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y = \cos(x - 3)$；

(2) $y = \cos 4x$；

(3) $y = 1 + \sin \pi x$；

(4) $y = x\cos x + 2$.

5. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有意义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

第三节 反函数与复合函数

为了进一步研究函数的概念，以方便今后研究函数的性态，本节介绍反函数和复合函数的概念.

一、反函数

在函数定义中，规定了对于每一个 x，都有唯一的 y 与之对应，这样定义的函数又叫做单值函数，如果有两个或更多的数值 y 与之对应，就称 y 是 x 的多值函数. 本书主要讨论单值函数.

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的，任意一个变量都可根据需要作为自变量. 例如，在函数 $y = x + 5$ 中，x 是自变量，y 是因变量，根据这个式子，可以解出 $x = y - 5$，这里 y 是自变量，x 是因变量. 上面两个式子反映了同一个过程中两个变量之间地位的相对性，称它们互为反函数.

下面给出反函数的具体定义：

定义 1 设函数 $y = f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意 $y \in M$，由函数关系式 $y = f(x)$ 恰好**唯一**确定出一个 $x \in D$ 与之对应，那么认为 x 是 y 的函数，记作 $x = g(y)$，我们称上述的 $y = f(x)$ 与 $x = g(y)$ 互为**反函数**，习惯上将 $x = g(y)$ 记作

$$x = f^{-1}(y)$$

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常把 $y=f(x)$ 的反函数写作

$$y=f^{-1}(x)$$

由反函数的定义知，在定义区间上**单调**的函数必有反函数.

例 1　函数 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $x=f^{-1}(y)=\arcsin y, y\in[-1,1]$，故 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数是 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$.

若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一平面直角坐标系内，那么这两个图形关于 $y=x$ 对称.

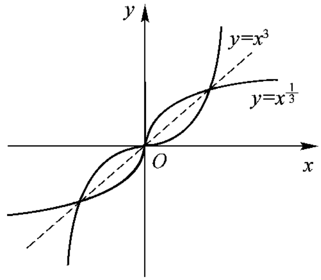


图　1-19

例 2　函数 $y=x^3$ 和函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图形如图 1-19 所示.

一般地，要求 $y=f(x)$ 的反函数，只需先从 $y=f(x)$ 中解出 x 的表达式，当该表达式也是一个函数时，再将其中的字母 x,y 进行交换即可.

例 3　求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}), x\in[1,+\infty)$ 的反函数.

解　由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，解得

$$e^y=x+\sqrt{x^2-1}$$

及

$$e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1}$$

故

$$e^y+e^{-y}=2x$$

于是

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

故所求反函数为 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, x\geqslant 0$.

判断函数的反函数是否存在，可以用以下定理.

定理 1　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的，则在 W 上 $f(x)$ 的**反函数** $f^{-1}(x)$ **存在**，且 $f^{-1}(x)$ 在 W 上也是**单调增加**或**单调减少**的.

值得注意的是，由于对于 y 的某些值，满足 $y=f(x)$ 的 x 有时不止一个，所以并非任何函数在其定义域内都存在反函数. 但是，当我们对 x 的取值范围加以限制时，也有可能存在反函数. 例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在反函数，但在 $(-\infty,0)$ 及 $[0,+\infty)$ 内却分别存在反函数 $y=-\sqrt{x}, 0<x<+\infty$ 及 $y=\sqrt{x}, 0\leqslant x<+\infty$.

对于分段函数求其反函数，只需分别求出与各子定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

例 4　设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, & -2<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，求其反函数 $f^{-1}(x)$.

解　设 $y=f(x)$，则由反函数的定义，得

$$x=\begin{cases}3y, & -2<3y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}3y, & -\dfrac{2}{3}<y<\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$$

将 x,y 互换，得所求反函数为

$$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x, & -\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

思考　函数 $y=x^2,x\in(-\infty,+\infty)$ 有反函数吗？$y=x^2,x\in(-\infty,0]$ 有反函数吗？为什么？

二、复合函数

在很多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的. 例如，在函数 $y=\tan 3x$ 中，这个函数值不是由自变量 x 来确定的，而是通过 $3x$ 来确定的. 如果用 u 表示 $3x$，那么函数 $y=\tan 3x$ 就可表示成 $y=\tan u,u=3x$. 这说明了 y 与 x 的函数关系是通过变量 u 来确定的.

具有上述关系的函数，可以给出下面的定义：

定义 2　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，就称 y 是 x 的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为**中间变量**.

函数的复合中要注意的是，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，这样函数才能复合，否则复合就没有意义.

例 5　$y=e^{\cos x}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=\cos x$ 复合而成，$y=(1+\lg x)^3$ 是由 $y=u^3$ 和 $u=1+\lg x$ 复合而成的，但函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=3+x^2$ 不能构成复合函数，因为对于任意的 x，$u=3+x^2$ 的值不在函数 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$内，从而复合出的函数 $y=\arcsin(3+x^2)$ 是没有意义的.

函数的复合也可以是多个函数的情形. 例如，$y=\lg u,u=v^2,v=x+1$，则复合函数是 $y=\lg(x+1)^2$，其中 u,v 是中间变量.

利用复合函数的概念，可以把一个较复杂的函数分解成若干个简单函数. 下面举例分析复合函数的复合过程，正确熟练地掌握这个方法，将会给以后的学习带来很多方便.

例 6　写出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=a^{a^x}$；　　(2) $y=\cos^2 x^2$；

(3) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}$；　　(4) $y=\lg(3+\sqrt{x^3-1})$.

解　(1) $y=a^u,u=a^x$;

(2) $y=u^2,u=\cos w,w=x^2$;

(3) $y=\ln u,u=\sqrt[5]{v},v=\dfrac{w}{w-1},w=\mathrm{e}^t,t=2x$;

(4) $y=\lg u,u=3+w,w=\sqrt{v},v=t-1,t=x^3$.

例 7　设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x>1\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$, $g(x)=\mathrm{e}^x$,求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解　因为 $f(x),g(x)$ 符合复合条件,所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>0\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>1\\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

值得注意的是,求分段函数的复合函数时,特别要注意不同范围内的自变量、中间变量及函数之间的依赖关系.

思考　两个函数能够复合的前提条件是什么?

习题 1-3

1. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;　　(2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$　$(ad-bc\neq 0)$;

(3) $y=1+\ln(x+2)$.

2. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y=\sqrt{1-\sin x}$;　　(2) $y=\sin x^2$;　　(3) $y=\mathrm{e}^{\cos^2 x}$;

(4) $y=(1+\lg x)^3$;　　(5) $y=\sin(2+\ln x)$;　　(6) $y=\dfrac{\tan^2 x}{2}$.

3. 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$ 及 $f(\sin x)$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f[f(x)]$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1\end{cases}$　$g(x)=\mathrm{e}^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图像.

第四节　初 等 函 数

在初等数学中已经学习过下面几类函数：

(1) 幂函数：$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$，是实常数）；

(2) 指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$，且 $a\neq1$）；

(3) 对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$，且 $a\neq1$）；

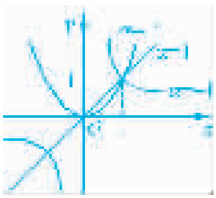
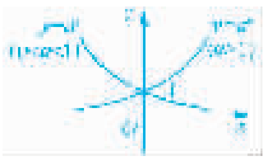
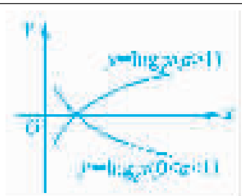
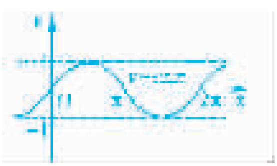
(4) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 等；

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等.

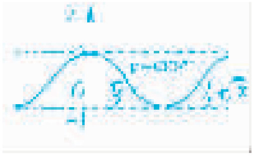
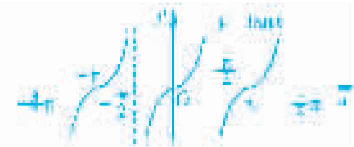
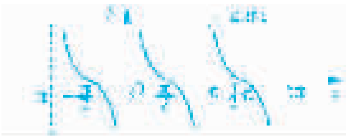
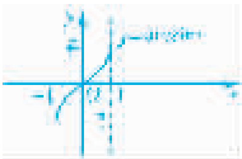
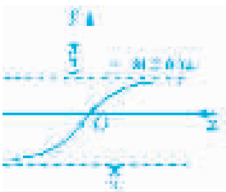
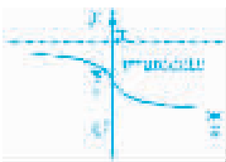
以上五类函数统称为基本初等函数.

为了今后学习和查阅方便，现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图形和特性列于表 1－1 中.

表　1－1

函数	图像	定义域和值域	主要性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）		定义域：随 α 的不同而不同，但不论 α 取何值，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义； 值域：随 α 不同而不同	若 $\alpha>0$，x^{α} 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加； 若 $\alpha<0$，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$	$a^{0}=1$； 若 $a>1$，a^{x} 单调增加；若 $0<a<1$，a^{x} 单调减少；直线 $y=0$ 为函数图像的水平渐近线
对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	$\log_{a}1=0$； 若 $a>1$，$\log_{a}x$ 单调增加；若 $0<a<1$，$\log_{a}x$ 单调减少；直线 $x=0$ 为函数图像的垂直渐近线
正弦函数 $y=\sin x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	以 2π 为周期的函数；在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加；在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$ 上单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$；奇函数

续 表

函数	图像	定义域和值域	主要性质
余弦函数 $y=\cos x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	以 2π 为周期的函数，在 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ 上单调增加，在 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 上单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$；偶函数
正切函数 $y=\tan x$		$x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期函数，在 $(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调增加；奇函数；直线 $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ 为函数图像的垂直渐进线 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
余切函数 $y=\cot x$		$x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期的函数，在 $(k\pi,(k+1)\pi)k\in\mathbf{Z}$ 内单调减少，奇函数；直线 $x=n\pi$ 为函数图像的垂直渐近线 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
反正弦函数 $y=\arcsin x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$	单调增加，奇函数
反余弦函数 $y=\arccos x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$	单调减少，非奇非偶函数
反正切函数 $y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$	单调增加；直线 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 与 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 为函数图像的水平渐近线；奇函数
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$	单调减少；直线 $y=0$ 及 $y=\pi$ 为函数图像的水平渐近线；非奇非偶函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤得到的用一个解析式子表示的函数,称为初等函数.

例如，$y=\sin^3(2x+1)$,$y=5\log_2(x^2+4x+7)$,$y=\arcsin a^{\frac{x}{3}}+x\sqrt[3]{3x+2}$ 等都是初等函数.而分段函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x-1, & x<0\end{cases}$$

是由几个式子表示的函数,因而不是初等函数.但是,由于分段函数在其子定义域内通常都是初等函数,所以仍可通过初等函数来研究它们.

在工程技术中经常要用到一类初等函数是双曲函数,它们是由指数函数 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 生成的初等函数,它们的定义和符号如下：

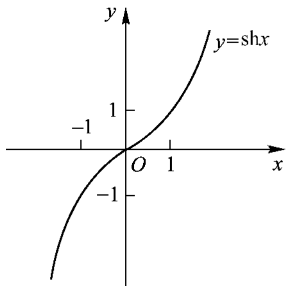


图　1 - 20

双曲正弦函数 $\text{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,其图形如图 1 - 20 所示；

双曲余弦函数 $\text{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,其图形如图 1 - 21 所示；

双曲正切函数 $\text{th}x=\dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,其图形如图 1 - 22 所示；

双曲余切函数 $\text{cth}x=\dfrac{\text{ch}x}{\text{sh}x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,其图形如图 1 - 23 所示.

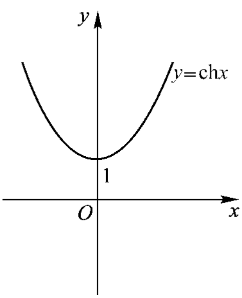


图　1 - 21

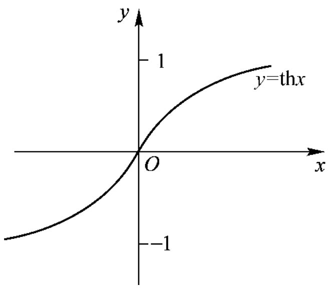


图　1 - 22

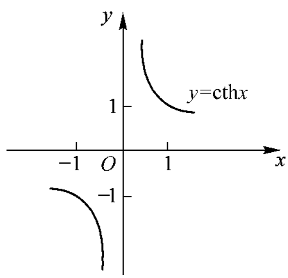


图　1 - 23

其中 $\text{sh}x$,$\text{th}x$,$\text{cth}x$ 都是奇函数,$\text{ch}x$ 是偶函数.

$\text{sh}x$,$\text{ch}x$,$\text{th}x$ 的反函数称为反双曲函数,分别记作

反双曲正弦　　　　　　　　$y=\text{arsh}x$

反双曲余弦　　　　　　　　$y=\text{arch}x$

反双曲正切　　　　$y = \operatorname{arth} x$

同样,反双曲函数可以通过自然对数函数来表示,这里不作介绍.

用数学工具解决实际问题时,往往需要建立相应的数学模型,其中一类较简单的问题是建立函数关系.下面给出两个例子.

例 1　某工厂生产电视机年产量为 x 台,每台售价 1200 元.当年产量在 500 台以内,可以全部售出.经广告宣传后又可以再多出售 300 台,每台平均广告费为 40 元,若生产再多,本年就销售不出去了.试建立本年的销售总收入 y 与年产量 x 的关系.

解　因为总收入 = 产量 × 单价,根据题意可列出函数关系如下:

$$y = \begin{cases} 1200x, & 0 \leqslant x \leqslant 500 \\ 1200 \times 500 + (1200 - 40)(x - 500), & 500 < x \leqslant 800 \\ 1200 \times 500 + 1160 \times 300, & x > 800 \end{cases}$$

例 2　某单位要建造一个容积为 V 的长方体水池,它的底为正方形.如果池底的单位面积造价为侧面积造价的 2 倍,试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

解　设底面边长为 x,总造价为 y,侧面积单位造价为 m.由已知可知水深为 $\dfrac{V}{x^2}$,侧面积为 $4x \cdot \dfrac{V}{x^2} = \dfrac{4V}{x}$,根据题意可得函数关系如下:

$$y = 2mx^2 + 4m\frac{V}{x}, \quad 0 < x < +\infty$$

思考　分段函数是初等函数吗?函数 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + \cdots$ 是初等函数吗?为什么?

习题 1 - 4

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \dfrac{2x - 1}{7}$;

(2) $y = \log_{x+1}(16 - x^2)$;

(3) $y = \log_2[\log_3(\log_4 x)]$;

(4) $y = \tan(1 + x)$.

2. 设 $f(x) = \arcsin x$,求 $f(0)$,$f(-1)$,$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$f(1)$ 的值.

3. 指出下列函数哪些是基本初等函数,哪些是初等函数?

(1) $y = \cos t$;　(2) $y = \cos(2t + \varphi)$;　(3) $y = e^x$;

(4) $y = \tan \dfrac{1}{x^2 + 1}$;　(5) $y = \arcsin \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2 + 4}}$;　(6) $y = \ln(3 + \cos e^{2x})$.

4. 利用基本初等函数的图形，作出下列函数的图形.

(1) $y=\sin 2x+1$；　　(2) $y=2e^{x+1}$；

(3) $y=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$；　　(4) $y=x|x-1|$.

5. 已知 $f^{-1}(\log_a x)=x^2+1$，求 $f(x)$.

6. 工程上为将圆周运动转化为往复直线运动(或相反)，广泛采用曲柄连杆机构(见图 1－24)，设曲柄 $AO=r$，连杆 $AB=l$，若曲柄 AO 以等角速度 ω 逆时针旋转，求滑块 B 的运动规律 $x(t)$.

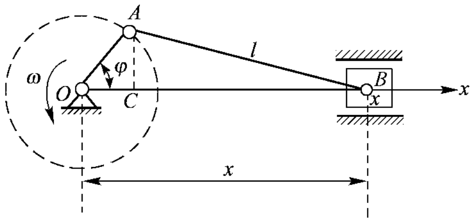


图　1－24

提示：过点 A 作 $AC\perp OB$，$x=OC+CB$，OC，CB 可分别在直角三角形 ACO，ACB 中确定，再将 $\varphi=\omega t$ 代入.

7. 有一块边长为 l(cm) 的正方形铁皮，它的四角剪去四块边长都是 x 的小正方形，形成一只没有盖的容器，求这容器的容积 V 与高 x 的函数关系.

复习题一

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(2)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$，　$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$；

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$，　$g(x)=1-x$；

(3) $f(x)=x$，　$g(x)=\ln e^x$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

4. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并确定它们的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$，　$g(x)=x^4$；

(2) $f(x) = \sqrt{1-x}$，　　$g(x) = \sqrt{x-1}$.

5. 求下列函数的反函数：

(1) $y = 1 + \log_4 x$；　　(2) $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$.

6. 已知 $f(x-1) = x^2 + x + 1$，求 $f(\dfrac{1}{x-1})$.

7. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 且对于任意 x, y 都有

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

且 $x \neq 0$ 时 $f(x) \neq 0$. 证明 $f(x)$ 为奇函数.

8. 某单位有汽车一辆，一年中的税款、保险费及司机工资等支出共 a，另外，行驶单位路程需油费 b，试写出一年中平均每公里费用 y 与行驶路程 x 的函数关系式.

9. 一物件由静止开始作直线运动，前 10 s 内作匀加速运动，加速度为 2 cm/s^2，10 s 后作匀速运动，运动开始时路程为零. 试建立路程 s 与时间 t 之间的函数关系.

第二章　极限与连续

极限与连续是高等数学中的两个重要概念. 极限既是用来刻画变量在变化过程中变化趋势的一个基本概念,又是研究高等数学的重要工具和思想方法. 连续是函数的一种重要性态,也是高等数学中的一个主要研究对象. 本章将介绍极限与连续等基本概念及性质,理解极限的概念是学好高等数学的关键.

第一节　数列的极限

函数给出了变量之间的对应关系,但研究变量的变化仅靠对应关系是不够的,还需要通过变量的变化趋势来研究,这便是极限的概念. 极限的概念是由求实际问题的精确解答而产生的. 我国古代数学家刘徽于公元 263 年创立了"割圆术",它就是借助于圆的一串内接正多边形的面积去逼近圆的面积,这就是极限思想最早在几何上的应用. 同时这也使得我们认识到极限方法是在解决实际问题中逐渐形成的.

为了研究一般函数的极限,下面先讨论一种特殊函数的极限 —— **数列的极限**.

一、数列

(一) 数列的概念

定义 1　设 $y_n = f(n)$ 是定义在正整数集上的一个函数,当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 时,其相应的函数值所排成的一列数 $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots$ 称为一个无穷数列,简称**数列**,记作$\{y_n\}$或$\{f(n)\}$. 其中数列中的每一个数都称为数列的**项**,数列$\{y_n\}$的第 n 项 y_n 称为数列的**一般项**或**通项**.

例如:$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$,记作$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$,其一般项为$\dfrac{1}{2^n}$;

又如:$1,-\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{3^2},\cdots,\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2},\cdots$,记作$\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right\}$,其一般项为$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

(二) 有界数列

定义 2　对数列$\{y_n\}$,如果存在两个实数 m, M,使得

$$m \leqslant y_n \leqslant M \quad (n = 1,2,\cdots)$$

那么称$\{y_n\}$为**有界数列**,其中 m, M 分别称为数列$\{y_n\}$的下界与上界. 否则,称$\{y_n\}$为**无界数列**.

对于数列的有界概念，还有如下的等价定义，即：

如果存在 $M>0$，使得 $|y_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，那么称 $\{y_n\}$ 为有界数列，M 称为数列 $\{y_n\}$ 的界.

（三）单调数列

定义 3 设数列 $\{y_n\}$，如果 $y_n\leqslant y_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，那么称数列 $\{y_n\}$ 为**单调增加数列**. 反之，如果 $y_n\geqslant y_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，那么称数列 $\{y_n\}$ 为**单调减少数列**. 单调增加数列和单调减少数列统称为**单调数列**.

如数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是单调减少数列，数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 是单调增加数列，数列 $\{(-2)^n\}$ 不是单调数列.

（四）子列

从数列 $\{y_n\}$ 中任意选出部分项（无穷项），保持原来的次序，从左往右排列为

$$y_{n_1},y_{n_2},\cdots,y_{n_k},\cdots$$

称此数列为 $\{y_n\}$ 的**子数列**（简称**子列**），记为 $\{y_{n_k}\}$. 其中 $k(k=1,2,\cdots)$ 表示 y_{n_k} 在子列中的第 k 项，n_k 表示在原来数列 $\{y_n\}$ 中的第 n_k 项.

思考 五个数 $1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27},\dfrac{1}{81}$ 能构成一个数列吗？n 个数 $1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\cdots,\dfrac{1}{3^{n-1}}$ 呢？为什么？

二、数列的极限

考察下面一组数列：

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}:1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$；

(2) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}:\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$；

(3) $\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}:2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$；

(4) $\{2^n\}:2,4,8,16,\cdots,2^n,\cdots$；

(5) $\left\{\dfrac{n}{8}\right\}:\dfrac{1}{8},\dfrac{2}{8},\dfrac{3}{8},\cdots,\dfrac{n}{8},\cdots$；

(6) $\{(-1)^n\}:-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$.

观察上面六个数列的变化趋势或性态，就不难发现：当自变量 n 无限增大时，有的数列的通项 y_n 无限接近于（或趋于）某个常数 A. 例如，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 当自变量 n 无限增大时，$\dfrac{1}{n}$ 趋于 0；数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当自变量 n 无限增大时，$\dfrac{n}{n+1}$ 和 $\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 都无限接近于 1.

将数列的上述变化趋势用数学的语言表示，就得到数列极限的定义.

定义 4　对于数列$\{y_n\}$，如果当自变量n无限增大时，y_n趋于某个确定的常数A，那么A叫做数列$\{y_n\}$的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad \text{或} \quad y_n \to A \quad (n\to\infty)$$

此时，也称数列$\{y_n\}$收敛于A. 如果数列$\{y_n\}$的极限不存在，就说数列$\{y_n\}$是发散的.

由上面的定义可知，数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$的极限为0，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$的极限为1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；数列$\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$的极限为1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$. 因为数列$\{2^n\}$和$\left\{\dfrac{n}{8}\right\}$当自变量$n$无限增大时，$2^n$和$\dfrac{n}{8}$都趋于正无穷大；数列$\{(-1)^n\}$当自变量$n$无限增大时，$(-1)^n$振荡且不趋于任何确定的数值，所以数列$\{2^n\}$，$\left\{\dfrac{n}{8}\right\}$，$\{(-1)^n\}$的极限都不存在. 但数列$\{2^n\}$和$\left\{\dfrac{n}{8}\right\}$的极限的不存在原因是当自变量$n$无限增大时，$\{2^n\}$和$\left\{\dfrac{n}{8}\right\}$都趋于正无穷大，为了表示其性态，可以记它们的极限为正无穷大，即$\lim\limits_{n\to\infty}2^n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{8}=+\infty$.

例 1　观察下列数列的极限：

(1) $y_n = 1+\dfrac{1}{n}$；　(2) $y_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$；　(3) $y_n = 3$.

解　通过观察可知，以上数列有如下变化趋势：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}3=3$.

一般地，任何一个常数数列(即数列的每个项都是同一个常数构成的)的极限都是这个常数本身，即$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$($C$为常数).

思考　"如果$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=3$，那么$f(x)=3$."这个命题对吗？反之呢？为什么？

三、数列极限的性质和运算

(一) 数列极限的性质

下面介绍数列极限的几个重要性质.

性质 1（极限的唯一性）　如果数列$\{y_n\}$有极限(或收敛)，那么它的极限是**唯一**的.

性质 2（收敛数列的有界性）　如果数列$\{y_n\}$有极限，那么数列$\{y_n\}$一定有界.

性质 3（收敛数列的保号性）　如果给定数列$\{y_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$a>0$(或$a<0$)，那么从

某一项起，都有 $y_n > 0$(或 $y_n < 0$).

性质 4 (子列的收敛性) 数列$\{y_n\}$收敛于 a 的充分必要条件是数列$\{y_n\}$的任一子数列$\{y_{n_k}\}$收敛于 a.

性质 5 (夹逼准则) 如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足下列条件：

(1)$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，$(n = 1,2,3,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

则数列$\{y_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

注意 在计算数列极限时，夹逼准则对某些极限的求解带来很大的方便.

例 2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}$.

解 因为 $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$，由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$.

例 3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\,(a > 0)$.

解 分情况讨论：

当 $a = 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$；

当 $a > 1$ 时，令$\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$，则 $x_n > 0$.

由二项式公式可知

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2!}x_n^2 + \cdots + x_n^n \geqslant 1 + nx_n$$

从而
$$1 < \sqrt[n]{a} = 1 + x_n \leqslant 1 + \frac{a-1}{n}$$

由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$；当 $0 < a < 1$ 时，由于$\dfrac{1}{a} > 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} = 1$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

注意 可以利用类似的方法证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

性质 6 **单调有界数列必有极限.**

(二) 数列极限的运算法则

设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$的极限都存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = AB$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

以上数列极限的四则运算可以推广到有限多个收敛数列的情形.由积的运算可以得到下面两个结论:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}Cx_n=C\lim\limits_{n\to\infty}x_n=CA\quad$ (C 为常数);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^m=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^m=A^m\quad$ (m 为正整数).

例 4　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}$.

解　根据极限的四则运算,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}=\frac{3}{2}$$

例 5　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

解　由于

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}$$

例 6　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

解　由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1$$

根据夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$$

思考　有界数列一定有极限吗?单调数列一定有极限吗?单调有界数列呢?

习题 2－1

1. 写出下列数列的前五项：

(1) $y_n = \frac{1}{3^n}$；　　(2) $y_n = 1 - \frac{1}{2^n}$；

(3) $y_n = (1 + \frac{1}{n})^n$；　　(4) $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2. 观察下列数列当 $n \to \infty$ 时的变化趋势，并指出哪些有极限，极限值是多少?哪些没有极限?

(1) $y_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$；　(2) $y_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$；　(3) $y_n = \frac{n-1}{n}$；

(4) $y_n = 2n$；　(5) $y_n = \frac{2n+1}{n^2}$；　(6) $y_n = \frac{2^n + (-1)^n}{2^n}$.

3. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3+1}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n - (-1)^n}{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}})(1 + \sqrt[n]{2})$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n}$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3+\cos n}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n})$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right]$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$；

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n^3-4} - (n-1)(n+1)}{n}$.

第二节　函数的极限

数列是定义在正整数集上的函数，它的自变量 n 具有“离散变量”（只能取正整数）和趋于正无穷大一种变化状态的两个特点．而对于定义在区间上的函数，它的自变量 x 是“连续变量”（即 x 能取得定义区间中的任何值），并且 x 有多种变化状态．因此，在学习函数极限时，只要注意到这些不同点，就很容易理解函数极限的概念、理论和方法．

一、函数极限的概念

把数列极限概念中的函数为 $f(n)$ 而自变量的变化过程为 $n \to \infty$ 等特殊性撇开，可以引入

函数极限的概念.在自变量的某个变化过程中,如果对应的函数值无限接近于某个确定的数值,那么这个确定的数值就叫做在这一变化过程中函数的极限.由于自变量的变化不同,函数的极限就表现为不同的形式.

下面介绍自变量 x 变化过程的两种不同情形时函数 $f(x)$ 的极限.

(一) 自变量趋于有限值时函数的极限

现在考虑自变量 x 无限接近于有限值 x_0 或说趋于有限值 x_0 时,对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形.有如下定义.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域内有定义,如果在 $x \to x_0$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A,那么称 A 是**函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A(x \to x_0)$$

从定义 1 中可以看出,函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否存在极限与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

例如,$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$,如图 2－1 所示.这里函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在点 $x = 1$ 处没有定义,但是它的极限却存在且为 2.

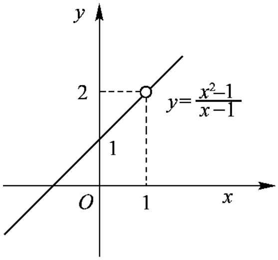


图　2－1

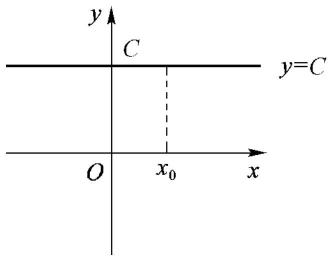


图　2－2

例 1　求下面函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} C$($C$ 为常数);　　(2) $\lim\limits_{x \to x_0} x$;　　(3) $\lim\limits_{x \to 1}(x + 2)$.

解　(1) 因为 C 为常数,当 x 无限接近于 x_0 时,C 不变,如图 2－2 所示,因此 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$;

(2) 因为当 $x \to x_0$ 时,$x \to x_0$,如图 2－3 所示,因此 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$;

(3) 因为当 x 无限接近于 1 时,$x + 2$ 就无限接近于 3,如图 2－4 所示,因此 $\lim\limits_{x \to 1}(x + 2) = 3$.

在考虑函数 $f(x)$ 的极限的时候,如果自变量 x 沿着小于(或大于)x_0 的方向趋于 x_0,那么称 x 从左(或右)侧趋于 x_0,记为 $x \to x_0^-$(或 $x \to x_0^+$).

如果当 $x \to x_0^-$(或 $x \to x_0^+$)时,$f(x)$ 无限接近于确定的数值 A,那么称 A 是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左(或右)极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad (\text{或} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A)$$

左极限和右极限统称为单侧极限.

根据 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义，以及左右极限的定义，容易得到下面的结论：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

因为当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在，或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，但不相等时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的极限是不存在的. 因此上述结论可以用来判断函数的极限是否存在.

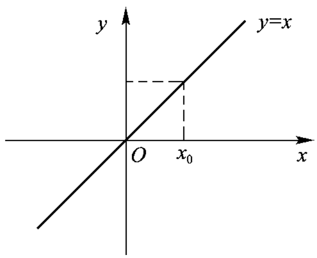


图　2－3

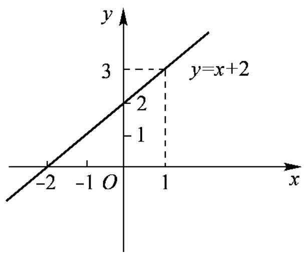


图　2－4

例 2　求函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x<1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的极限.

解　因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(3x-1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

从而

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

所以

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

例 3　函数 $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x>0 \\ -x+1, & x\leqslant 0 \end{cases}$，试判断 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-x-1) = -1$$

从而

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 4　函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x>1 \\ 0, & x\leqslant 1 \end{cases}$，试判断 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

(二) 自变量趋于无穷大时函数的极限

现在考虑自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大即趋于无穷大时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形，有如下定义.

定义 2　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果在 $x\to\infty$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么 A 叫做**函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**. 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

如果把 x 取正值且无限增大，称为 x 趋于正无穷大，记作 $x\to+\infty$，而把 x 取负值且 $|x|$ 无限增大，称为 x 趋于负无穷大，记作 $x\to-\infty$. 这样，函数 $f(x)$ 在这两种极限过程下的极限，分别记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

根据上述定义，显然有下面结论成立：

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的**充分必要条件**是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

因为当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 中至少有一个不存在，或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在，但不相等时，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 的极限是不存在的. 因此上述结论也可以用来判断函数的极限是否存在.

例 5　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解　由函数的图像(见图 2－5) 容易看出，当 x 往左或右无限增大时，$f(x)$ 都无限接近于 0. 所以

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

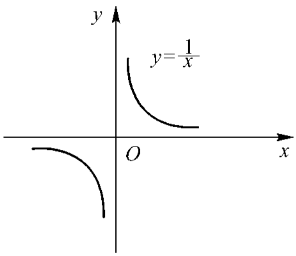


图　2－5

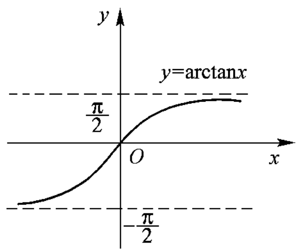


图　2－6

例 6　考察极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解　因为从图形(见图 2－6) 上可以看出

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim_{x\to-\infty}\arctan x$$

所以极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

思考　求函数在一点的极限时，什么情况下要分左右极限考虑？什么情况下不用分左右极限考虑？为什么？

二、函数极限的性质

由数列极限的性质类似地得到函数极限的几个性质.

性质 1（函数极限的唯一性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么它的极限是唯一的.

性质 2（局部有界性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界.

性质 3（局部保号性）　如果给定函数 $f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），那么在 x_0 的某一去心邻域内，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

性质 4（夹逼准则）　如果函数 $g(x)$，$f(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内，满足下列条件：

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

则函数 $f(x)$ 的**极限存在，且** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

以上极限性质是以 $x\to x_0$ 为例，对其他极限过程有同样的结论成立. 这里不再叙述.

思考　有界函数一定有极限吗？单调函数一定有极限吗？单调有界函数呢？

习题 2-2

1. 判别下列函数在给定的自变量变化趋势下极限是否存在. 若存在，值为多少？

(1) $x\to+\infty$，$f(x)=\arctan x$；　(2) $x\to 0^-$，$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $x\to\dfrac{1}{2}$，$f(x)=x^2$；　(4) $x\to 1$，$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$；

(5) $x\to 0$，$f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$；　(6) $x\to+\infty$，$f(x)=x(1+\sin x)$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$，讨论当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

3. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

第三节　函数极限的运算法则

一、函数极限的运算法则

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则

(1) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = AB$；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

以上函数极限的四则运算可以推广到有限多个收敛函数的情形. 由积的运算可以得到下面两个结论：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = CA$；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f^m(x) = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^m = A^m$　(m 为正整数).

例 1　求 $\lim\limits_{x \to 3}(3x^2 + 2x + 1)$.

解　$\lim\limits_{x \to 3}(3x^2 + 2x + 1) = 3\lim\limits_{x \to 3} x^2 + 2\lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 1 = 3 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 34$

例 2　求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$.

解　这里分母的极限不为 0，故

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 5\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 3} = \frac{(\lim\limits_{x \to 2} x)^3 - 1}{(\lim\limits_{x \to 2} x)^2 - 5 \times 2 + 3} = -\frac{7}{3}$$

例 3　求 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$.

解　由于分母的极限为 0，故不能直接用商的运算法则，但是当 $x \neq 3$ 时，

$$\frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{x + 3}$$

所以
$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{6}$$

例 4　求 $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{2}{1 - x^2}\right)$.

解　因为 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1 - x}$ 和 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2}{1 - x^2}$ 的极限不存在，故不能直接使用极限的运算法则. 当 $x \neq 1$ 时，

$$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1+x-2}{1-x^2}=-\frac{1}{1+x}$$

所以
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{1}{2}$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2-4x+5}$.

解 将分子、分母同除以最高次幂 x^2，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=$$

$$\frac{2+3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{3-4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

例 5 是下列一般情形的特例，即当 $a_0\neq 0, b_0\neq 0, m$ 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$$

成立.

利用这个结果可以很方便地求解有理分式当 $x\to\infty$ 时的极限.

思考 下面两个式子计算过程对吗？为什么？

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty-\infty=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}=\dfrac{-1}{0}=\infty$

二、复合函数的极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(1-\sin x)$.

解 因为
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)=0, \lim_{u\to 0}\cos u=1$$

由复合函数求极限法则知

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(1-\sin x)=1$$

例 7 求$\lim\limits_{x\to 0}\sin(\mathrm{e}^x)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x=1$,$\lim\limits_{u\to 1}\sin u=\sin 1$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\sin(\mathrm{e}^x)=\sin 1$.

三、两个重要极限

(一)重要极限 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

当 x 取一系列趋于零的数值时,得到$\dfrac{\sin x}{x}$ 的一系列对应数值,如表 2-1 及图 2-7 所示.

表 2-1

x/rad	-1.0	-0.7	-0.3	-0.01	$\cdots\to 0\leftarrow\cdots$	0.01	0.3	0.7	1.0
$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$	0.84147	0.92031	0.98507	0.99998	$\cdots\to 1\leftarrow\cdots$	0.99998	0.98507	0.92031	0.84147

从表 2-1 及图 2-7 可以看出,当 x 无限趋于零时,$\dfrac{\sin x}{x}$ 的值无限趋于 1. 这说明了当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{\sin x}{x}$ 的极限存在且等于 1,即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

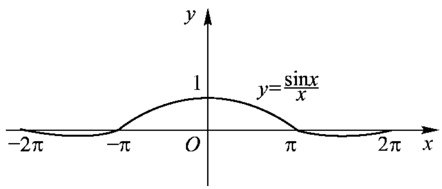


图 2-7

该极限的基本特征是:分子分母的极限值均为零,即$\dfrac{0}{0}$ 型,且分母中的变量与分子正弦函数中的变量相同.

根据它的基本特征,可写出它的推广形式如下:

若 $\varphi(x)\neq 0$,而$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1$,其中 x_0 可以为 0、常数或无穷大.

下面给出利用重要极限 1 来求极限的几个例子.

例 8 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{2}{3}$

例 10　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}})^2=\dfrac{1}{2}$

(二) 重要极限 2　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

先观察当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数$(1+\dfrac{1}{x})^x$ 的变化趋势，见表 2－2.

表　2－2

x	$-\infty\leftarrow\cdots$	$-1\ 000\ 000$	$-10\ 000$	-10	1	10	10 000	1 000 000	$\cdots\to+\infty$
$f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$	…	2.718 28	2.718 40	2.867 97	2	2.593 74	2.718 15	2.718 28	…

从上表可以看出，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数$(1+\dfrac{1}{x})^x$ 的值无限趋于 2.718 28…($\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\cdots$). 这说明了当 $x\to\infty$，函数$(1+\dfrac{1}{x})^x$ 的极限存在且等于 e. 即

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$$

在上式中，设 $u=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$，有$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$.

该极限的基本特征是：底数的极限值为 1，指数的极限是无穷大，即 1^∞ 型，且指数与底数中第二项(记为 $\varphi(x)$)互为倒数，底数为 $1+\varphi(x)$.

根据它的基本特征可以把它推广为下面形式：

若 $\varphi(x)\neq 0$，而$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$. 其中 x_0 可以为 0，常数或无穷大.

下面给出利用重要极限 2 来求极限的几个例子.

例 11　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{-x})^{-x}]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$

例 12　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}]^3=e^3$

例 13　设现有本金 100 元，如果用连续复利计算，年利率为 8%，问 1 年末可得本利和为多少？

解　设复利一年计算 1 期，则一年末的本利和为

$$100(1+0.08)^1=108\text{ 元}$$

一年计息 2 期，一年末的本利和为

$$100(1+\frac{0.08}{2})^2=108.16\text{ 元}$$

一年计息 12 期，一年末的本利和为

$$100(1+\frac{0.08}{12})^{12}=108.30\text{ 元}$$

一年计息 100 期，一年末的本利和为

$$100(1+\frac{0.08}{100})^{100}=108.325\ 2\text{ 元}$$

同理，若一年计算 n 次，则一年末的本利和为

$$100(1+\frac{0.08}{n})^n(\text{元})$$

设想 n 无限增大，连续复利计算，则当 $n\to\infty$ 时，其极限为

$$\lim_{n\to\infty}100(1+\frac{0.08}{n})^n=100e^{0.08}\approx 108.328\ 7\text{ 元}$$

所以 1 年末的本利和约为 108.328 7 元.

思考　能用重要极限 1 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ 吗？为什么？

习题 2 - 3

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\frac{2}{x^2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{x+1}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-3x}$；　(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{2x}$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+5}{3x^2-x+1}$.

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，$g(x)\neq 0$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-bg(x)}{g(x)}=0$.

4. 若 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^3+\dfrac{2x^2+1}{x+1}+2\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，求 $f(x)$.

5. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，讨论 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 的可能情况，并举例说明.

第四节　无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 1　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，$f(x)=2x-4$ 是 $x\to 2$ 时的无穷小，而不是 $x\to 0$ 时的无穷小；$g(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注意　无穷小是一个变量（或函数），而不是一个定数，所以不能把无穷小和很小的数（例如百万分之一）混为一谈，只有零是可以作为无穷小的唯一的常数，因为在任何极限过程中，均有 $\lim\limits_{x\to x_0} 0=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} 0=0$ 成立.

根据极限的性质和四则运算法则，可以证明下列有关无穷小的性质：

性质 1　有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

性质 2　有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

推论 1　常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

推论 2　有限个无穷小的乘积仍是无穷小

注意　性质 1 和推论 2 都不能推广到无穷多个无穷小；另外，两个无穷小之商未必是无穷小.

例如，x 和 $3x$ 都是当 $x\to 0$ 时的无穷小，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{x}{3x}$ 不是当 $x\to 0$ 时的无穷小.

例 1　证明 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证　因为 $\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数，且当 $x\to 0$ 时，x 为无穷小，所以当 $x\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，故有

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

关于函数极限与无穷小的关系有下面定理：

定理 1　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ **的充分必要条件是**

$$f(x) = A + \alpha$$

其中 α 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

证　充分性：因为 $\alpha = f(x) - A$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小，根据无穷小的定义，

$$\lim_{x \to x_0} \alpha = 0, \quad \lim_{x \to x_0} [f(x) - A] = 0$$

由极限的四则运算法则，可得

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \{A + [f(x) - A]\} = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} [f(x) - A] = A + 0 = A$$

必要性：设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，由极限的四则运算法则，可得

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - A] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0$$

令 $\alpha = f(x) - A$，则 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

该定理表明，函数极限存在的充分必要条件为函数可表示为它的极限值与一个无穷小和的形式. 这个定理也适合用于 $x \to \infty$ 的情形.

思考　无穷小是很小的数吗？无穷多个无穷小的和一定是无穷小吗？无穷多个无穷小的积一定是无穷小吗？

二、无穷大

定义 2　如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，**就称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大量**，简称**无穷大**.

当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大的函数 $f(x)$，用极限定义来说，极限是不存在的，但为了便于叙述函数的这一性态，我们也说"函数的极限是无穷大"，并记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

必须注意到，无穷大是一个绝对值可以任意大的变量（或函数），而不是一个很大的数，不能与很大的数（例如 100 万）混为一谈.

例如，由 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x^2 - 4} = \infty$ 知 $\dfrac{1}{x^2 - 4}$ 是 $x \to 2$ 时的无穷大；由 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ 知 e^x 是 $x \to +\infty$ 时的无穷大.

关于无穷小与无穷大之间有如下关系：

定理 2　在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为**无穷大**，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为**无穷小**；反之，如果 $f(x)$ 为**无穷小**，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为**无穷大**.

下面利用无穷大与无穷小之间的关系来求一些函数的极限.

例 2　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$.

解　因为$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$,所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-2}{x^2+3}$.

解　因为
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^3-x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}}=0$$
所以
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-2}{x^2+3}=\infty$$

思考　无穷大是很大的数吗?如果函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷大,那么$\dfrac{1}{f(x)}$是当 $x\to 2$ 时的无穷小吗?

三、无穷小的比较

我们知道,当 $x\to 0$ 时,$2x$,x^2,$\sin x$ 都是无穷小,而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2}=\infty$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,两个无穷小之比的极限的各种不同情况,反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度不同.

下面我们就无穷小之比的极限存在或为无穷大时,来说明两个无穷小间的比较.

定义 3　设 $\alpha(x)$,$\beta(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷小,且 $\alpha(x)\neq 0$.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$,则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶无穷小,也称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **低阶无穷小**;

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=k\neq 0$,则称$\beta(x)$与$\alpha(x)$**同阶无穷小**,特别地,当$k=1$时,称$\beta(x)$与$\alpha(x)$**等价无穷小**,记作
$$\alpha(x)\sim\beta(x),(x\to x_0)$$

例如,因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0$,所以当 $x\to 0$ 时,x^2 是比 $2x$ 高阶无穷小,$2x$ 是比 x^2 低阶无穷小;因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,所以当 $x\to 0$ 时,$\sin x$ 与 x 是等价无穷小,记为 $\sin x\sim x$.

等价无穷小对化简极限计算非常有用,常用的**等价无穷小**如下:

当 $x\to 0$ 时,

$\sin x\sim x$　　$\tan x\sim x$　　$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

$\ln(1+x)\sim x$　　$e^x-1\sim x$　　$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$

关于等价无穷小在求极限中的应用，有下面定理：

定理 3　设当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x) \sim \alpha'(x)$，$\beta(x) \sim \beta'(x)$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$ 存在，则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$$

证　因为

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{\beta(x)}{\beta'(x)} \cdot \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$$

两边同时取极限，得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\beta'(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$$

根据此定理，在求两个无穷小之比的极限时，如果所求极限不好求，可用分子、分母各自的等价无穷小来替代，如果选择适当，可以简化运算.

下面给出几个利用等价无穷小来计算极限的例子.

例 4　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\ln(1+3x)}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x$，$\ln(1+3x) \sim 3x$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

例 5　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\tan^2 3x}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$\tan 3x \sim 3x$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{(3x)^2} = \frac{1}{18}$$

例 6　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}-1}{\sin^2 x}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\sqrt[4]{1+x^2}-1 \sim \dfrac{1}{4}x^2$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}-1}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4}x^2}{x^2} = \frac{1}{4}$$

必须指出的是，在用等价无穷小的替代时，只有对分子分母中的**乘积因子**才能替代，而对函数中的加减运算的项不能替代.

例 7　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x} \cdot \dfrac{1-\cos x}{x^2} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{x} \cdot \dfrac{x^2}{2x^2} \right) = \dfrac{1}{2}$

如果直接用等价无穷小替代，那么有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，这样做就得出了错误的答案. 这是因为在条件 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 之下，一般没有 $\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$ 的结论.

思考 常见的等价无穷小有哪些?在计算极限时，什么情况下可以用等价无穷小替代?什么情况下用等价无穷小替代会出现错误?

习题 2－4

1. 下列结论是否正确，为什么?

(1) 某变量在变化过程中绝对值越变越小，则这个变量为无穷小;

(2) 某变量在变化过程中变得要多么小就有多么小，则这个变量为无穷小;

(3) 任何一个定数都不是无穷小.

2. 下列变量在给定的变化过程中哪些是无穷小?哪些是无穷大?

(1) $y=\dfrac{1+2x}{x^2}\quad(x\to 0)$;　　(2) $y=\dfrac{x+1}{x^2-9}\quad(x\to 3)$;

(3) $y=2^{-x}-1\quad(x\to 0)$;　　(4) $y=\ln x\quad(x\to 0^+)$.

3. 利用无穷小等价代换求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{3x^3+4\tan^2 x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}(a\neq 0)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cot 3x$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$　(n 为自然数);　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\tan x}{(1-\cos x)^{3/2}}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\arcsin x}{\ln(1+2x)(1-\cos 2x)}$.

4. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x}}=1$，试确定 a 和 b 的值.

5. 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是无穷小，且 $\alpha(x)-\beta(x)\neq 0$. 证明：当 $x\to x_0$ 时，$e^{\alpha(x)}-e^{\beta(x)}$ 与 $\alpha(x)-\beta(x)$ 是等价无穷小.

第五节　函数的连续性与间断点

在自然界中有许多现象，如季节的变化、地壳的变迁、冰块的融化等都是连续地变化着的. 在很短的时间内，它们的变化都是很微小的，这种现象在函数关系上的反映，就是所谓的函数的连续性. 本节将利用函数极限的概念讨论函数的连续性概念与间断点的分类.

一、函数的连续性概念

下面先引入增量的概念，然后来描述连续性，并引出函数的**连续性**的定义.

(一) 函数的增量

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在这个邻域内从 x_0(初值) 变化到 x_1(终值) 时，终值与初值之差 x_1-x_0 叫做自变量的增量，记作

$$\Delta x=x_1-x_0$$

相应地，函数的终值 $f(x_1)$ 与初值 $f(x_0)$ 之差

$$f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

叫做函数的增量，记作 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

这个关系式的几何解释是函数的增量表示当自变量从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，曲线上对应点的纵坐标的增量，如图 2-8 所示.

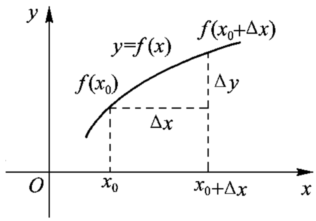


图　2-8

应该注意增量记号 Δx, Δy 是不可分割的整体，增量 Δx 可正、可负，增量 Δy 可正、可负或为零.

(二) 函数的连续性

下面从函数图像上来看函数在给定点 x_0 处的变化情况.

从图 2-8 中可以看出，函数 $y=f(x)$ 的图像是连续不断的曲线，而在图 2-9 中，函数 $y=g(x)$ 的图像在点 $x=x_0$ 处断开了. 因而可以说函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处是连续的，而函数 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有间断.

从图 2-9 中可以看到函数 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 到 $x_1=x_0+\Delta x$ 时，当 Δx 趋于零时，但 Δy 并不趋于零，而在图 2-8 中，当 Δx 趋于零时，Δy 相应地也趋于零. 通过以上分析可知，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处是连续的特征是：当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. 函数 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处断开的特征是：当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 并不趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y\neq 0$. 由此得到函数在点 x_0 处连续的定义：

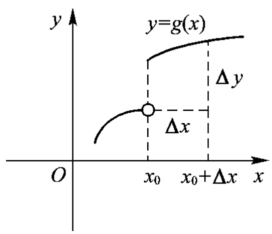


图　2-9

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量 x 在 x_0 处的增量 Δx 趋于零时，函数 $y=f(x)$ 相应的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

那么称**函数** $f(x)$ **在点** x_0 **处连续**，其中 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的**连续点**.

在上面定义中，如果记 $x=x_0+\Delta x$，那么 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$. 其中 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$；$\Delta y\to 0$ 时，$f(x)\to f(x_0)$. 于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续也可以定义为：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，

且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

由此定义知，函数在点 x_0 连续必须满足下面三个条件：

(1) 在点 x_0 的某个邻域内有定义；

(2) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

(3) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 的值等于该点的函数值 $f(x_0)$.

以后常用这三个条件来讨论函数 $f(x)$ 在某点处是否连续.

例 1　讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$，在 $x = 3$ 处是否连续.

解　首先，函数 $f(x)$ 在 $x = 3$ 处有定义，且 $f(3) = 1$；

其次，求极限

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x - 3} = 1$$

于是

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

所以，函数 $f(x)$ 在 $x = 3$ 处连续.

由函数的左右极限的定义，相应地可以得到函数**左连续**及**右连续**的定义.

如果

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)(\text{或} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0))$$

那么称**函数 $f(x)$ 在点 x_0 左(或右)连续**.

显然，$f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 既要左连续又要右连续.

在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续，如果区间包括端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例 2　讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 \leqslant x < 1 \\ x^2 + 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ 在点 $x = 1$ 处的连续性.

解　因为 $f(1) = 2$，且

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2$$

故

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$$

即函数在点 $x = 1$ 处是连续的.

例 3　讨论函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是否连续.

解　$y = \sin x$ 的图形如图 2-10 所示.

容易看出，其图形在区间$(-\infty,+\infty)$是一条连续不间断的曲线，因而说函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内是连续的.

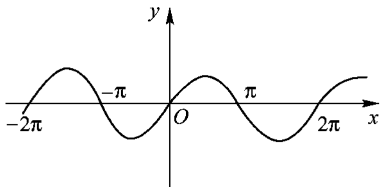


图　2-10

思考　如何判断函数在某一点是否连续？函数在某一点极限存在与函数在该点连续之间是什么关系？

二、函数的间断点

根据定义1，函数$y=f(x)$在点x_0处连续的条件是：

(1) 函数$y=f(x)$在点x_0某个邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

以上三条同时满足，则函数$y=f(x)$在点x_0处连续，如果其中任何一条不满足，则称函数$y=f(x)$在点x_0处间断，其中x_0叫做函数$f(x)$**的不连续点**或**间断点**.

例 4　讨论函数$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$的间断点.

解　因为函数$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$在点$x=2$处没有定义，所以点$x=2$是函数$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$的间断点，如图2-11所示.

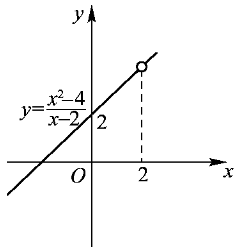


图　2-11

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

如果补充定义：令$x=2$时，$f(x)=4$，则所给函数在$x=2$处连续.所以$x=2$称为该函数的**可去间断点**.

例 5　讨论函数$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$的间断点.

解　函数$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$，在点$x=1$处有定义(见图2-12)，且

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=2$$

但
$$\lim_{x\to 1}f(x)=2\neq f(1)=1$$

所以点$x=1$是函数$f(x)$的间断点.

如果改变函数$f(x)$在$x=1$处的定义：令$f(1)=2$，则$f(x)$在$x=1$处成为连续.所以$x=1$称为该函数的可去间断点.

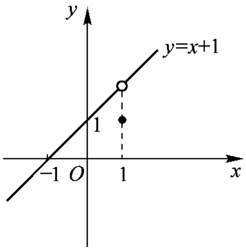


图 2-12

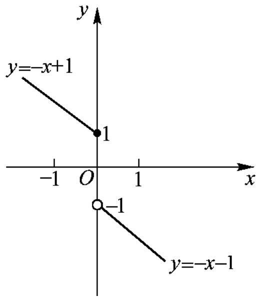


图 2-13

例 6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x>0\\ -x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的间断点.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x+1)=1,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x-1)=-1$$

从而

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在,所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点,如图 2-13 所示.

因为函数 $y=f(x)$ 的图形在 $x=0$ 处产生跳跃现象,我们称 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

如果点 x_0 为间断点,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在,那么点 x_0 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**,其余的间断点称为**第二类间断点**.

对于第一类间断点 x_0,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,通过补充或改变函数在 x_0 的函数值,使得函数在 x_0 点连续,那么称 x_0 为可去间断点;如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在但是它们的值不相等,那么称 x_0 是跳跃间断点.

对于第二类间断点 x_0,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在. 见下面几个例题.

例 7 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 在点 $x=3$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在点 $x=3$ 处没有定义,$x=3$ 是间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$,所以 $x=3$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点,通常又称为**无穷间断点**.

例 8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x>0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$ 的间断点并指出其间断类型.

解　因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 不存在，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点且为第二类间断点.

例 9　函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的左极限和右极限都不存在，即

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

所以 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\tan x$ 的第二类间断点.

思考　函数的间断点有哪几种类型？

习题 2－5

1. 讨论下列函数在指定点处的连续性，若是间断点，说明它们的类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}\quad (x=2)$；　　(2) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}\quad (x=1)$；

(3) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ 1, & x\geqslant 0 \end{cases}\quad (x=0)$；

(4) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & -1<x<1 \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2 \\ 2x+1, & 2<x\leqslant 3 \end{cases}\quad (x=1)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，研究函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左连续性及右连续性.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} 3x+b, & 0\leqslant x<1 \\ a, & x=1 \\ x-b, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$，试确定 a 和 b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

第六节　连续函数的性质

由函数在某点连续的定义和极限的四则运算的性质，可以得到下列运算性质：

一、连续函数的和、差、积、商的连续性

性质 1　如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，那么它们的和(差) $f(x)\pm g(x)$，积 $f(x)g(x)$，商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

例 1 由于 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，而 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处是连续的，所以 $\tan x$，$\cot x$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处也是连续的.

思考 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，但函数 $g(x)$ 在点 x_0 处不连续，那么函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处连续吗？

二、反函数与复合函数的连续性

性质 2 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上**单调增加(或减少)**且连续，则其**反函数** $y=f^{-1}(x)$ 在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上也是**单调增加(或减少)且连续**.

由第一章中反函数的性质可以知道，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于 $y=x$ 的对称图形. 显然，它们的单调性和连续性相同.

例 2 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加且连续的，其反函数 $y=\arcsin x$ 在对应的区间 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续的.

性质 3 设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ **复合**而成的，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，且函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，即 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$$

从性质 3 中不难看出：

(1) 若复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续，则函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 处的极限值等于它在点 x_0 处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[g(x_0)]$；

(2) 对于复合函数 $y=f[g(x)]$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$ 存在，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则极限运算与函数运算可以交换次序，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]$.

例 3 讨论函数 $f(x)=\sin\sqrt{1-x^2}$ 的连续性.

解 函数 $f(x)=\sin\sqrt{1-x^2}$ 可以看成是由函数 $f(x)=\sin u$ 及 $u=\sqrt{1-x^2}$ 复合而成的，函数 $f(x)=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$u=\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上连续，所以，函数 $f(x)=\sin\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)$.

解 因为 $\ln(1+\sin x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)=\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)=\ln 2$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1$

三、初等函数的连续性

从第一章中可以看出，对于基本初等函数在其定义域内的函数图像都是一条连续不间断的曲线. 从而可以得出结论：基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.

由于初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合而成的函数，而基本初等函数在其定义区间上是连续的函数，再根据连续函数的四则运算和复合函数的连续性可得到如下重要结论：

一切初等函数在其定义域内的区间(或称为定义区间)上都是连续的.

这一结论对于以后判定函数连续性及一些极限的运算是非常有价值的. 如果已知函数 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 属于 $f(x)$ 的定义区间，那么求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$时，只需将 x_0 代入函数求函数值 $f(x_0)$ 即可.

例 6　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)+3}{\cos x}$.

解　由于 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)+3}{\cos x}$ 是初等函数，$x=0$ 是它定义区间内的一点，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而极限值等于该点的函数值，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)+3}{\cos x}=f(0)=3$$

例 7　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

解　由于函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ 在 $x=2$ 处没有定义，故不能直接用初等函数的连续性. 但

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}$ 在 $x=2$ 处有定义，且

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$$

所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{1}{4}$$

四、闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数具有一些重要的性质，这些性质在理论上及实践中都有着广泛的应用，它们的几何意义都很直观，容易理解.

先说明最大值和最小值的概念.

对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0 \in I$，使得对于任意 $x \in I$，都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$（$f(x) \geqslant f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**（**最小值**）.

例 8　函数 $y = 1 + \cos x$ 在区间$[0,2\pi]$上有最大值 2 和最小值 0. 因为 $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$，于是 $0 \leqslant 1 + \cos x \leqslant 2$.

性质 4　在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的**最大值**和**最小值**.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，那么存在常数 $M > 0$，使得对任意 $x \in [a,b]$，满足 $|f(x) \leqslant M|$；且至少有一点 ξ_1，使得 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上的最大值；又至少有一点 ξ_2，使得 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上的最小值（见图 2 - 14）.

注意　如果函数在开区间内连续，或在闭区间内有间断点，那么函数在该区间上不一定有界，也不一定有最大值或最小值.

例 9　函数 $y = \tan x$ 在开区间$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$内是连续的，但它在开区间$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$内是无界的，且既无最大值也无最小值.

例 10　函数 $y = f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ 在闭区间$[0,2]$内有间断点 $x = 1$，

这函数在闭区间$[0,2]$上虽然有界，但是既无最大值也无最小值（见图 2 - 15）.

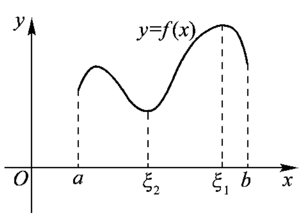


图　2 - 14

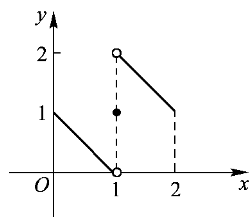


图　2 - 15

性质 5　**（零点定理或根的存在定理）**如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，那么在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi) = 0$$

从几何上看，性质 5 表示，如果连续曲线 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，那么这

段曲线与 x 轴至少有一个交点(见图 2-16).

性质 6　(介值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且

$$f(a)=A \quad 及 \quad f(b)=B$$

则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得

$$f(\xi)=C(a<\xi<b)$$

这个性质的几何意义是:连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少相交一点(见图 2-17).

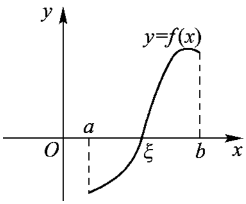


图　2-16

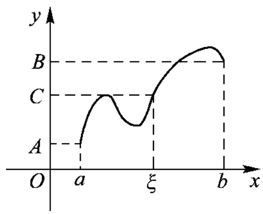


图　2-17

利用零点定理可以判断代数方程根的存在性.

例 11　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证　函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是连续的,又

$$f(0)=1>0, \quad f(1)=-2<0$$

由性质 5,在开区间 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ,使得

$$f(\xi)=0$$

即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0\ (0<\xi<1).$$

这等式说明了方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根是 ξ.

思考　“连续函数一定有界且一定有最大值和最小值”,此结论正确吗?为什么?

习题 2-6

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;　(2) $\lim\limits_{x\to1}e^{x-1}$;　(3) $\lim\limits_{x\to1}\cos(1-x^2)$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$;　(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;　(6) $\lim\limits_{x\to1}x(\sqrt{x^2-1}-x)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上无实根.试证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为正或恒为负.

3. 证明:方程 $x^5-3x-1=0$ 在 $[1,2]$ 内至少有一个根.

复习题二

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

2. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})$.

3. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a 和 b 的值.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处的连续性.

5. 确定常数 k 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ k, & x=2\end{cases}$在 $x=2$ 处连续.

6. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续，试研究函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在 x_0 处的连续性.

7. 求 $f(x)=\frac{x}{\ln|x-1|}$ 的间断点，并判定间断点类型.

8. 证明：方程 $x^3+2x=6$ 在 1 和 3 之间至少有一根.