

第 1 章 质点力学

自然界中的物质都处于不停的运动和变化之中。物质的运动形式多种多样,最为简单的是物质的机械运动,牛顿力学(经典力学)就是研究物质的机械运动规律及其应用的科学。一个物体相对于另一个物体,或者是一个物体的某些部分相对于其他部分的位置的变化,称为机械运动,如星体在太空中的运动、机器运转中各部件的运动及车辆在行驶中相对位置的改变等。力学在各种自然科学中发展得最早。17 世纪形成了以牛顿定律为基础的经典力学,其理论体系在 19 世纪上半期即已完成,成为物理学其他分支研究的基石和起点,并广泛应用于生产实际之中,成为工程技术的重要基础。

任何物体都有一定的大小和形状,当物体运动时,其中各点的位置变化一般来说是各不相同的。因此,要精确描述某一实际物体的运动并不是一件简单的事情。但在某些实际问题中,如果物体各点的运动状态完全相同,或者物体本身形状、大小可以忽略不计,那么就可以把物体看做一个具有质量而没有大小和形状的点,这种理想的模型称为质点。能否把物体当作质点处理要看具体情况。本章将学习质点力学的基本知识,首先讨论质点运动学问题及表征相互作用规律及运动状态变化与物体间相互作用关系的牛顿运动定律,然后介绍动量、动量守恒定律,最后从牛顿运动定律出发讨论机械能和功的相关知识。

1.1 质点运动的描述

1.1.1 位置矢量 运动方程

1. 参考系与坐标系

为了观察一个物体的运动而被选作参考的另一物体(或一组相对静止的物体系)称为参考系。

不同的参考系对同一物体运动情况的描述是不同的。如在作匀速直线运动的火车上研究一物体自由下落时,如果以运动着的火车为参考系,那么该物体是竖直下落的;如果以车站为参考系,那么该物体的运动轨迹是向下的抛物线。这就是说,运动的描述是相对的。在描述物体运动时,必须指明选用的是什么参考系。

要想定量地描述物体的运动,就必须在参考系上建立适当的坐标系。在力学中常用的有直角坐标系,根据需要也可选用极坐标系、自然坐标系、球坐标系或柱坐标系等。

当参考系选定以后,无论选择何种坐标系物体的运动性质都不会改变。然而,坐标系选择得当可使计算简化。

2. 位置矢量

在选定的坐标系里,用一个由原点指向质点的矢量表示质点在空间的位置,该矢量称位置矢量,简称位矢,用符号 \boldsymbol{r} 表示。

例如在直角坐标系 $Oxyz$ 中,如图 1.1 所示。

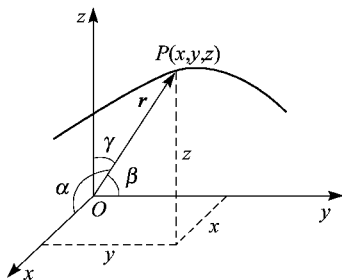


图 1.1

位矢 \boldsymbol{r} 在 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴上的分量分别为 x, y, z 。若以 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x, y, z 三个坐标轴方向的单位矢量,则位矢可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad (1-1)$$

位矢 \boldsymbol{r} 是矢量,它的大小 $|\boldsymbol{r}|$ 表示质点的位置与参考点的距离,它的方向表示质点相对参考点的方位。

位矢 \boldsymbol{r} 的大小为

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位矢 \boldsymbol{r} 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

式中, α, β, γ 分别表示位矢 \boldsymbol{r} 与 x, y, z 三个坐标轴的夹角。应该指出的是,质点的位矢与参考点的选择有关。

3. 运动方程

质点运动时,它的位置矢量 \boldsymbol{r} 是随时间 t 变化的,所以 \boldsymbol{r} 是 t 的函数。表示 \boldsymbol{r} 随时间 t 变化的关系式称为运动方程,可以写为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-2)$$

在直角坐标系中,运动方程可表示为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1-3)$$

1.1.2 位移

如图 1.2 所示, t 时刻质点位于 A 处, 位矢为 \mathbf{r}_A , 经 Δt 时间间隔质点运动到 B 处, 位矢为 \mathbf{r}_B , 在 Δt 时间内位矢的增量称为位移矢量, 简称位移。即

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (1-4)$$

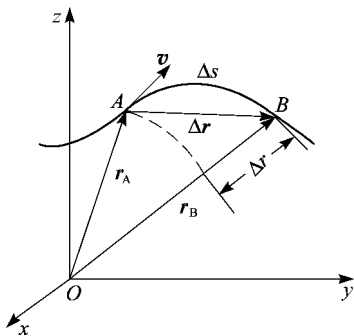


图 1.2 位移矢量

直角坐标系里:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j} + z_B \mathbf{k}) - (x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j} + z_A \mathbf{k}) \\ &= \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1-5)$$

位移大小: $|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \neq \Delta r = |\mathbf{r}_B| - |\mathbf{r}_A|$ (一般情况下), 方向是从 A 指向 B 。

路程 Δs 是质点运动的路径长度, 是个标量, 一般 Δs 与 $|\Delta \mathbf{r}|$ 之间没有确定关系, 只有当 Δt 趋近于零或单向直线运动时, 两者才相等。

1.1.3 速度

速度是描述质点运动快慢和运动方向的物理量, 是矢量。对一段有限时间和有限空间可用平均速度来描述运动的快慢, 对无限小时间和空间用瞬时速度来描述运动的快慢程度。

质点在 t 到 $t + \Delta t$ 时间间隔内位矢的平均变化率称为质点在该时间间隔内的平均速度。

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-6)$$

它的方向与 $\Delta \mathbf{r}$ 相同。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时平均速度的极限称为质点在 t 时刻的瞬时速度, 简称速度。

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-7)$$

由图 1.2 可知, $\Delta t \rightarrow 0$ 时 \mathbf{r}_B 趋近 \mathbf{r}_A , $\Delta \mathbf{r}$ 的方向趋近于 A 点的切线方向, 即 A 点处的速度方向为 A 点的切线且方向指向质点前进的一侧。

速度的大小称为速率, 用 v 表示。即

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| \quad (1-8)$$

用 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨道所经过的路程。当 Δt 趋于零时, $|\Delta \mathbf{r}|$ 和 Δs 趋于相同, 因此可以得到

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1-9)$$

平均速率和速度的代数值一般不相等, 只有当 Δt 趋于零时, $|\Delta \mathbf{r}|$ 趋于 Δs , 平均速率与速度的代数值才相等。

在直角坐标系里:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (1-10)$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1-11)$$

速度和速率的单位在国际单位制(SI)中为米·秒⁻¹(m·s⁻¹)。

1.1.4 加速度

加速度是描述速度矢量(大小、方向)变化的物理量。质点在 Δt 时间内速度由 \mathbf{v}_1 变为 \mathbf{v}_2 , 速度的增量 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ 与时间之比表示质点速度在 Δt 时间内的平均变化率, 称为平均加速度。平均加速度是矢量, 记作 $\bar{\mathbf{a}}$ 。

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1-12)$$

当极限情况 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 得 t 时刻质点的瞬时加速度

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1-13)$$

将式(1-7)和式(1-1)代入上式得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1-14)$$

加速度 a 的大小为

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1-15)$$

它的方向是 $\Delta\mathbf{v}$ 的极限方向,一般与 \mathbf{v} 的方向不同。在曲线运动中,加速度方向指向曲线凹侧。

国际单位制中加速度的单位是米/秒²(m/s²)。

例 1-1 已知质点的运动方程为 $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (6 - 2t^2)\mathbf{j}$ (m),求:

- (1) 质点的轨道方程;
- (2) 第2s 内的位移 $\Delta\mathbf{r}$ 及平均速度 \mathbf{v} ;
- (3) 第2s 末的速度和加速度。

解 (1) 由题意可知质点作二维平面运动,运动方程分量式为

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 6 - 2t^2 \end{cases}$$

消去 t ,得轨道方程

$$y = 6 - \frac{1}{2}x^2$$

(2) 初始时刻 $t_1 = 1\text{s}$,末时刻 $t_2 = 2\text{s}$,则在这段时间内,质点的位移为

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} \\ &= 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}(\text{m}) \end{aligned}$$

质点的平均速度为

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

(3) 2s 末瞬时速度为

$$\mathbf{v} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=2} = (2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}) \Big|_{t=2} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}(\text{m/s})$$

瞬时加速度为

$$\mathbf{a} = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{t=2} = -4\mathbf{j} \Big|_{t=2} = -4\mathbf{j}(\text{m/s}^2)$$

例 1-2 质点以加速度 a 在 x 轴上运动,开始时速度为 v_0 ,处在 $x = x_0$ 的位置,求质点在任意时刻的速度和位置。

解 由 $a = \frac{dv}{dt}$ 得 $dv = a dt$

于是,在 $0 \sim t$ 时间内,速度的总增量为

$$v - v_0 = \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

即 t 时刻速度为

$$v = v_0 + \int_0^t a dt$$

同理, 由 $v = \frac{dx}{dt}$ 得 $dx = v dt$, 于是得 $0 \sim t$ 时间内的位移为

$$x - x_0 = \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt$$

即 t 时刻的位置坐标为

$$x = x_0 + \int_0^t v dt$$

1.2 曲线运动

1.2.1 圆周运动

质点运动的轨迹是圆周的运动称为圆周运动。例如钟表指针上各点的运动, 机器齿轮上各部分的运动等都是圆周运动。圆周运动是一种重要的曲线运动, 它是讨论一般曲线运动的基础。当质点作一般的曲线运动时, 虽然它的运动轨迹可以是各种形状, 但是根据数学知识, 过曲线上任意一点都能作一个曲率圆与曲线相切, 相切点附近的一小段可以认为是曲率圆的一部分。因此, 一般的曲线运动可以看成是由一系列半径不同的圆周运动组合而成的。

速率不变的圆周运动称为匀速圆周运动。质点作匀速圆周运动时, 虽然其速度的大小不变, 但速度的方向在不断改变, 所以匀速圆周运动是一种变速运动。

1.2.2 圆周运动的角量和线量

质点沿圆周运动时它的速率通常叫线速度。如以 s 表示从圆周上某点 A 起的弧长(见图 1.3), 则线速度 v 就用式(1-9)表示为

$$v = \frac{ds}{dt}$$

以 θ 表示半径 R 从 OA 位置开始转过的角度, 则 $s = R\theta$ 。将此关系代入上式, 由于 R 是常量, 可得

$$v = R \frac{d\theta}{dt}$$

式中, $\frac{d\theta}{dt}$ 叫做质点运动的角速度, 它的国际单位是 rad/s 。常以 ω 表示角速度, 即

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-16)$$

这样就有

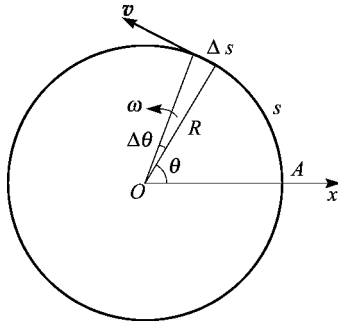


图 1.3 线速度与角速度

$$v = R\omega \quad (1-17)$$

对于匀速圆周运动, ω 和 v 均保持不变, 因而其运动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1-18)$$

质点做圆周运动时, 它的线速度可以随时间改变或不改变, 但是由于速度矢量的方向总是改变着, 所以总是有加速度。下面我们来介绍圆周运动的加速度。

如图 1.4(a) 所示, $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ 分别表示质点沿圆周运动经过 B 点和 C 点时的速度, 则加速度为

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

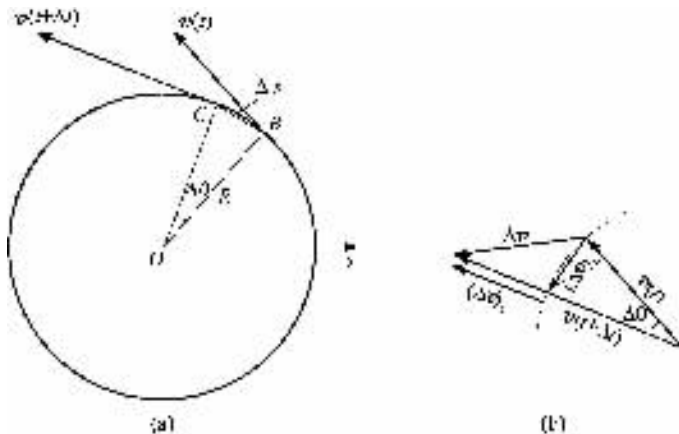


图 1.4 变速圆周运动的加速度

$\Delta \mathbf{v}$ 如图 1.4(b) 所示, 可得

$$\Delta \boldsymbol{v} = (\Delta \boldsymbol{v})_n + (\Delta \boldsymbol{v})_t$$

因而 \boldsymbol{a} 的表达式可写成

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \boldsymbol{v})_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \boldsymbol{v})_t}{\Delta t} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t \quad (1-19)$$

式中, $\boldsymbol{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \boldsymbol{v})_n}{\Delta t}$, $\boldsymbol{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \boldsymbol{v})_t}{\Delta t}$ 。

对于 \boldsymbol{a}_t , 由图 1.4(b) 可知 $(\Delta \boldsymbol{v})_t$ 的大小为

$$v(t + \Delta t) - v(t) = \Delta v$$

即等于速率的变化。于是 \boldsymbol{a}_t 的大小为

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1-20)$$

即等于速率的变化率。由于 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $(\Delta \boldsymbol{v})_t$ 的方向趋于和 \boldsymbol{v} 在同一直线上, 因此 \boldsymbol{a}_t 的方向也沿着轨道的切线方向。这一分加速度就叫切向加速度。切向加速度表示质点速率变化的快慢。

利用式(1-17) 还可得

$$a_t = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$$

式中, $\frac{d\omega}{dt}$ 表示质点运动角速度对时间的变化率, 叫做角加速度, 它的国际单位是 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$, 以 α 表示角加速度, 则有

$$a_t = R\alpha \quad (1-21)$$

对于 \boldsymbol{a}_n , 有

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|(\Delta \boldsymbol{v})_n|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

由于 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$

可得 $a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1-22)$

利用式(1-17) 可得 $a_n = \omega^2 R \quad (1-23)$

上式中, \boldsymbol{a}_n 的方向在任何时刻都垂直于圆的切线方向而沿着半径指向圆心。这个分加速度就叫向心加速度或法向加速度。法向加速度表示由于速度方向改变而引起的速度的变化率。在圆周运动中, 总有法向加速度。

例 1-3 一质点 P 沿半径 $R = 3.0\text{m}$ 的圆周作匀速率运动, 运动一周所需时间为 20.0s , 设 $t = 0$, 质点位于 O 点。按图 1.5(a) 中所示 Oxy 坐标系, 求: (1) 质点 P 在任意时刻的位矢; (2) 5s 时的速度和加速度。

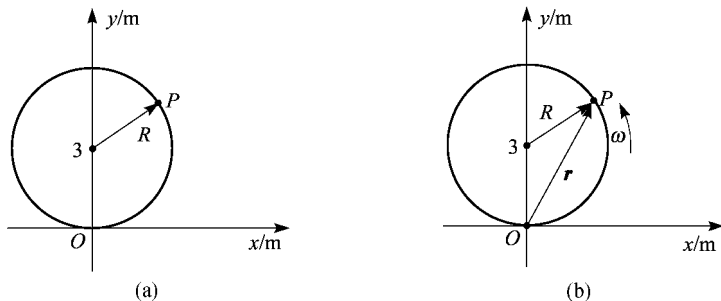


图 1.5

解 (1) 设质点绕圆逆时针转动, $t = 0$ 时, 位于 O 点, 取 O 点为原点, 按图 1.5(b) 中所示 Oxy 坐标系, 质点的运动方程为

$$\begin{cases} x = R \sin \omega t \\ y = R(1 - \cos \omega t) \end{cases}$$

式中, $R = 3.0 \text{ m}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20.0} = 0.1\pi \text{ s}^{-1}$ 。

于是有

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ &= R \sin \omega t \mathbf{i} + R(1 - \cos \omega t) \mathbf{j} \\ &= 3.0 \sin(0.1\pi t) \mathbf{i} + 3.0(1 - \cos 0.1\pi t) \mathbf{j} \text{ (m)} \end{aligned}$$

(2) 由 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j}$ 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t = 5 \text{ s}) &= R\omega \cos \omega t \mathbf{i} + R\omega \sin \omega t \mathbf{j} \Big|_{t=5\text{s}} \\ &= 3.0 \times 0.1\pi \times \cos 0.5\pi \mathbf{i} + 3.0 \times 0.1\pi \times \sin 0.5\pi \mathbf{j} \\ &= 0 + 0.3\pi \mathbf{j} = 0.3\pi \mathbf{j} \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

由

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -R\omega^2 \sin \omega t \mathbf{i} + R\omega^2 \cos \omega t \mathbf{j}$$

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t = 5 \text{ s}) &= [-3.0 \times (0.1\pi)^2 \sin 0.5\pi \mathbf{i} + 3.0 \times (0.1\pi)^2 \times \cos 0.5\pi \mathbf{j}] \\ &= -0.03\pi^2 \mathbf{i} \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned}$$

1.2.3 一般曲线运动

质点运动学中最一般的运动为曲线运动, 可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \\ \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \end{cases} \quad (1-24)$$

直角坐标系中表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \end{cases} \quad (1-25)$$

平面曲线运动还可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \\ \mathbf{a} = a_n\mathbf{e}_n + a_t\mathbf{e}_t \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \\ a_t = \frac{dv}{dt} \end{cases} \quad (1-26)$$

式中, $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t$ 为自然坐标的基矢, 它们大小不变, 方向随运动物体一起改变。 a_n 为曲线运动在某点处的法向加速度的大小, 而 ρ 为此点曲线对应的曲率半径, $a_t = dv/dt$ 中的 v 为速度的大小。

例 1-4 一小石块以 $\mathbf{v} = v_0\mathbf{i}$ 抛出, 空气阻力不计, 求小石块在任意时刻 t 的速度 \mathbf{v} , 切向、法向加速度 a_t, a_n 及总加速度 \mathbf{a} 各为多少。

解 小石块做的实际上是平抛运动, 取坐标轴如图 1.6 所示, 在任意时刻 t 有

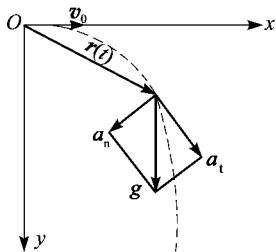


图 1.6 平抛运动

$$\mathbf{r}(t) = v_0 t \mathbf{i} + \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + g t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = g \mathbf{j}$$

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = g^2 - \frac{g^4 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2} = \frac{g^2 v_0^2}{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$a_n = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

而

所以

因为

所以

对照

还可知平抛运动质点在任一时刻所处轨道的曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 + g^2 t^2}{g v_0 / \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{g v_0}$$

因此从曲线运动的角度去审视一个平抛运动,也有其向心加速度,即法向加速度,还有切向加速度,在任意时刻,切向加速度和法向加速度的矢量合成是一个均匀不变的重力加速度 \mathbf{g} 。

1.3 牛顿运动定律及其应用

1.3.1 牛顿第一定律

牛顿第一定律:任何物体都将保持静止或匀速直线运动的状态,直到其他物体所作用的力迫使它改变这种状态为止。

牛顿第一定律实际上阐述了以下问题。第一是关于静止或匀速运动的概念,我们知道,运动总是相对于某一参照物来讲的,因此,运动是相对的。但任何物体都处于绝对的运动中,因为物质是运动的。因此,从这个层面上讲,运动又是绝对的。因此,牛顿在第一定律中实际上定义了一个参照系。一个惯性定律适用的参照系,称为惯性系。第二是关于物质的惯性问题的概念,物质的这种保持静止或匀速直线运动的本质称为物质的惯性。惯性是物体固有的属性,故牛顿第一定律又称惯性定律。同时,牛顿第一定律也给力一个科学的定义,指出物体所受的力是外界对物体所施加的一种作用,力是物体运动状态变化的原因。

1.3.2 牛顿第二定律

牛顿第二定律:运动的变化与所受的合外力成正比,其方向为合外力作用的方向。

牛顿第一定律只定性地指出了力和运动的关系。牛顿第二定律进一步给出了力和运动的定量关系。牛顿将“运动”一词定义为物体(应理解为质点)的质量和速度的乘积,现在把这一乘积称做物体的动量。以 \boldsymbol{p} 表示质量为 m 的物体以速度 \boldsymbol{v} 运动时的动量,则动量也是矢量,其定义式为

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

以 \boldsymbol{F} 表示作用在物体(质点)上的力,则牛顿第二定律用数学公式表达为

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} \quad (1-27)$$

这一定义在相对论力学中仍然有效。

当物体在低速(即运动速度 $v \ll$ 光速 c) 情况下运动时,物体的质量可以认为是不依赖于速度的常量,于是式(1-27)可写为

$$\boldsymbol{F} = m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

由于 $d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{a}$ 是物体的加速度,所以

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad (1-28a)$$

当一个物体同时受到几个力的作用时,式(1-28a)中的 \boldsymbol{F} 应是这些力的合力,即这些力的矢量和。这样,这几个力的作用效果跟它们的合力的作用效果一样。这一结论叫力的叠加原理。牛顿第二定律表示为

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad (1-28b)$$

对质点而言,力是产生加速度的原因,而且 $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ 说明的是力的瞬时作用规律。此外,牛顿第二定律还定量地量度了惯性的大小,物体的质量是物体惯性大小的量度。

1.3.3 牛顿第三定律

牛顿第三定律:两个物体间的作用力和反作用力大小相等,方向相反,且作用在同一条直线上。牛顿第三定律表示为

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}' \quad (1-29)$$

牛顿第三定律指明了物体间相互作用力的定量关系,侧重于说明物体间相互联系和相互制约的关系。应用时需要明确几点:

(1) 作用力和反作用力分别作用在两个不同的物体上,所以对任一物体来说,它们不是一对平衡力,不能相互抵消,产生的效果也不同。

(2) 作用力和反作用力没有主从、先后之分,它们总是同时产生,同时存在,同时消失。

(3) 物体间的作用力与反作用力是同一性质的力,如果作用力是摩擦力,那么反作用力也一定是摩擦力。

1.3.4 力学中常见的几种力

力学中常见的力主要有万有引力、弹性力和摩擦力等。

1. 万有引力

质量为 m_1 、 m_2 的任意两质点之间都存在着相互吸引力,这种力称为万有引力,其大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1-30a)$$

上式为万有引力定律的数学表达式,式中 r 为两质点之间的距离, G 是一个比例系数,称为万有引力常量,其值为 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ 。

万有引力定律用矢量形式表示为

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1-30b)$$

式中, \mathbf{F}_{21} 表示物体 m_1 作用于物体 m_2 的万有引力, \mathbf{e}_r 表示以 m_1 为原点由 m_1 指向 m_2 的单位矢量,负号表示 \mathbf{F}_{21} 的方向与 \mathbf{e}_r 的方向相反,如图 1.7 所示。

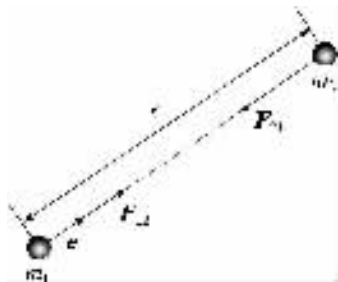


图 1.7

重力是常见的一种引力,它是地球对其表面附近物体的万有引力。

地球表面附近,万有引力定律可写为

$$F = G \frac{m M_e}{R_e^2} = mg \quad (1-31)$$

式中, $g = G \frac{M_e}{R_e^2}$ 称为重力加速度,方向竖直向下指向地心; M_e 、 R_e 分别为地球的质量和半径。

一般计算时,地球表面附近的重力加速度取 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ 。

2. 弹性力

相互接触并发生形变的物体,由于要恢复原状,对与它接触的物体会产生力的作用,这

种因形变而产生的恢复力称为弹性力。弹性力产生的条件是弹性形变；弹性力的大小取决于形变的程度；弹性力的表现形式多种多样，如支承面的支持力、绳索内的张力及弹簧的弹性力。

在弹性限度内，弹簧的弹性力 F 与弹簧的伸长量 x 之间的关系为

$$F = -kx \quad (1-32)$$

式中， k 为弹簧的劲度系数。

3. 摩擦力

彼此接触的物体，当它们沿着接触面有相对滑动或有相对滑动趋势时，就会产生一种阻碍相对滑动或相对滑动趋势的力，这种力称为摩擦力。摩擦力有静摩擦力和滑动摩擦力之分。其中滑动摩擦力 F_k 的大小与正压力成正比，即

$$F_k = \mu_k F \quad (1-33)$$

式中， μ_k 称为滑动摩擦系数。

1.3.5 牛顿定律的应用

应用牛顿运动定律解决质点力学问题通常有两类：一是已知质点所受的力，求该质点的运动情况；二是已知质点的运动情况，求该质点的受力情况。其求解力学问题的主要方法步骤有以下几步。

(1) 确定研究对象。在有关问题中选定一个物体(当成质点)作为研究对象。如果问题涉及几个物体，那就把各个物体分离出来加以分析。

(2) 分析受力情况，并画出受力示意图。

(3) 分析物体的运动状态。先选定参考系，然后在各物体上标出它相对参考系的加速度。

(4) 建立坐标系及物体运动的牛顿方程式。

(5) 解方程，并对结果进行分析讨论。

例 1-5 设质量 $m = 0.50 \text{ kg}$ 的小球挂在倾角为 $\theta = 30^\circ$ 的光滑斜面上(见图 1.8)。求：

(1) 当斜面以加速度 $a = 2.0 \text{ m/s}^2$ 沿如图所示的方向运动时，绳中的张力及小球对斜面的正压力各是多大？

(2) 当斜面的加速度至少为多大时，小球将脱离斜面？

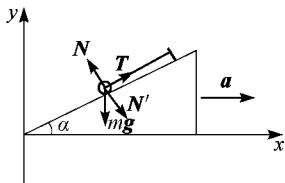


图 1.8

解 (1) 选小球为研究对象, 受力分析如图 1.8 所示, 画受力示意图, 由牛顿第二定律得

$$x \text{ 向: } T \cos \alpha - N \sin \alpha = ma$$

$$y \text{ 向: } T \sin \alpha + N \cos \alpha - mg = 0$$

联立以上二式, 可得

$$T = m(a \cos \alpha + g \sin \alpha) = 0.5 \times (2 \cos 30^\circ + 9.8 \sin 30^\circ) = 3.32(\text{N})$$

$$N = m(g \cos \alpha - a \sin \alpha) = 0.5 \times (9.8 \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ) = 3.75(\text{N})$$

所以绳中拉力 T 为 3.32N。

由牛顿第三定律, 小球对斜面的压力为

$$N' = N = 3.75(\text{N})$$

(2) 小球刚要脱离斜面时 $N = 0$, 则由上面的牛顿第二定律方程为

$$T \cos \theta = ma, \quad T \sin \theta = mg$$

解得此时加速度为

$$a = g / \tan \theta = 9.8 / \tan 30^\circ = 17.0(\text{m/s}^2)$$

例 1-6 如图 1.9(a) 所示, 质量为 M 的小车, 在光滑轨道上受恒力 F 作用, 有一质量为 m 的物块放在车上, 随小车一起运动, 求物块受到的摩擦力。

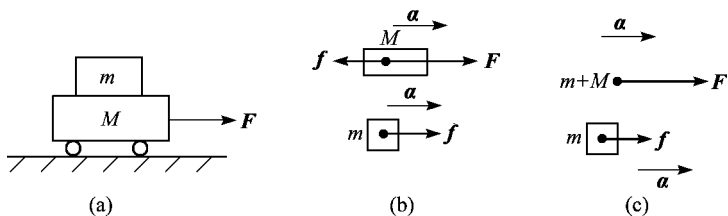


图 1.9

解 物块与小车受向右恒力, 物块与小车向右作匀变速直线运动, 其加速度向右, 如不考虑竖直方向的受力情况, 先取 m 与 M 为研究对象, 如图 1.9(b) 所示, 由牛顿第二定律得

$$\text{对 } m: \quad f = ma$$

$$\text{对 } M: \quad F - f = Ma$$

若取 $m + M$ 为研究对象, 再取 m 为研究对象, 如图 1.9(c) 所示, 由牛顿第二定律得

$$\text{对 } (m + M): \quad F = (m + M)a$$

$$\text{对 } m: \quad f = ma$$

解以上方程, 可直接得出

$$a = \frac{F}{m + M}$$

代入得

$$f = ma = \frac{m}{m+M} \cdot F$$

例 1-7 如图 1.10(a) 所示, l 为 1m 长的圆锥摆, 如果摆角为 30° , 求摆的周期是多少。

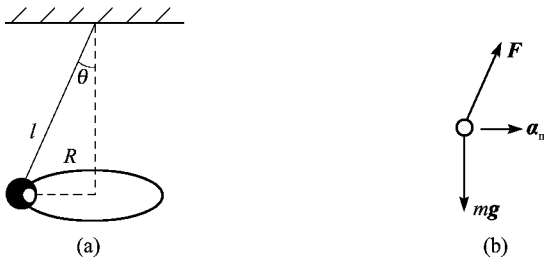


图 1.10

解 以小球为研究对象, 该球质量为 m , 受力分析画出受力示意图如图 1.10(b) 所示, 由牛顿第二定律得

$$\begin{cases} F_n = ma_n \\ F_y = ma_y \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} F \sin \theta = ma_n = mR\omega^2 \\ F \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

式中, R 为圆周运动时的半径, 即 $R = l \sin \theta$, 又 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 代入上式得

$$\begin{cases} F \sin \theta = ml \sin \theta \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \\ F \cos \theta = mg \end{cases}$$

联立以上方程解得周期

$$T = 2\pi \sqrt{l \cos \theta / g} = 2 \times 3.14 \sqrt{\cos 30^\circ / 9.8} = 1.87 \text{ s}$$

例 1-8 质量为 m 的物体, 以初速度 v_0 沿水平方向向右运动, 所受阻力与速度 v 成正比, 比例系数为常量 k . 求物体的运动方程。

解 取运动方向为 x 轴正向, 初始条件: $t = 0$ 时, $x = 0, v = v_0$ 。

物体所受阻力

$$F = -kv$$

由牛顿第二定律得

$$F = -kv = m \frac{dv}{dt}$$

分离变量有

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

两侧积分

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{k}{m} dt$$

得

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

将 $v = \frac{dx}{dt}$ 代入上式得

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt$$

$$x = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

物体的速度和位置随时间变化的关系曲线如图 1.11(a)、(b) 所示。

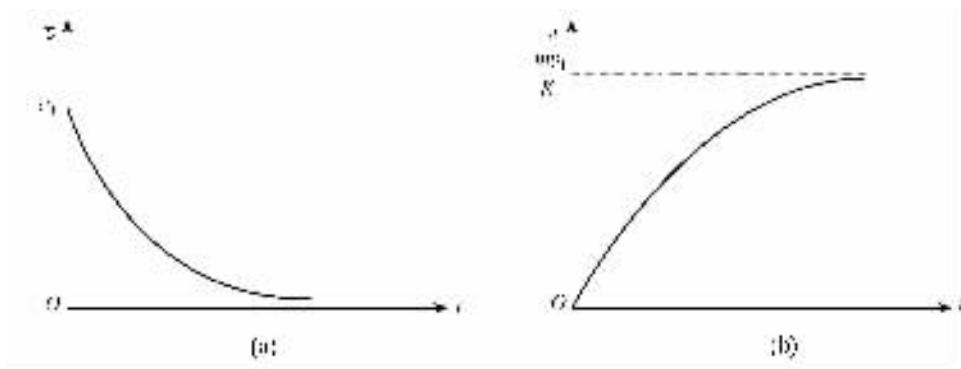


图 1.11 物体的速度和位置随时间变化的关系曲线图

1.4 动量 动量守恒定律

1.4.1 质点的动量定理

1. 冲量

在某些动力学问题(如碰撞问题)中,物体相互作用的时间相当短暂。在这短暂的时间内,力随时间的变化又相当复杂。但人们关注的往往并非力在各个时刻的瞬时效应,而是物体受这种复杂变力作用一段时间后所产生的总效应,也就是对时间的累积效应。我们将力与其作用时间的乘积定义为冲量。

若质点受变力 \boldsymbol{F} 作用,可取无限短的时间间隔 dt ,在 dt 时间内可把力 \boldsymbol{F} 看成恒力,则力 \boldsymbol{F} 在 dt 时间内的元冲量可写为

$$d\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}dt$$

一般来说,质点在合力 \boldsymbol{F} 作用下在 t_1 到 t_2 的作用时间内变力 \boldsymbol{F} 的冲量为

$$\boldsymbol{I} = \int d\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}dt \quad (1-34)$$

2. 质点的动量定理

设质量为 m 的质点, 所受合力为 \mathbf{F} , 根据牛顿运动定律

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

即

$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p} \quad (1-35a)$$

如果将式(1-35a) 对 t_1 到 t_2 这段有限时间积分, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = \int_{p_1}^{p_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \quad (1-35b)$$

即

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

表明在给定时间内, 质点所受合外力的冲量等于在同一时间内质点的动量的增量。这一表示在一段时间内外力作用的总效果的关系式, 叫做质点的动量定理。

例 1-9 $F_x = 30 + 4t$ (式中, F_x 的单位为 N, t 的单位为 s) 的合外力作用在质量 $m = 10\text{kg}$ 的物体上, 试求: (1) 在开始 2s 内此力的冲量 I ; (2) 2s 末物体的速度。

解 (1)
$$I = \int_0^2 F_x dt = \int_0^2 (30 + 4t) dt = 30t + 2t^2 \Big|_0^2 = 68 (\text{N} \cdot \text{s})$$

(2) 由质点的动量定理
$$I = mv - 0$$

可得

$$v = \frac{I}{m} = \frac{68}{10} = 6.8 (\text{m/s})$$

例 1-10 一个质量 $m = 50\text{g}$, 以速率 $v = 20\text{m/s}$ 作匀速圆周运动的小球, 求 $1/4$ 周期合力冲量的大小。

解 由
$$\mathbf{I} = \int_0^t \mathbf{F}dt = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$$

得

$$I = \sqrt{2}mv = \sqrt{2} \times 50 \times 10^{-3} \times 20 = 1.41 (\text{N} \cdot \text{s})$$

1.4.2 质点系的动量定理

质点系内各质点动量的矢量和称为质点系的动量。将单个质点的动量定理推广到多个质点组成的物体系, 改为

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F}_i dt = \sum \mathbf{p}_{i2} - \sum \mathbf{p}_{i1} = \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_{i2} \right) - \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_{i1} \right) \quad (1-36)$$

这就是说, 作用在质点系上的合外力在某段时间的冲量等于质点系在同一时间内动量的增量。而系统的内力是不能改变整个系统的动量的, 所谓外力是指系统外的质点对系统内质点的作用力, 内力即系统内质点间的相互作用力。

1.4.3 动量守恒定律

对于系统来说,如果所受外力矢量和为零,即

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

由动量定理可知

$$\sum \mathbf{p}_{i2} = \sum \mathbf{p}_{i1} = \text{恒矢量} \quad (1-37)$$

由此可见,如果物体系受外力的矢量和为零,则物体系的总动量保持不变,这就是动量守恒定律。

动量守恒定律是物理学最普遍的客观规律之一,不仅对宏观过程成立,而且对微观过程也同样有效。实践证明,利用它解决某些力学问题,要比直接应用牛顿第二定律简便得多。

一个不受外界影响的系统,常被称为孤立系统。一个孤立系统在运动过程中,其总动量一定保持不变。这也是动量守恒定律的一种表述形式。

应用动量守恒定律分析解决问题时,应该注意以下几点:

(1) 系统动量守恒的条件是合外力为零,即 $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ 。但在外力比内力小得多的情况下,外力对质点系的动量变化影响很小,这时可以忽略外力对系统的作用,认为系统满足守恒条件,也就可以近似地应用动量守恒定律,例如碰撞、爆炸等过程。

(2) 动量守恒表示式是矢量关系式。在实际问题中,常应用其分量式,即如果系统沿某一方向所受的合外力为零,则该系统动量沿此方向的分量守恒。

(3) 动量守恒定律是自然界中最普遍、最基本的定律之一。它只适用于惯性系,各物体的动量必须都相对于同一惯性参考系。

例 1-11 一个 α 粒子(氦原子),由最初处于静止状态的铀-238 的核中,以 $1.4 \times 10^7 \text{ m/s}$ 的速度放射出来。试求剩余原子核(钍-234)的反冲速率。

解 设想最初钍-234 和 α 粒子被束缚在一起构成铀核。然后由于两部分间的相互作用使它们分成两部分。因此它们的作用力很大,作用时间极短,可忽略重力的影响。因此由钍-234 和 α 粒子构成质点系的动量守恒。

分裂前,质点系动量为零;分裂后,质点系中两个质点的动量不为零,但它们的总动量应该等于零,即

分裂前质点系总动量 = 分裂后质点系总动量

选择实验室为参考系,沿 α 粒子的运动方向建立坐标轴 Ox ,则有

$$0 = M_\alpha v_\alpha + M_{\text{钍}} v_{\text{钍}}$$

得

$$v_{\text{钍}} = -\frac{M_\alpha}{M_{\text{钍}}} v_\alpha = -\frac{4}{234} \times 1.4 \times 10^7 = -2.4 \times 10^5 \text{ m/s}$$

例 1-12 如图 1.12 所示,一质量为 M 的物体被静止悬挂着,今有一质量为 m 的子弹沿水平方向以速度 v 射中物体并停留在其中。求子弹刚停在物体内部时物体的速度。

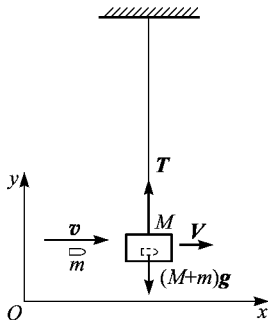


图 1.12

解 由于子弹从射入物体到停在其中所经历的时间很短,所以在此过程中物体基本上未动,仍停在原来的平衡位置。于是对子弹和物体这一系统,在子弹射入这一短暂过程中,它们所受的水平方向的外力为零,因此水平方向的动量守恒。设子弹刚停在物体中时物体的速度为 v ,则此系统此时的水平总动量为 $(m+M)V$ 。由于子弹射入前此系统的水平总动量为 mv ,所以有

$$mv = (m+M)V$$

由此得

$$V = \frac{m}{m+M}v$$

例 1-13 A、B 两船在平静的湖面上平行逆向航行,当两船擦肩相遇时,两船各自向对方平稳地传递 50kg 的重物,结果是 A 船停了下来,而 B 船以 3.4 m/s 的速度继续向前驶。A、B 两船原有质量分别为 0.5×10^3 kg 和 1.0×10^3 kg,求在传递重物前两船的速度。(忽略水对船的阻力)

解 设 A、B 两船原有的速度分别为 v_A, v_B ,传递重物后船的速度分别为 v'_A, v'_B ,被搬动重物的质量为 m 。应用动量守恒定律,则有

$$(m_A - m)v_A + mv_B = m_A v'_A$$

$$(m_B - m)v_B + mv_A = m_B v'_B$$

取 B 的运动方向为正,则 $v'_A = 0, v'_B = 3.4$ m/s,代入数据解得传递重物前两船的速度分别为

$$v_A = \frac{-m_B m v'_B}{(m_B - m)(m_A - m) - m^2} = -0.40 \text{ (m/s)}$$

$$v_B = \frac{(m_A - m)m_B v'_B}{(m_A - m)(m_B - m) - m^2} = 3.60 \text{ (m/s)}$$

例 1-14 质量为 m' 的人手里拿着一个质量为 m 的物体,此人以与水平面成 α 角的速度 v_0 向前跳去。当他达到最高点时,将物体以相对于人为 u 的水平速率向后抛出。问:由于人抛出物体,他跳跃的距离增加了多少?(假设人可视为质点)

解 取如图 1.13 所示坐标系。把人与物视为一系统,当人跳跃到最高点外,在向左抛物的过程中,水平方向满足动量守恒,故有

$$(m + m')v_0 \cos\alpha = m'v + m(v - u)$$

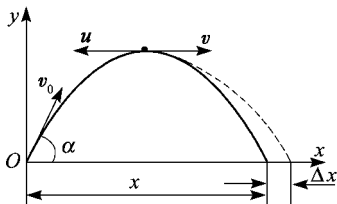


图 1.13

式中, v 为人抛物后相对地面的水平速率, $v - u$ 为抛出物对地面的水平速率,得

$$v = v_0 \cos\alpha + \frac{m}{m' + m}u$$

人的水平速率的增量为

$$\Delta v = v - v_0 \cos\alpha = \frac{m}{m' + m}u$$

而人从最高点到地面的运动时间为

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

所以,人跳跃后增加的距离为

$$\Delta x = \Delta vt = \frac{mv_0 \sin\alpha}{(m' + m)g}u$$

1.5 功 势能

1.5.1 功 功率

1. 恒力的功

在力学中,功的最基本的定义是恒力的功。如图 1.14 所示,一物体作直线运动,在恒力 \mathbf{F} 的作用下,物体发生位移 \mathbf{l} , \mathbf{F} 与 \mathbf{l} 的夹角为 θ ,则定义恒力 \mathbf{F} 所做的功为:力在位移方向上的投影与该物体位移的乘积。若用 A 表示功,则有

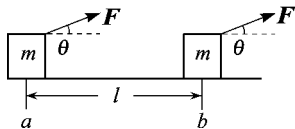


图 1.14 恒力的功示意图

$$A = F |l| \cos\theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l} \quad (1-38)$$

即恒力的功等于力与物体位移的标积。

功是标量,它只有大小,没有方向。功的正负由 θ 决定,当 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时,功为负值,我们说某力做负功;当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时,功为正值,则说某力做正功;当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,功值为零,则说某力不做功。

2. 变力的功

若作用于物体上的力 \mathbf{F} 不是恒力,质点沿曲线 l 由点 a 运动到点 b ,如图 1.15 所示,变力 \mathbf{F} 对物体做的功为

$$A = \int_l dA = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

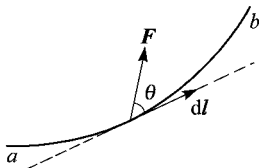


图 1.15 变力的功示意图

力 \mathbf{F} 对物体做的功 A 的定义一般式应为

$$A = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-39)$$

功的定义式中 \mathbf{F} 是质点沿曲线 l 运动过程中,它在任意点处受的外力, $d\mathbf{l}$ 是质点在此点附近的一段位移。从功的定义式可见功的三要素是质点受力、质点位移、受的力与位移的夹角。

在国际单位制中,功的单位是牛顿·米($\text{N} \cdot \text{m}$),又叫做焦耳(J)。

例 1-15 某物体在平面上沿坐标轴 Ox 的正方向前进。平面上各处的摩擦系数不等,因而作用于物体的摩擦力是变力。已知某段路面摩擦力的大小随坐标 x 变化的规律是 $f = 1 + x (x > 0)$ 。

求从 $x = 0$ 到 $x = L$ 摩擦力所做的功。

解 物体沿 x 轴正方向运动, 摩擦力方向与运动方向相反, 因此力和位移的夹角 $\alpha = \pi$ 。于是, $\cos\alpha = \cos\pi = -1$ 。当物体从 x 移动到 $x + dx$ 时, 摩擦力的元功为

$$dA = f \cos\alpha ds = -(1+x)dx$$

从 $x = 0$ 到 $x = L$, 摩擦力做的总功为

$$A = -\int_0^L (1+x)dx = -L\left(1 + \frac{1}{2}L\right)$$

3. 功率

功随时间的变化率, 即单位时间内的功称为功率。用 p 表示, 则有

$$p = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (1-40)$$

即瞬时功率等于力和速度的标积。

在国际单位制中, 功率的单位是焦耳 / 秒(J/s), 又称为瓦特(W)。

1.5.2 保守力的功

1. 重力的功

如图 1.16 所示, 质量为 m 的质点沿曲线从 a 点运动到 b 点, a 和 b 相对于地面的高度分别为 h_1 和 h_2 , 求该过程中重力所做的功。

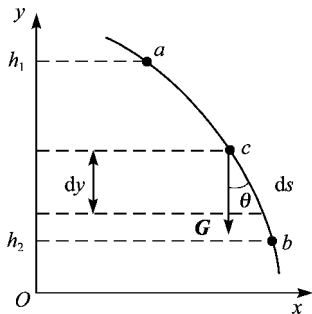


图 1.16

建立如图 1.16 所示的坐标系, 重力 \mathbf{G} 只有 y 方向的分量, 有

$$F_x = 0, \quad F_y = -mg$$

所以

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_a}^{x_b} F_x dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y dy = \int_{h_1}^{h_2} -mg dy = mg(h_1 - h_2) \quad (1-41)$$

上式表明, 重力对物体所做的功仅与物体的始、末位置有关, 与物体运动的路径无关。即

只要物体始末位置一定,无论物体沿哪条路径运动,重力对物体所做的功都相同。

2. 弹性力的功

如图 1.17 所示,劲度系数为 k 的轻质弹簧水平放置,一端固定,一端系一小球,以平衡位置为坐标原点,小球在任一位置所受弹性力为

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$$

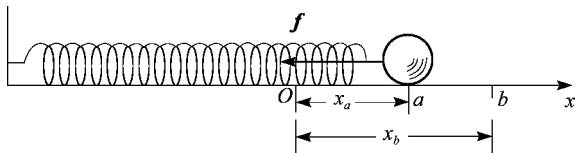


图 1.17

对于元位移的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}\mathbf{i} = -kx\mathbf{i} \cdot d\mathbf{x}\mathbf{i} = -kx dx$$

小球从位置 a 到 b , 弹性力的功为

$$A = \int dA = \int_{x_a}^{x_b} -kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right) \quad (1-42)$$

显然弹性力的功只与 a, b 的位置有关,与小球的运动路径无关。

3. 万有引力的功

设质量为 m 的质点,在另一质量为 m_1 (静止不动) 的质点的万有引力作用下,沿图 1.18 所示的任意路径由 a 点运动到 b 点,现计算万有引力在这个过程中所作的功。

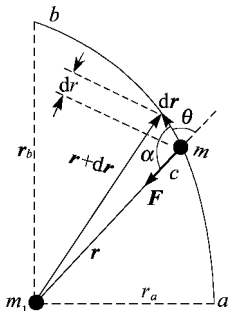


图 1.18

以质量为 m_1 的质点的位置为原点,设起点 a 和终点 b 的位矢分别为 \mathbf{r}_a 和 \mathbf{r}_b 。在曲线路径上任一点 c ,取微小元位移 $d\mathbf{r}$,万有引力 \mathbf{F} 与 $d\mathbf{r}$ 的夹角为 α 。

根据万有引力定律,质量为 m 的质点与质量为 m_1 的质点间的万有引力为

$$\mathbf{F} = -G \frac{mm_1}{r^2} \mathbf{e}_r = -G \frac{mm_1}{r^3} \mathbf{r}$$

质量为 m 的质点位移为 $d\mathbf{r}$, 则引力所做的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{mm_1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

因为 $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r |d\mathbf{r}| \cos\theta = r dr$, 所以 m 从 a 到 b , 万有引力对 m 做的功为

$$\begin{aligned} A &= \int dA = \int_{r_a}^{r_b} -G \frac{mm_1}{r^3} dr = -Gmm_1 \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} \\ &= - \left[\frac{Gmm_1}{r_a} - \frac{Gmm_1}{r_b} \right] \end{aligned} \quad (1-43)$$

此式表明, 万有引力作的功也只与始末位置有关, 而与路径无关。

重力、弹性力、万有引力(还有静电力、分子力等), 它们对物体所做的功与路径无关, 只由物体始末位置所决定, 若物体沿任一闭合路径运动一周, 这些力所做的功为零, 即 $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, 则这类力称为保守力。而作功多少与物体运动路径有关的力称为非保守力, 如摩擦力。

1.5.3 势能

势能概念是在保守力的基础上提出的。在保守力场中, 保守力做功与运动的路径无关, 仅取决于相互作用的两物体初态和终态的相对位置, 如重力、弹性力、万有引力的功。

保守力做功的结果总是等于一个由相对位置决定的函数增量的负值, 而功总是与能量改变量相联系的。因此, 上述由相对位置决定的函数必定是某种能量的形式, 我们称其为势能函数, 简称势能, 用 E_p 表示, 即

$$A_{\text{保}} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} = - (E_p - E_{p0}) = - \Delta E_p \quad (1-44)$$

关于势能的概念, 我们强调以下几点:

第一, 只有在保守力的情况下才能引入势能的概念; 对于非保守力, 不存在势能的概念。

第二, 要确定保守力场中某一点势能的确切数值, 必须首先选定势能零点。这样, 当势能零点选定后, 质点在保守力场中一定位置的势能, 在数值上等于质点从该位置经任意路径移动到势能零点时保守力所作的功。若用 E_{pa} 代表质点在任意点 a 时的势能, 则

$$E_{\text{pa}} = \int_a^{b(\text{势能零点})} \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} \quad (1-45)$$

这是关于势能定义的另一表达。由此可见, 在保守力场中一定位置与一定的势能相对应, 势能是质点组或物体系系列位置的函数。

第三, 某点势能的数值显然和势能零点的选择有关, 势能增量与势能零点选择无关。

第四, 势能是属于系统的。势能的存在是由于物体间有着相互作用的保守力(如重力、万

有引力),或是由于物体各部分间出现了相互作用的保守力(如弹性力),并且势能值是由物体间的相对位置或物体的形变所决定的。

第五,由式(1-44)知,在保守力场中,质点从起始位置 a 移到了位置 b ,保守力的功 A 等于质点在始末两位置势能增量的负值。

1. 重力势能

选择 b 点所在的平面为势能零点,则 a 点的重力势能定义为

$$E_p = mgh \quad (1-46)$$

式中, h 为 a, b 两点的高度差。

式(1-46)的结果表明: a 点的重力势能等于将质点由 a 运动到势能零点 b 时重力所做的功。当 a 点高于势能零点时,势能大于零;低于势能零点时,势能小于零。一般情况下,如不特别说明,势能零点选择在地面上。

在引入重力势能之后,重力做的功还可表示为

$$A_{\text{重}} = -(mgh_2 - mgh_1) = -(E_{p2} - E_{p1}) \quad (1-47)$$

2. 弹性势能

弹性势能是由于弹簧的形变产生的。一般情况下,习惯将质点的平衡位置作为弹性势能的零点。这样,由式(1-41)可知,当质点坐标为 x 时,弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1-48)$$

它等于将质点由该点运动到平衡位置时,弹力所做的功。同样,弹性力做的功等于弹性势能增量的负值,即

$$W_{\text{弹}} = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) = -(E_{p2} - E_{p1}) \quad (1-49)$$

弹性势能属于弹簧和相连质点所共有的,因此称它为弹簧与质点构成系统的弹性势能,简称为质点的弹性势能。

3. 引力势能

取无限远处为势能零点, m 与 m_1 之间距离为 r 时系统的引力势能为

$$E_p = -G \frac{mm_1}{r} \quad (1-50)$$

1.6 动能定理 机械能守恒定律

1.6.1 动能定理

质量为 m 的质点在合外力 \mathbf{F} 的作用下由 a 移动到 b , 它在 a, b 两点的速率分别为 v_a, v_b . 合外力对质点所作的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F_t |d\mathbf{l}|$$

考虑到 $F_t = m \frac{dv}{dt}$, $|d\mathbf{l}| = ds = v dt$, 代入上式可得合外力做功为

$$A = \int_a^b dA = \int_{v_a}^{v_b} m v dv = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 \quad (1-51a)$$

我们把 $\frac{1}{2} m v^2$ 叫做质点的动能, 用 E_k 表示, 它是物体由于运动而具有的能量. 式(1-51a)可写成

$$A = E_{kb} - E_{ka} \quad (1-51b)$$

说明合外力对质点所作的功等于质点动能的增量, 这个结论叫做质点的动能定理.

将质点的动能定理推广到由多个质点组成的系统, 对于系统中每个质点都可以根据式(1-51b)列出一个方程, 将所有方程相加就得到适用于质点系的动能定理, 显然定理的形式仍然与单个质点的相同, 即

$$A = A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_k - E_{k0} \quad (1-52)$$

这时, E_k 和 E_{k0} 分别表示质点系在终态和初态的总动能, A 表示作用在质点系上所有力的功, 是一切外力的功和一切内力的功之和. 式(1-52)说明质点系的动能的增量等于作用于质点系的一切外力作的功和一切内力作的功之和, 这就是质点系的动能定理.

动能定理适用于惯性系。

例 1-16 以 30m/s 的速率将一石块扔到一结冰的湖面上, 它能向前滑行多远? 设石块与冰面间的滑动摩擦系数为 $\mu_k = 0.05$.

解 以 m 表示石块的质量, 则它在冰面上滑行时受到的摩擦力为 $f = \mu_k mg$. 以 s 表示石块能滑行的距离, 则滑行时摩擦力对它做的总功为 $A = \mathbf{f} \cdot \mathbf{s} = -fs = -\mu_k mgs$. 已知石块的初速率为 $v_A = 30\text{m/s}$, 而末速率为 $v_B = 0$, 而且在石块滑动时只有摩擦力对它做功, 所以根据动能定理可得

$$-\mu_k mgs = 0 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

解得

$$s = \frac{v_A^2}{2\mu_k g} = \frac{30^2}{2 \times 0.05 \times 9.8} = 9.8(\text{m})$$

例 1-17 一质量为 10 kg 的物体沿 x 轴无摩擦地滑动, $t = 0$ 时物体静止于原点。求:

- (1) 若物体在力 $F = (3 + 4t)$ N 的作用下运动了 3s, 它的速度增为多大?
 (2) 若物体在力 $F = (3 + 4x)$ N 的作用下移动了 3m, 它的速度增为多大?

解 (1) 由动量定理 $\int_0^t F dt = mv$ 得

$$v = \int_0^t \frac{F}{m} dt = \int_0^3 \frac{3 + 4t}{10} dt = 2.7 (\text{m/s})$$

(2) 由动能定理 $\int_0^x F dx = \frac{1}{2}mv^2$ 得

$$v = \sqrt{\int_0^x \frac{2F}{m} dx} = \sqrt{\int_0^3 \frac{2(3 + 4x)}{10} dx} = 2.3 (\text{m/s})$$

1.6.2 功能原理

对于一个物体系而言, 内力又可分为保守内力和非保守内力。因此式(1-52)可改写为

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内}} + A_{\text{保守内}} = E_k - E_{k0} \quad (1-53)$$

若用 $E_{p0} = \sum_i E_{p0i}$, $E_{p1} = \sum_i E_{p1i}$ 分别表示质点系初、末态势能之和, 而 $A_{\text{保守内}}$ 表示系统内所有保守内力做功之和, 则

$$A_{\text{保守内}} = -(E_{p1} - E_{p0})$$

代入式(1-53)得

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内}} - (E_{p1} - E_{p0}) = E_{k1} - E_{k0}$$

则

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内}} = (E_{p1} + E_{k1}) - (E_{k0} + E_{p0})$$

动能和势能统称为机械能, 即 $E = E_k + E_p$, 于是

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内}} = E_1 - E_0 \quad (1-54)$$

即物体系的外力和非保守内力的总功等于系统机械能的增量, 这一结论称为功能原理。

例 1-18 如图 1.19 所示, 在光滑的水平面上, 有一质量为 M 的静止物体 B, 在 B 上有一质量为 m 的静止物体 A。A 在受到冲击以后以 v_A (相对于水平面) 向右运动, A 与 B 之间的摩擦因数为 μ , A 逐渐带 B 一起运动, 问 A 从开始运动到相对于 B 静止时, 在 B 上运动多远?

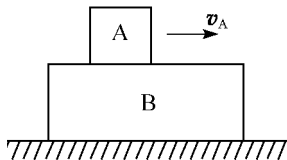


图 1.19

解 取 A 和 B 组成的系统, 设 A 相对于 B 静止时的共同速度为 v , 由动量守恒定律得

$$mv_A = (m + M)v$$

A 受冲击后, 系统不受外力, 但摩擦力(内力)做功不为零。设 A 从开始运动到相对于 B 静止时, 在 B 上移动了 x , 由功能原理得

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = \Delta E_k \quad (1)$$

$$\text{即} \quad -\mu mgx = \frac{1}{2}(m + M)v^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (2)$$

联立 ①、② 两式得

$$x = \frac{Mv_A^2}{2\mu g(m + M)}$$

1.6.3 机械能守恒定律

根据功能原理式(1-54), 当物体系在运动过程中, 如果

$$A_{\text{外}} = 0, A_{\text{非保内}} = 0$$

那么有

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 0 \quad \text{或} \quad E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0} \quad (1-55)$$

这就是说, 如果一个系统内只有保守力作功, 而其他内力和外力都不做功, 则运动过程中系统内各质点间动能和势能可以相互转换, 但它们的总和(即总机械能)保持不变, 这就是质点系的机械能守恒定律。

1.6.4 能量守恒定律

在机械运动范畴, 所涉及到的能量只有动能和势能。由于运动形式的多样化, 我们必将遇到其他形式的能量, 如热能、电能、原子能等。摩擦力做功时, 必然伴随着机械能向热能的转换。考虑到诸如此类的现象, 人们从大量事实的观测中总结出一个普遍的能量守恒定律, 即在一个孤立系统(不受外界作用的系统)内, 能量可以由一种形式转换为另一种形式, 但系统的总能量保持不变。

在一个孤立系统内经历任何变化时, 该系统所有的能量的总和保持不变, 这是普遍的能量守恒定律。

能量守恒定律是自然界的一个普遍规律, 对于宏观现象和微观领域均能适用, 机械能守恒定律只是它在力学范畴的特例。

例 1-19 如图 1.20 所示, 质量为 m 、速度为 v 的钢球, 射向质量为 m' 的靶, 靶中心有一小孔, 内有劲度系数为 k 的弹簧, 此靶最初处于静止状态, 但可在水平面上作无摩擦滑动。求子弹射入靶内弹簧后, 弹簧的最大压缩距离。

解 设弹簧的最大压缩量为 x_0 , 钢球与靶共同运动的速度为 v_1 。由动量守恒定律, 有

$$mv = (m + m')v_1$$

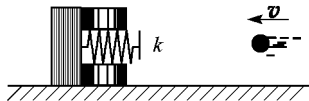


图 1.20

又由机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m + m')v_1^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

联立方程式解得弹簧的最大压缩距离为

$$x_0 = v \sqrt{\frac{mm'}{k(m + m')}}$$

例 1-20 如图 1.21 所示,小车上有光滑的半径为 R 的 $1/4$ 圆弧面 AB ,小车与地面间无摩擦,小车质量为 M ,一个质量为 m 的小物块从静止开始滑到 B 点,求小物块在 B 点时小车的速度和小物块的速度。

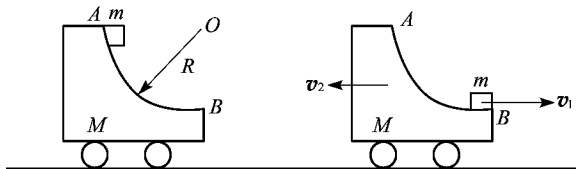


图 1.21

解 小物块从 A 点滑到 B 点的过程中只有保守力(重力)做功,系统机械能守恒 $E_A = E_B$,则有

$$mgR = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2$$

小木块离开 B 点时,系统在水平方向上无外力作用,系统在水平方向动量守恒。

$$mv_1 = Mv_2$$

联立方程式解得

$$v_1^2 = \frac{2MgR}{M + m}, \quad v_2^2 = \frac{2m^2 gR}{M(m + M)}$$

即

$$v_1 = \sqrt{\frac{2MgR}{M + m}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2m^2 gR}{M(m + M)}}$$

阅读材料

超重与失重

“激流探险”是一种颇为刺激的娱乐游戏。其最惊险之处莫过于从一个很高的坡顶滑下，在此过程中，你会感到整个心似乎悬于空中，很不踏实。实际上，并不是由于心脏的位置提高了，而是因为自身的重心位置相对平衡位置提高了，从而产生了向下的加速度，这就是“失重现象”。反之，若物体具有向上的加速度（可以是竖直向上，也可以是某加速度竖直向上的分量）就是“超重现象”。在宇宙航行中飞行员就遇到了超重和失重的现象。

在载人航天器的发射加速上升段，宇航员要经受5倍于地球引力的超不过载、125dB的高强噪声和振动刺激；宇航员返回地面时则要经受开伞减速和着陆冲击的考验。这些统称为超重或者过载，重力作用于人体的方向由头至足时则称正超重；反之，重力的方向由足至头时称负超重。正超重时，血液受惯性作用由上身转移到下身，引起头部、上身缺血，视力出现障碍，严重时可发生晕厥。高 G 值的超重，人取坐姿难以适应，所以宇航员通常采取仰卧姿，这样对人体的影响较轻。人对高 G 值的横向超重可耐受十多分钟。航天中经受的这种横向超重，一般时间较短，经过训练的宇航员容易耐受。

在失重的环境里，宇航员的生活与工作跟地面上不一样。为了睡觉，宇航员必须钻进一个牢固绑在飞船壁上的睡袋里。吃的东西要装在罐头和软管里。为防止水的飞散，漱完口要把水吐在餐巾上，然后把餐巾包好扔掉。在飞船上，要拧紧一颗螺钉或挪动一下位置都不是容易的事，还得经过地面失重实验室的专门训练才能掌握！

失重是航天飞行中的一个特殊物理现象，载人航天实践证明，失重对人体的生理功能有很大影响，但不像原先想象的那样严重。

生物在长期的进化过程中，形成了与地球重力环境相适应的生理结构与功能特征，但进入太空后，由于地球重力作用几乎完全消失，生物有机体处于一种失重状态。人类40多年的航天实践表明，微重力环境对宇航员的健康、安全和工作能力会产生严重影响，中长期航天飞行可导致宇航员出现多种生理、病理现象，主要表现为心血管功能障碍、骨丢失、免疫力下降、肌肉萎缩、内分泌机能紊乱、工作能力下降等。

失重可引起心血管功能的改变。失重时人体的流体静压丧失，血液和其他体液不像重力条件下那样习惯地流向下身。相反，下身的血液会流到胸腔、头部，可引起宇航员面部浮肿、头胀、颈部静脉曲张、鼻咽部堵塞、身体重心上移。人体的感受器感知体液增加，于是机体通过体液调节系统减少体液，出现体液转移反射性多尿，导致水盐从尿中排出，血容量减少，血红蛋白量也可相应减少；还可出现心律不齐、心肌缺氧以及心肌的退行性变化，并出现相应

的心功能障碍,如心输出量减少、运动耐力降低等。宇航员返回地面后对重力不适应而易于出现心慌气短以及体位性晕厥等症状。这些可严重影响身体健康和工作效率,因而成为中长期载人航天飞行的一大障碍,也是迫切需要解决的航天医学问题。随着航天飞行时间的延长,宇航员的心血管功能可在新的水平上达到新的平衡,心率、血压、运动耐力以及减少的血容量和血红蛋白可逐步恢复到飞行前的水平。

长期失重还可引起对抗重力的肌肉出现废用性萎缩,宇航员在长期的航天飞行中加强肌肉锻炼可以延缓这种肌肉萎缩,回到地面重力环境中后,进行积极的肌肉锻炼,可以逐步使肌肉得到一定的恢复。

值得说明的是,所谓“超重”和“失重”并不是重力的增减。在近地面,物体所受的重力可基本认为是不变的,而“超重”和“失重”指的只是“视重”;形象一点说,“超重”即物体对其支持物的压力大于其重力。因为在竖直方向,物体有向上的加速度,根据牛顿第二定律,其竖直方向所受合力必向上,用以产生加速度。同理,“失重”即物体对其支持物的压力小于重力。

对于这种物理现象,我们不必费心去背,只要回想坐电梯时的情景即可。例如,从低层至高层,电梯分别做向上加速、匀速、向上减速运动,则我们经历超重、匀速、失重的过程。通过联系实际来分析和处理一些物理问题是一种形象有效的方法。

习题 1

1. 质点作曲线运动, r 表示位置矢量, v 表示速度, a 表示加速度, s 表示路程, a_t 表示切向加速度。对下列表达式,即

$$(1) dv/dt = a; (2) dr/dt = v; (3) ds/dt = v; (4) |dv/dt| = a_t。$$

下列判断正确的是()

- A. 只有(1)、(4)是对的
B. 只有(2)、(4)是对的
C. 只有(2)是对的
D. 只有(3)是对的

2. 一个质点在做圆周运动时,有()

- A. 切向加速度一定改变,法向加速度也改变
B. 切向加速度可能不变,法向加速度一定改变
C. 切向加速度可能不变,法向加速度不变
D. 切向加速度一定改变,法向加速度不变

3. 一段路面水平的公路,转弯处轨道半径为 R ,汽车轮胎与路面间的摩擦因数为 μ ,要使汽车不至于发生侧向打滑,汽车在该处的行驶速率()

- A. 不得小于 $\sqrt{\mu g R}$
B. 必须等于 $\sqrt{\mu g R}$

C. 不得大于 $\sqrt{\mu g R}$

D. 还应由汽车的质量 m 决定

4. 对质点组有以下几种说法:

- (1) 质点组总动量的改变与内力无关;
- (2) 质点组总动能的改变与内力无关;
- (3) 质点组机械能的改变与保守力无关。

下列对上述说法判断正确的是()

A. 只有(1)是正确的

B. (1)、(2)是正确的

C. (1)、(3)是正确的

D. (2)、(3)是正确的

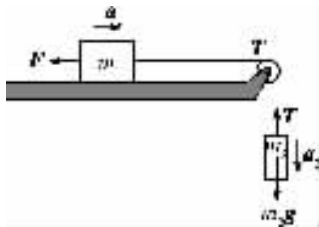
5. 质点运动时,位矢为 $\mathbf{r} = i + 2t^2j - tk$ (SI),求:

- (1) 质点第 3s 的平均速度;
- (2) 质点在 3s 时的瞬时速度。

6. 一质点沿半径为 $R = 0.1\text{m}$ 的圆周运动,其运动方程 $\theta = 2 + 2t^3$,求 $t = 2\text{s}$ 时切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 的大小。

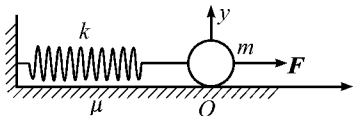
7. 如图题 7 所示,在光滑桌面上放置一质量 $m_1 = 5.0\text{kg}$ 的物块,用绳子通过一无摩擦滑轮将它和另一质量为 $m_2 = 2.0\text{kg}$ 的物块相连。求:

- (1) 保持两物块静止,需用多大的水平力 F 拉住桌上的物块?
- (2) 换用 $F = 30\text{N}$ 的水平力向左拉 m_1 时,两物块的加速度和绳中张力 T 的大小各如何?
- (3) 怎样的水平力 F 会使绳中张力为零?



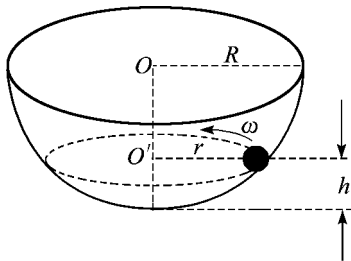
图题 7

8. 如图题 8 所示,质量为 m 的小球与劲度系数为 k 的轻弹簧构成弹簧振子系统。开始时,弹簧处于原长,小球静止。现以恒力 F 向右拉小球,若小球与水平面间的摩擦系数为 μ ,求小球向右运动的最大距离。



图题 8

9. 如图题 9 所示, 在一只半径为 R 的半球形碗内, 有一粒质量为 m 的小钢球。当小球以角速度 ω 在水平面内沿碗内壁作匀速圆周运动时, 它距碗底有多高?

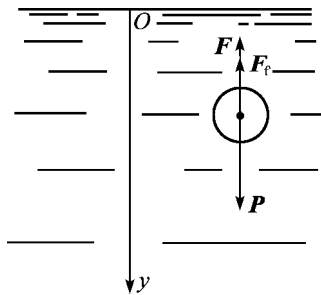


图题 9

10. 质量为 m 的跳水运动员, 从 10.0m 高台上由静止跳下落入水中。高台与水面距离为 h 。把跳水运动员视为质点, 并略去空气阻力。运动员入水后垂直下沉, 水对其阻力为 bv^2 , 其中 b 为一常量。若以水面上一点为坐标原点 O , 竖直向下为 Oy 轴(见图题 10), 求:

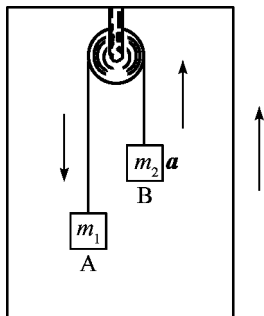
(1) 运动员在水中的速率 v 与 y 的函数关系;

(2) 若 $b/m = 0.40\text{m}^{-1}$, 跳水运动员在水中下沉多大距离才能使其速率 v 减少到落水速率 v_0 的 $1/10$? (假定跳水运动员在水中的浮力与所受的重力大小恰好相等)

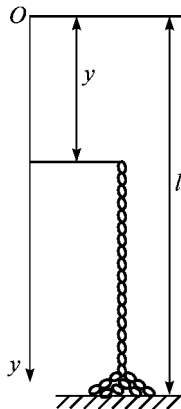


图题 10

11. 如图题 11 所示, 电梯相对于地面以加速度 a 竖直向上运动。电梯中有一滑轮固定在电梯顶部, 滑轮两侧用绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B。设滑轮的质量和滑轮与绳索间的摩擦力均略去不计。已知 $m_1 > m_2$, 如以加速运动的电梯为参考系, 求物体相对地面的加速度和绳的张力。



图题 11

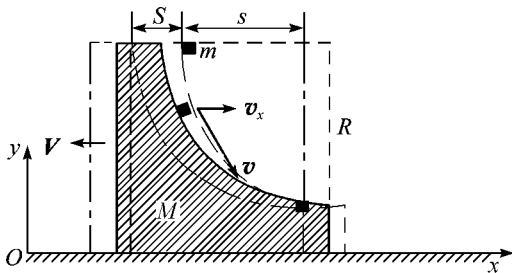


图题 12

12. 如图题 12 所示,一质量均匀柔软的绳竖直地悬挂着,绳的下端刚好触到水平桌面上。如果把绳的上端放开,绳将落在桌面上。试证明:在绳下落过程中的任意时刻,作用于桌面上的压力等于已落到桌面上绳的重量的三倍。

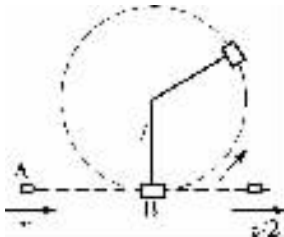
13. 高空作业时系安全带是非常必要的。假如一质量为 51.0kg 的人,在操作时不慎从高空竖直跌落下来,由于安全带的保护,最终使他被悬挂起来。已知此时人离原处的距离为 2.0m ,安全带弹性缓冲作用时间为 0.50s 。求安全带对人的平均冲力。

14. 如图题 14 所示,一个有 $1/4$ 圆弧滑槽的大物体的质量为 M ,停在光滑的水平面上,另一质量为 m 的小物体自圆弧顶点由静止下滑。求当小物体 m 滑到底时,大物体 M 在水平面上移动的距离。



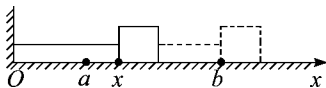
图题 14

15. 质量为 m 的弹丸 A,穿过如图题 15 所示的摆锤 B 后,速率 v 减少到 $\frac{v}{2}$ 。已知摆锤的质量为 m' ,摆线长度为 l ,如果摆锤能在垂直平面内完成一个完整的圆周运动, v 的最小值应为多少?



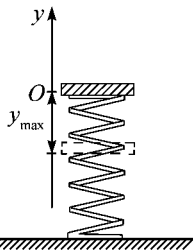
图题 15

16. 如图题 16 所示, 质量为 m 的滑块置于粗糙水平桌面上, 并系于橡皮绳的一端, 橡皮绳的另一端系于墙上。橡皮绳原长为 a , 处于拉伸状态的橡皮绳相当于劲度系数为 k 的弹簧。滑块与桌面的摩擦系数为 μ 。现将滑块向右拉伸至橡皮绳长为 b 后再由静止释放。求滑块撞击墙时的速度为多大。



图题 16

17. 如图题 17 所示, 一轻弹簧的劲度系数 $k = 200\text{N/m}$, 竖直静止在桌面上, 今在其上端轻轻地放置一质量为 $m = 2.0\text{kg}$ 的砝码后松手。求:



图题 17

- (1) 此后砝码下降的最大距离 y_{\max} ;
- (2) 砝码下降 $\frac{1}{2}y_{\max}$ 时的速度 v 。

第 2 章 刚体的定轴转动

前一章我们研究了质点和质点系的力学基本规律,本章将研究连续体力学问题。任何物体受外界力的作用或其他作用都将在不同程度上发生形状和大小的变化。例如,铁轨在火车经过时,或是在温度变化时都会发生变形。如果一物体在力的作用下所发生的形变甚小,以至忽略它不影响对问题的研究,我们就认为这一物体在力的作用下将保持其形状和大小不变,我们把在力的作用下,大小和形状都始终保持不变的物体称为刚体。正如上面所说,任何物体受力的作用都要发生形变,因此刚体也是一个理想模型。

刚体是一个特殊的质点系统,我们仍然可以运用质点的运动规律来加以研究,从而使牛顿力学的研究范围从质点向刚体拓展开来。本章将着重讲述刚体绕定轴转动,主要内容有转动惯量、力矩、角动量等物理量,以及转动定律和角动量守恒定律。

2.1 刚体定轴转动的描述

2.1.1 刚体 刚体定轴转动

刚体的运动方式很多,有定轴转动、平动、定点转动、平面运动等,本书只讨论刚体的定轴转动,这是一种最简单最基本的刚体运动。掌握刚体的定轴转动可以进一步认识刚体的各种运动。

1. 刚体平动

在刚体运动全过程中,若任意时刻,刚体内任意一条直线都保持它的方向不变,即始终保持平行,这样的刚体运动叫做刚体的平动。如图 2.1 所示,刚体作平动时,刚体的轨迹并不一定是直线。

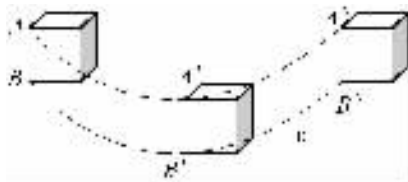


图 2.1 刚体平动示意图

例如,升降机的运动、汽缸中活塞的运动、刨床上刨刀的运动和车床上车刀的运动等都是平动。显然刚体平动时,在任意一段时间内,刚体中所有质点的位移都是相同的。而且在任何时刻各个质点的速度和加速度也都是相同的,刚体内任何一个质点的运动都可代表整个刚体的运动。因此,平动的刚体可以用质点力学的方法处理。

2. 刚体定轴转动

如果刚体运动时,刚体内各点都绕同一直线作圆周运动,这种运动称为转动,这一直线称为转轴。例如,固定在墙上的钟表指针的转动、电风扇叶轮的转动、地球的自转运动等都是转动。如果转轴是固定不动的,则称为定轴转动。刚体的定轴转动是最基本、最简单的转动形式。在本章中,我们主要讲述刚体的定轴转动。

一般情况下,刚体的运动是很复杂的。但是可以证明,刚体的一般运动可以看做是平动和转动的合成。例如,一个车轮的滚动,可以分解为车轮随着轴承的平动和整个车轮绕轴承的转动。

3. 定轴转动的角量描述

刚体做定轴转动时,与固定转轴垂直的平面叫做转动平面,在这个面上的所有质点都绕定轴做圆周运动。由于刚体内各个质点到转轴的距离不同,所以描述刚体上各质点运动的线量(位移、速度、加速度)是不同的,这样看来用线量来研究作定轴转动的刚体是不方便的。但是刚体内各点运动的角量(角位移、角速度、角加速度)是相同的,所以用角量来研究刚体的转动比较方便。第一章中有关角量以及角量与线量的关系,对刚体定轴转动均可适用。

以定轴与转动平面的交点 O 为坐标原点, x 轴为参考方向,如图 2.2 所示。面上任意点 P 的位置矢量为 r ,角位置为 θ ,角速度矢量 ω 与线速度矢量 v 的关系(见图 2.3) 为

$$v = \omega \times r \quad (2-1)$$

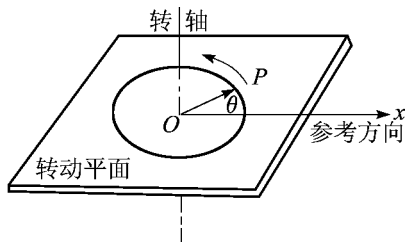


图 2.2 转动平面

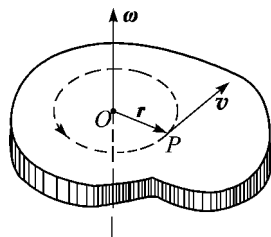


图 2.3 v, ω, r 的关系

角速度的方向可由右手螺旋定则确定,如图 2.4 所示,把右手的大拇指伸直,其余四指弯曲,使弯曲方向与刚体的转动方向一致,此时大拇指所指的方向即为角速度 ω 的方向。

若定轴转动是匀加速转动,以 ω_0 表示刚体在 $t = 0$ 时的角速度,则仿照匀加速直线运动

公式可得匀加速转动的相应公式

$$\omega = \omega_0 + at \quad (2-2)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2-3)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (2-4)$$

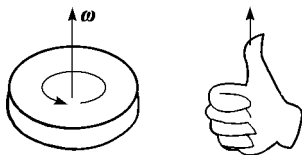


图 2.4 右手螺旋定则

例 2-1 一条缆索绕过一定滑轮拉动一升降机(见图 2.5), 滑轮半径 $r = 0.5\text{m}$, 如果升降机从静止开始以加速度 $a = 0.4\text{m/s}^2$ 匀加速上升, 且缆索与滑轮之间不打滑, 求:

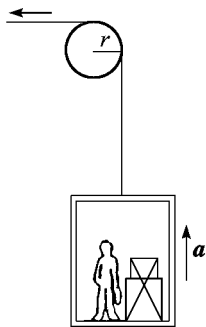


图 2.5

- (1) 滑轮的角加速度;
- (2) 开始上升后, $t = 5\text{s}$ 末滑轮的角速度;
- (3) 在这 5s 内滑轮转过的转数。

解 (1) 由于升降机的加速度和轮缘上一点的切向加速度相等, 由式(1-20)可得滑轮的角加速度为

$$\alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{a}{r} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8(\text{rad/s}^2)$$

- (2) 利用式(2-2), 并由 $\omega_0 = 0$ 可得 5s 末滑轮的角速度为

$$\omega = \alpha t = 0.8 \times 5 = 4(\text{rad/s})$$

- (3) 5s 内滑轮转过的角度由式(2-3)得

$$\theta = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 5^2 = 10\text{rad}$$

转过的转数为

$$n = \frac{10}{2\pi} = 1.6(\text{圈})$$

例 2-2 一飞轮的半径 $r = 0.1\text{m}$, 以转速 $n = 1800\text{r/min}$ 转动, 受到制动后均匀地减速, 经 $t = 20\text{s}$ 后静止。求:

- (1) 飞轮的角加速度;
- (2) 从制动开始到静止时飞轮转过的转数;
- (3) $t = 10\text{s}$ 时飞轮的角速度及飞轮边缘一点的加速度。

解 (1) 初角速度为

$$\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \times \frac{1800}{60} = 188.5(\text{rad/s})$$

对于匀变速转动, 角加速度为

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = -\frac{\omega_0}{t} = \frac{-188.5}{20} = -9.42(\text{rad/s}^2)$$

(2) 飞轮的角位移为

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 188.5 \times 20 - \frac{1}{2} \times 9.42 \times 20^2 = 1.88 \times 10^3(\text{rad})$$

转过的转数为

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1.88 \times 10^3}{2\pi} = 300(\text{转})$$

(3) $t = 10\text{s}$ 时, 角速度为

$$\omega = \omega_0 + at = 188.5 - 9.42 \times 10 = 94.2(\text{rad/s})$$

线速度为

$$v = r\omega = 94.2 \times 0.1 = 9.42(\text{m/s})$$

此时, 切向加速度为

$$a_t = r\alpha = 0.1 \times (-9.42) = -0.94(\text{m/s}^2)$$

法向加速度为

$$a_n = r\omega^2 = 0.1 \times 94.2^2 = 8.88 \times 10^2(\text{m/s}^2)$$

飞轮边缘一点的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \approx 8.88 \times 10^2(\text{m/s}^2)$$

可看出, a 的方向几乎与 a_n 的方向相同, 指向轮心。

2.1.2 转动动能 转动惯量

1. 转动动能

刚体定轴转动时,刚体上每一点都以同一角速度 ω 作圆周运动。每一质点都有动能 $\frac{1}{2}mv^2$,刚体的转动动能就是刚体中所有点的动能之和。

在图 2.3 中,设 P 点的质点质量为 Δm_i ,速度为 v_i ,其动能 ΔE_{ki} 为

$$E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

刚体定轴转动的总动能为

$$E_k = \sum E_{ki} = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 \quad (2-5)$$

2. 转动惯量

式(2-5)中 $\sum \Delta m_i r_i^2$ 叫做刚体对定轴的转动惯量 J ,因此

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (2-6)$$

转动惯量为

$$J = \sum r_i^2 \Delta m_i \quad (2-7a)$$

也就是说,转动惯量 J 等于刚体中每个质元的质量与这一质元到转轴距离的平方的乘积的总和,而与质元的运动速度无关。将式(2-6)与平动中的动能公式相比较,可知转动惯量相当于平动时的质量,是物体在转动中惯性大小的量度。

对质量连续分布的刚体,上式可写成积分形式

$$J = \int r^2 dm \quad (2-7b)$$

积分式中 dm 是质元的质量, r 是此质元到转轴的距离。

在国际单位制中,转动惯量的单位是千克·米²($\text{kg} \cdot \text{m}^2$),从式(2-7)中可以看出,刚体的转动惯量与下列因素有关:(1)刚体的质量。当刚体形状与转轴位置确定后,刚体的质量越大,转动惯量越大。(2)质量相对转轴的分布。在质量一定的情况下,刚体的质量分布距转轴越远,其转动惯量越大。例如,同材料的质量相等的空心圆柱和实心圆柱,对于圆柱的轴来说,前者的转动惯量较大。(3)转轴的位置。刚体距转轴越远,它的转动惯量越大。

例 2-3 求质量为 m 、长为 l 的均匀细棒对下面三种转轴的转动惯量:(1)转轴通过棒的中心并和棒垂直;(2)转轴通过棒的一端并和棒垂直;(3)转轴通过棒上距中心为 h 的一点并和棒垂直。

解 如图 2.6 所示,在棒上离轴 x 处,取一长度元 dx ,如棒的质量线密度为 λ ,则长度元

的质量为 $dm = \lambda dx$ 。

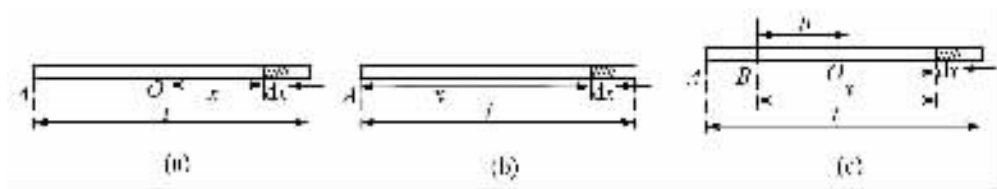


图 2.6 细棒的转动惯量计算

(1) 当转轴通过中心并和棒垂直时(见图 2.6a),有

$$J_0 = \int r^2 dm = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda x^2 dx = \frac{\lambda l^3}{12}$$

又因为 $\lambda l = m$,代入得

$$J_0 = \frac{1}{12} ml^2$$

(2) 当转轴通过棒的一端 A 并和棒垂直时(见图 2.6b),有

$$J_A = \int_0^l \lambda x^2 dx = \frac{1}{3} \lambda l^3 = \frac{1}{3} ml^2$$

(3) 当转轴通过棒上距中心为 h 的 B 点并和棒垂直时(见图 2.6c),有

$$J_B = \int_{-l/2+h}^{l/2+h} \lambda x^2 dx = \frac{1}{12} ml^2 + mh^2 = J_0 + mh^2 \quad (2-8)$$

本例表明,同一刚体对不同位置的转轴,转动惯量并不相同。

式(2-8)说明,刚体对任意轴的转动惯量等于刚体对通过质心的平行轴的转动惯量 J_0 加上刚体的质量 m 乘以两平行轴之间的距离 h 的平方。此结果虽然是从此特例中得到的,但可以证明对任何形状的刚体均适用,称为平行轴定理。

例 2-4 求半径为 R 、质量为 M 的均匀细环对直径的转动惯量。

解 如图 2.7 所示,取弧长 ds , ds 的质量为 $dm = \lambda ds = \lambda R d\theta$, $r = R \sin\theta$,有

$$J = \int_0^M r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \theta \lambda R d\theta = \frac{1}{2} MR^2$$

即
$$J = \frac{1}{2} MR^2$$

几何形状简单的、密度均匀的几种物体对不同转轴的转动惯量如表 2-1 所示。

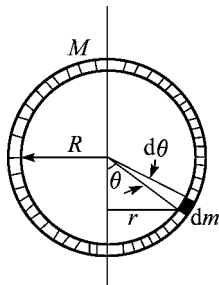
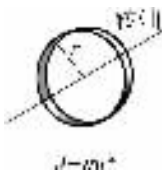

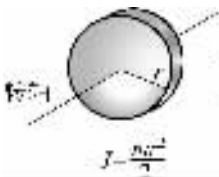
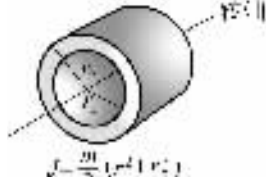
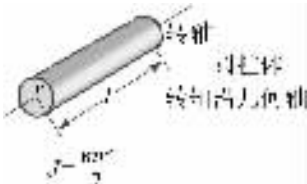
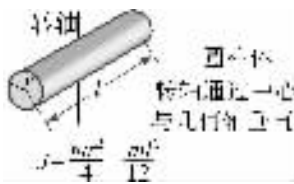

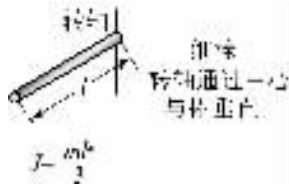
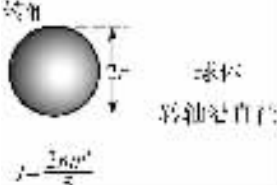
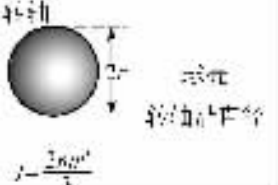


图 2.7

表 2-1 几种几何形状物体的转动惯量

 <p>圆环 转轴平行于环面且与环面相切</p> $J = mr^2$	 <p>圆环 转轴沿直径</p> $J = \frac{mr^2}{2}$
 <p>薄圆盘 转轴通过圆心与盘面垂直</p> $J = \frac{mr^2}{2}$	 <p>圆柱 转轴沿几何轴</p> $J = \frac{m}{2}(r^2 + l^2)$
 <p>圆柱 转轴沿几何轴</p> $J = \frac{mr^2}{2}$	 <p>圆柱 转轴通过圆心与几何轴垂直</p> $J = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$
 <p>细棒 转轴通过一端与棒垂直</p> $J = \frac{ml^2}{12}$	 <p>细棒 转轴通过中心与棒垂直</p> $J = \frac{ml^2}{12}$
 <p>球体 转轴沿直径</p> $J = \frac{2}{5}mr^2$	 <p>球体 转轴沿直径</p> $J = \frac{2}{5}mr^2$

2.2 刚体的定轴转动规律

2.2.1 力矩

刚体的转动状态要发生变化,就必须有外力对它作用。而外力的作用效果不仅与力的大小和方向有关,而且与力的作用点相对转轴的位置有关。例如对于绕定轴转动的门,如图 2.8 所示,当力 F 的作用线通过门轴或力 F 平行于门轴时,不论作用力 F 多大都无法改变门的运动状态。用同样大小、方向的力推,当力的作用靠近门轴时,不容易把门推开;当作用点远离门轴时,就容易把门打开。

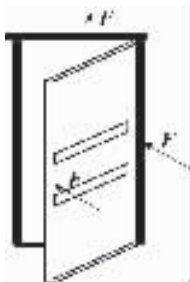


图 2.8 绕定轴转动的门

力的大小、方向和力的作用线相对于转轴的位置是决定转动效果的几个重要因素。所以在研究转动问题时,为描述力对转动物体的作用,需要引入力对转轴的力矩这一新的物理量。

1. 力矩

一个具有固定轴的刚体在外力 F 的作用下转动,力 F 在转动平面内,如图 2.9 所示。转轴到力的作用线之间的垂直距离 d 称为力对转轴的力臂。力的大小与力臂的乘积定义为力对转轴的力矩的大小。用 M 表示,有

$$M = Fd \quad (2-9a)$$

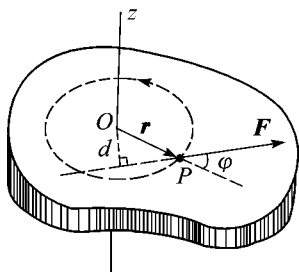


图 2.9 转轴的力矩示意图

由图 2.9 可知,力臂 d 与矢径 r 的关系为 $d = r \sin \varphi$, φ 是矢径 r 与力 F 之间的夹角。因此式(2-9a)可改写为

$$M = Fr \sin \varphi \quad (2-9b)$$

力矩是一矢量,力矩的完整定义为

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2-10)$$

力矩矢量的方向是由右手螺旋法则确定的,即右手四指由矢径 r 的方向经小于 π 的角度转到力 F 的方向,此时大拇指的指向就是力矩的方向。

在国际单位制中,力矩的单位为牛顿·米(N·m)。

2. 刚体转动的动能定理

(1) 力矩的功

质点和质点系问题中,力的功的定义是作用力 F 与元位移 $d\mathbf{l}$ 点乘积的线积分,即

$$A = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

类比上述定义,可得到刚体定轴转动时力矩的功等于作用力矩 M 与角元位移 $d\theta$ 的点乘积的积分,即

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (2-11)$$

若 M 是恒力矩,力矩做的功为

$$A = M\Delta\theta = M(\theta_2 - \theta_1) \quad (2-12)$$

例 2-5 如图 2.10 所示,一个转轮 A 绕中心轴的转动惯量为 J ,转轴的摩擦力矩为 M_f ,转轮半径为 R ,轮边缘绕有轻的细绳,用恒力 F 拉绳,A 轮被拉动转过 n 圈,求拉力和摩擦力矩对轮做的功,设 B 轮质量不计,转轴光滑。

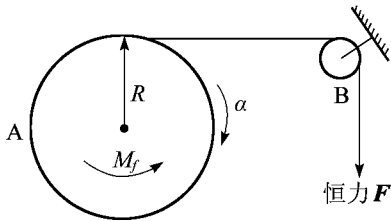


图 2.10

解 作用轮上的拉力为恒力 F ,作用在轮上有两个力矩,分别为 $M_F = FR$ 及 M_f 。轮转过 n 圈时,角位移 $\Delta\theta = 2\pi n$,有

$$A_F = M_F \cdot \Delta\theta = 2\pi nRF$$

$$A_f = -M_f \cdot \Delta\theta = -2\pi nM_f$$

式中, A_f 中的负号表示题中摩擦力矩作负功。

(2) 刚体的动能定理

力矩对刚体做功是力矩的空间积累过程。对定轴转动的合外力矩的功与转动动能 E_k 的关系为

$$A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

得

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \Delta E_k \quad (2-13)$$

上式表明合外力矩对定轴刚体所做的功等于刚体转动动能的增量, 这一关系称为定轴转动的动能定理。

例 2-6 一根质量为 m 、长为 l 的匀质细棒, 可绕一水平的光滑转轴 O 在竖直面内转动, 如图 2.11 所示。开始细棒在水平位置, 然后任其自由转下。求棒过竖直位置时的角速度。

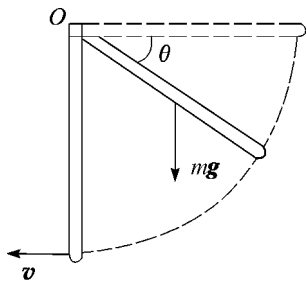


图 2.11

解 以细棒为研究对象。在棒下摆过程中它受两个力作用, 重力和轴的支持力。由于支持力对轴的力矩为零, 因此只有重力对细棒做功。

重力对转轴 O 的力矩等于重力与重力作用点在竖直方向位移的乘积, 即

$$M = mg \frac{l}{2} \cos\theta$$

式中, θ 是棒从水平位置转下的角度。可见, 重力矩是变力矩。

当棒转过一微小角位移 $d\theta$ 时, 重力矩所做的元功为

$$dA = mg \frac{l}{2} \cos\theta d\theta$$

在棒从水平位置转到竖直位置的过程中, 重力矩所做的总功为

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg \frac{l}{2} \cos\theta d\theta = \frac{1}{2}mgl$$

假设棒在竖直位置时的角速度为 ω , 则棒从水平位置转到竖直位置的过程中, 其转动动

能的增量为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

根据刚体定轴转动的动能定理有

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

由表 2-1 知,转动惯量 $J = \frac{1}{3}ml^2$,代入上式得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

2.2.2 刚体的定轴转动定律

质点受外力 \boldsymbol{F} 作用,质点有加速度 \boldsymbol{a} ,它们的关系由牛顿第二定律表达。定轴刚体受外力矩 \boldsymbol{M} 作用,刚体有角加速度 α ,它们的关系由转动定律表达,有

$$M = J\alpha \quad (2-14)$$

这就是刚体的定轴转动的基本规律。它说明,定轴转动的刚体所受的合外力矩等于刚体的转动惯量和其角加速度的乘积。

对于此定律,需明确以下几点:

(1) 该定律在转动中的地位和牛顿第二定律在质点力学中的地位相当。如果将 $M = J\alpha$ 和 $F = ma$ 两式相比较,可知式中的转动惯量 J 与质量 m 相当。它是反映转动惯性大小(给定刚体对给定转轴而言)的物理量。

(2) 当合外力矩为常量时,角加速度亦为常量,刚体作匀加速转动;当合外力矩为变量时,角加速度亦为变量,刚体作变加速转动。当合外力矩为零时,角加速度为零,刚体作匀速转动。

(3) M, J, α 都是对同一转轴而言的,这一点在分析和计算问题时必须注意。

例 2-7 如图 2.12 所示,一个质量为 M 、半径为 R 的定滑轮(当作均匀圆盘,其转动惯量为 $mR^2/2$) 上面绕有细绳。绳的一端固定在滑轮边上,另一端挂一质量为 m 的物体而下垂。忽略轴处摩擦,求物体 m 下落时的加速度。

解 分析受力关系得图 2.12 中二拉力 \boldsymbol{T}_1 和 \boldsymbol{T}_2 的大小相等,以 T 表示。

对定滑轮 M ,由转动定律,对于轴 O ,有

$$RT = J\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

对物体 m ,由牛顿第二定律,有

$$mg - T = ma$$

滑轮和物体的运动学关系为

$$a = R\alpha$$

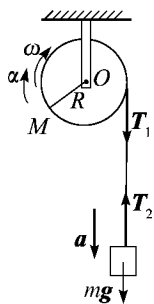


图 2.12

联立以上三式可得物体下落的加速度为

$$a = \frac{m}{m + \frac{M}{2}}g$$

例 2-8 如图 2.13 所示,一钟摆由一长度为 l 、质量为 m_1 的均质细杆和固定在其一端的质量为 m_2 的摆球(可以看作质点)构成。它绕过杆另一端的固定轴无摩擦地摆动。求在任意位置 θ 时钟摆的角加速度。

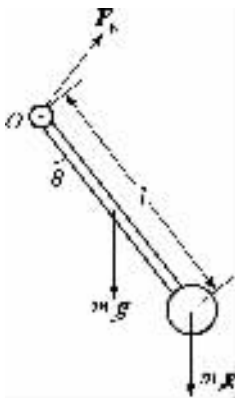


图 2.13

解 钟摆受力情况如图 2.13 所示,取 θ 沿逆时针方向为正向。由于细杆的重心在它的质心上,则细杆与摆球组成的系统的重力力矩为

$$M = M_1 + M_2 = -m_1 g \frac{l}{2} \sin\theta - m_2 gl \sin\theta$$

上式中力矩取负号是因为力矩沿顺时针方向。

刚体系统的总转动惯量为

$$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{3}m_1 l^2 + m_2 l^2$$

由刚体定轴转动定律有

$$-m_1 g \frac{l}{2} \sin\theta - m_2 g l \sin\theta = \left(\frac{1}{3}m_1 l^2 + m_2 l^2\right)\alpha$$

解得

$$\alpha = -\frac{2(m_1 + 2m_2)g \sin\theta}{3(m_1 + 3m_2)l}$$

上式中角加速度为负说明角加速度与力矩同向。

2.3 角动量 角动量守恒定律

2.3.1 角动量

质量为 m 、以速度 v 运动的质点, 动量为

$$p = mv$$

类似地, 把转动惯量 J 和角速度 ω 的乘积称为绕定轴转动刚体的角动量, 有

$$L = J\omega \quad (2-15)$$

2.3.2 角动量定理

由角动量的定义可以看出, 刚体的角动量与它的角速度成正比。因此, 当刚体作变速转动时, 它的角动量会因角速度的变化而变化。由转动定律, 刚体角速度变化快慢与它所受的力矩有关, 即

$$\begin{aligned} M = J\alpha &= J \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} \\ M &= \frac{dL}{dt} \end{aligned} \quad (2-16)$$

上式表明, 作用在绕定轴转动刚体上的所有外力对转轴的合外力矩等于刚体对该轴的角动量对时间的导数, 这就是刚体绕定轴转动的角动量定理。

与转动定律式(2-14) 比较, 刚体绕定轴转动的角动量定律式(2-16) 适用范围更广泛。

把式(2-16) 变成

$$M dt = dL$$

积分得

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{J\omega_1}^{J\omega_2} d(J\omega) = J\omega_2 - J\omega_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = L_2 - L_1 \quad (2-17)$$

式中, L_1 和 L_2 分别表示在 t_1 和 t_2 时刻转动刚体对转轴的角动量; $\int_{t_1}^{t_2} M dt$ 称为在 $t_2 - t_1$ 时间内对转轴的角冲量。角冲量表示了力矩在某一段时间内的累积效应。

式(2-17)表明,作用在绕定轴转动刚体上的合外力矩在某段时间内的角冲量等于刚体在同一时间内角动量的增量。这一关系也称为积分形式的角动量定理。

2.3.3 角动量守恒定律

由角动量定理式(2-17),当作用在定轴转动刚体上的所有外力对转轴的合外力矩为零时,刚体在运动过程中角动量保持不变,即当 $M = 0$ 时,有

$$J\omega = \text{常量} \quad \text{或} \quad L_2 = L_1 \quad (2-18)$$

这就是刚体的角动量守恒定律。

对于角动量守恒定律要明确以下几点:

(1) 刚体在转动过程中,如果转动惯量 J 保持不变,由于角动量守恒($J\omega = \text{恒量}$), ω 必然是恒量,因此刚体作匀速转动。

(2) 刚体在转动过程中,如果转动惯量 J 发生变化,由于角动量守恒($J\omega = J_0\omega_0 = \text{常量}$), ω 必然发生变化。当 J 变大时, ω 变小; J 变小时, ω 变大。但它们的乘积始终保持不变。

(3) 角动量守恒定律与前面介绍的动量守恒定律和能量守恒定律一样,是自然界中的普遍规律。

在日常生活中,利用角动量守恒定律的例子是很多的。例如舞蹈演员、溜冰运动员等,在旋转的时候,他们往往先把两臂张开旋转,然后迅速把两臂收回靠拢身体,使自己的转动惯量迅速减少,因而旋转速度加快。跳水运动员跳水时先将两臂伸直,然后将两臂和腿蜷缩以减小转动惯量,增大在空中翻转的角速度。当接近水面时,再伸直臂和腿,以增大转动惯量减小角速度,然后进入水中。

例 2-9 如图 2.14 所示,一质量为 m_1 、长度为 l 的均质细棒,可绕过其顶端的水平轴自由转动。质量为 m_2 的子弹以水平速度 v_0 射入静止的细棒下端,穿出后子弹的速度减小为 $\frac{1}{4}v_0$,求子弹穿出后棒所获得的角速度。

解 已知子弹的初速度为 v_0 ,穿出后子弹的速度为 $v = \frac{1}{4}v_0$,设子弹与细棒以初速 v_0

接触相碰时为起始状态,子弹以速度 $\frac{1}{4}v_0$ 穿出棒时为末状态,本题有两种不同的解法。

(1) 应用动量定理和角动量定理求解

设棒对子弹的阻力大小为 F ,对子弹应用动量定理可得

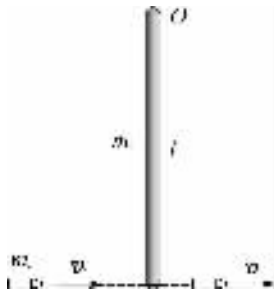


图 2.14

$$\int_0^t F dt = m_2 v - m_2 v_0 = -\frac{3}{4} m_2 v_0 \quad (1)$$

子弹对细棒的冲击力为 F' , 对细棒应用角动量定理可得

$$\int_0^t F' l dt = J \omega$$

而 $F' = -F$, $J = \frac{1}{3} m_1 l^2$, 故上式化为

$$\int_0^t F dt = -\frac{1}{3} m_1 l \omega \quad (2)$$

比较式 (1) 和式 (2) 可得

$$-\frac{1}{3} m_1 l \omega = -\frac{3}{4} m_2 v_0$$

所以角速度为

$$\omega = \frac{9m_2 v_0}{4m_1 l}$$

(2) 应用系统角动量守恒定律求解

取子弹和细棒作为系统。在子弹射入棒端并从棒中穿出的过程中, 子弹与细棒之间的作用力为内力, 轴承上的作用力以及重力均不产生力矩, 故系统所受合外力矩为零, 系统角动量守恒。应用系统角动量守恒定律, 有

$$m_2 l v_0 = m_2 l v + J \omega$$

由此解得

$$\omega = \frac{m_2 l (v_0 - v)}{J} = \frac{\frac{3}{4} m_2 l v_0}{\frac{1}{3} m_1 l^2}$$

所以角速度为

$$\omega = \frac{9m_2 v_0}{4m_1 l}$$

例 2-10 一质量为 M 、半径为 R 的水平匀质圆盘可绕过中心的光滑竖直轴自由转动。在盘缘上站着一个质量为 m 的人，二者最初都相对于地面静止。当人在盘上沿盘边走一周时，盘对地面转过的角度多大？

解 如图 2.15 所示，对盘和人组成的系统，在人走动时系统所受的对竖直轴的外力矩为零，所以系统对此轴的角动量守恒。以 $J_{\text{人}}$ 和 $J_{\text{盘}}$ 分别表示人和盘对轴的转动惯量，并以 $\omega_{\text{人}}$ 和 $\omega_{\text{盘}}$ 分别表示任一时刻人和盘绕轴的角速度。由于起始角动量为零，所以由角动量守恒可得

$$J_{\text{人}} \omega_{\text{人}} - J_{\text{盘}} \omega_{\text{盘}} = 0$$

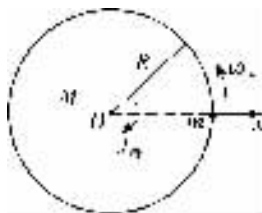


图 2.15

式中， $J_{\text{人}} = mR^2$ ， $J_{\text{盘}} = \frac{1}{2}MR^2$ ，以 $\theta_{\text{人}}$ 和 $\theta_{\text{盘}}$ 分别表示人和盘对地面发生的角位移，则有

$$\omega_{\text{人}} = \frac{d\theta_{\text{人}}}{dt}, \omega_{\text{盘}} = \frac{d\theta_{\text{盘}}}{dt}$$

代入上式得

$$mR^2 \frac{d\theta_{\text{人}}}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \frac{d\theta_{\text{盘}}}{dt}$$

上式两边都乘以 dt ，并积分，则有

$$\int_0^{\theta_{\text{人}}} mR^2 d\theta_{\text{人}} = \int_0^{\theta_{\text{盘}}} \frac{1}{2}MR^2 d\theta_{\text{盘}}$$

由此解得

$$m\theta_{\text{人}} = \frac{1}{2}M\theta_{\text{盘}}$$

人在盘上走一周时，有

$$\theta_{\text{人}} = 2\pi - \theta_{\text{盘}}$$

代入上式得

$$\theta_{\text{盘}} = \frac{4\pi m}{2m + M}$$

例 2-11 恒星在其核燃料燃尽,达到生命末期时,会发生所谓的超新星爆发。这时星体表面有大量物体喷发进入星际空间,同时星的内核收缩,坍缩成体积很小的中子星。设有某恒星绕自转轴每 45 天转一周,它的内核半径 R_0 约为 $2 \times 10^7 \text{ m}$,坍缩半径 R 仅为 $6 \times 10^3 \text{ m}$ 的中子星,将坍缩前后的星体内核(内核质量可认为恒定)当作匀质球,估算出中子星的旋转频率。

解 在星际空间中恒星不会受到显著的外力矩,因此角动量应满足守恒定律,即坍缩前后的角动量 $J_0\omega_0$ 和 $J\omega$ 相等,用 m 表示恒星内核质量,则有

$$\frac{2}{5}mR_0^2\omega_0 = \frac{2}{5}mR^2\omega$$

因为 $\omega = 2\pi\nu$, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, 可得中子星的旋转频率为

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 = \nu_0 \left(\frac{2 \times 10^7}{6 \times 10^3} \right)^2 = \frac{1}{9} \nu_0 \times 10^8$$

$$\nu_0 = \frac{1}{45 \times 24 \times 3600} \text{ s}^{-1}$$

所以有

$$\nu = \frac{1}{9} \times 10^8 \times \frac{1}{45 \times 24 \times 3600} = 2.9 \text{ s}^{-1}$$

阅读材料

宇宙大爆炸理论

所有的天体都有其诞生和发展变化直至衰亡的历史。按天体物理学家的论断,宇宙空间也是在一次绝无仅有的大爆炸中“诞生”的。

在大爆炸之前,宇宙的体积是零,所以其温度是无限高的。大爆炸开始后,随着宇宙的膨胀,辐射的温度随之降低。大爆炸 1 秒钟之后,温度降低到了 100 亿度,这个温度是太阳中心的 1 千倍。此时的宇宙中主要包含光子、电子、中微子和它们的反粒子(光子的反粒子就是它本身),以及少量的质子和中子。此时粒子的能量极高,它们相互碰撞并产生大量不同种类的正反粒子对。这些正反粒子对碰到一起时又会湮灭,但此时它们的产生率远大于湮灭率。

顺便一提的是,中微子和反中微子之间以及它们和其他粒子之间的相互作用非常微弱,所以它们并没有互相湮灭掉,以至于直到今天它们仍然存在。中微子的质量被认为是零,但 1981 年前苏联和 1998 年、1999 年日本的研究显示,中微子可能具有微小的质量。如果被证实的话,有助于我们间接地探测到它们。它们是“暗物质”的一种形式,具有足够的引力去阻止宇宙的膨胀并使其坍缩。

宇宙继续膨胀,温度的降低使得粒子不再具有如此高的能量,它们开始结合。与此同时,大部分正反电子相互湮灭,并产生了更多的光子。大爆炸 100 秒后,温度降到了 10 亿度,这相当于最热的恒星的内部温度。质子和中子由于强相互作用力(核力)而结合。一个质子和一个中子组成氘核(重氢);氘核再和一个质子和一个中子形成氦核。根据计算,大约有四分之一的质子和中子转变为氦核,以及少量更重的元素,如锂和铍。其余的中子衰变为质子,也就是氢核。

几个钟头之后氦和其他元素的产生停止下来。在这之后的 100 万年左右,宇宙什么事也没有发生,只是膨胀。当温度降低到了几千度时,电子和原子核不能再抵抗彼此间相互的吸引力而结合成原子。由于宇宙存在着小范围的不均匀,区域性的坍缩开始发生,其中的一些区域在区域外物体引力的作用下开始缓慢地旋转。当坍缩的区域逐渐缩小时,由于角动量守恒,它自转的速度也逐渐加快。当区域变得足够小时,自转的速度足以平衡引力的作用,像我们银河系这样的碟状星系就诞生了。另外一些区域由于没有得到旋转而形成椭圆形星系。这种星系的整体不发生旋转,但它的个别部分稳定地绕着它的中心旋转,因而也能平衡引力坍缩。

由于星系中的星云仍有不均匀性,它们被分割为更小的星云,并进一步收缩形成恒星。恒星由于引力坍缩产生的高温引发核聚变,聚变产生的能量又抵抗了继续收缩的趋势,恒星开始稳定地燃烧。质量越大的恒星燃烧得越快,因为它需要释放更多的能量才能平衡自身更强的引力。它们甚至会在 1 亿年这样短的时间里耗尽自己的燃料。

恒星有时会发生被称为“超新星”的巨大喷发,这种喷发令其他一切恒星都显得黯淡无光。这时一些恒星在晚期产生的重元素就会被抛回到星系中,并成为下一代恒星的原料。我们的太阳就是第二或第三代恒星,它含有大约 2% 这种重元素。还有少量的重元素聚集并形成了绕恒星公转的行星,我们的地球也是其中之一。

对于宇宙的起源,我们仍然有很多问题:第一,为什么宇宙在大尺度上如此的均匀?背景辐射的温度也一样?除非宇宙的不同区域刚好从同样的温度开始!第二,为什么我们的宇宙会以如此接近临界的速率膨胀?如果在大爆炸后 1 秒钟的时刻其膨胀速率只要小十亿亿分之一,那么我们的宇宙早已坍缩!第三,我们的宇宙非常光滑和规则,而从概率上来讲,紊乱的和无规则宇宙的数量应该占绝对优势,因为宇宙初始状态的选择是随机的。我们为何恰巧遇到这样渺茫的几率呢?

为了解释这些现象,麻省理工学院的学者阿伦·固斯提出了“暴涨宇宙模型”。他认为,早期的宇宙不是像现在这样以递减的速率膨胀,而是存在着一个快速膨胀的时期,宇宙的加速度膨胀使其半径在远远小于 1 秒钟的时间里增大了 100 万亿亿亿(1 的后面跟 30 个 0) 倍。

固斯认为,大爆炸的状态是非常热和相当紊乱的。这些高温表明宇宙中的粒子具有极高的能量。在如此的高温下,强相互作用力、弱相互作用力和电磁力都被统一成为一个力;当宇

宙膨胀并变冷,力之间的对称性由于粒子能量的降低而被破坏,强力、弱力和电磁力变得彼此不同。这就好像液态水在各个方向上性质都相同,而结冰形成晶体后,就变成了各向异性,水的对称性在低能态被破坏了。

当宇宙暴涨时,它所有的不规则性都被抹平,就如同吹涨一个气球时,它上面的皱褶都被抹平一样。

暴涨模型还能解释为什么宇宙中存在着这么多物质。在量子理论里,粒子可以从“粒子-反粒子对”的形式从能量中创生出来。这些粒子和反粒子具有正能量,而这些粒子的质量产生的引力场具有负能量(因为靠得较近的物体比分开得较远的物体能量低),宇宙的总能量为零,这保证了能量守恒不被破坏。零的倍数仍然为零,在暴涨时期宇宙体积急剧加倍的过程中,可以制造粒子的总能量变得非常之大,以致于我们的宇宙现在大约拥有 1 亿亿亿亿亿亿亿亿亿(1 后面跟 80 个零)个粒子。固斯是这样形容这件事的:“宇宙是最彻底的免费午餐!”

习题 2

1. 一汽油发动机曲轴的转速在 12s 内由 $1.2 \times 10^3 \text{ r/min}$ 均匀地增加到 $2.7 \times 10^3 \text{ r/min}$ 。求:

- (1) 曲轴转动的角加速度;
- (2) 在此时间内,曲轴转了多少转?

2. 某种电动机启动后转速随时间变化的关系为 $\omega = \omega_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, 式中 $\omega_0 = 9.0 \text{ rad/s}$, $\tau = 2.0 \text{ s}$ 。求:

- (1) $t = 6.0 \text{ s}$ 时的转速;
- (2) 角加速度随时间变化的规律;
- (3) 启动后 6.0s 内转过的圈数。

3. 图题 3 为一质量为 m 、半径为 R 的均质细圆环。求其对通过环中心且垂直于环面的轴转动惯量。



图题 3