第一章

函数、极限与连续

高等数学的主要内容是微积分，而函数又是微积分学研究的主要对象.函数是客观世界中变量之间对应关系的反映，是科学技术领域中表达自然规律的基本变量之间的对应法则.为了研究函数，我们需要借助极限这个方法，也就是说我们是利用极限手段来分析函数的各种性质的，本章将介绍函数、极限及函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

本章学习目标是：

1.理解并掌握函数、复合函数及初等函数的概念；

2.理解并掌握极限的概念、运算法则，熟练掌握求极限的方法；

3.理解无穷小与无穷大的概念、性质，掌握无穷小的比较，会利用等价无穷小求极限；

4.理解函数的连续性概念，会求间断点并判断其类型，了解闭区间上连续函数的性质.

第一节　函　　数

一、函数

1.函数的概念

定义 1-1　给定两个实数集 D 和 E，若有一个对应法则 f，使得对每个 $x\in D$，都有唯一确定的值 $y\in E$ 与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$.其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，全体函数值

的集合 E 称为函数的值域. 如果在 D 中任取某一个数值 x_0，与之对应的 y 的数值 y_0，称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$.

关于函数的定义，我们进行如下说明：

定义 1-1 中函数 $f(x)$ 的值域可以由定义域 D 和对应关系 f 所确定，因此，定义域 D 和对应关系 f 是确定函数的两个主要因素. 由此，我们说某两个函数相同，是指它们有相同的定义域和相同的对应关系.

例如，函数 $f(x)=1, x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $f(x)=\dfrac{x}{x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是不同的函数. 又如，函数 $f(x)=x, x\in[0,+\infty)$ 与函数 $f(x)=\sqrt{x^2}, x\in[0,+\infty)$ 是相同的函数.

例 1-1 设 $f(x)=x^2+3x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}$，求 $f(1)$ 和 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $f(1)=1^2+3\times1-\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{2}{1}=5$，

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+3\cdot\dfrac{1}{x}-x^2+2x=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-x^2+2x.$

例 1-2 设 $f(x-1)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$，求 $f(x)$.

解 令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，即

$$f(t)=\frac{(t+1)+3}{[(t+1)+1]^2}=\frac{t+4}{(t+2)^2},$$

所以有

$$f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^2}.$$

2. 函数的表示法

常用的函数的表示方法主要有三种：

(1)图像法. 即用坐标平面上的曲线来表示函数，一般自变量用横坐标表示，因变量用纵坐标表示. 自变量 x 和因变量 y 的每一对值，对应于坐标平面上的一个点 (x,y)，这些点的全体通常会形成一条曲线.

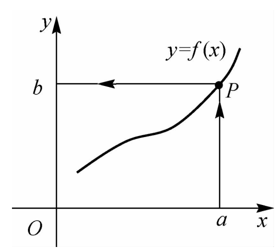

图 1-1

如图 1-1 所示的曲线就表示了一个函数 $y=f(x)$. 这时直线 $x=a$ 与曲线 $y=f(x)$ 交点 P 的纵坐标 b 就是函数值 $f(a)$，$b=f(a)$.

(2)列表法. 即把一系列自变量与其对应的因变量值列成表格形式来表示函数，如平方根表，对数表，三角函数表等是最常见的列表表示的函数.

(3)解析法(公式法). 即用具体的数学运算式表达自变量与因变量之间的关系. 如 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sin 2x$ 等.

在实践中，有些函数需要在其定义域不同部分用不同的解析式表达，这类函数通常称为分段函数. 如函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0.\end{cases}$$

该函数又称为符号函数，记作 $\mathrm{sgn}x$，它的定义域 $D\in(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，其图像如图 1-2 所示.

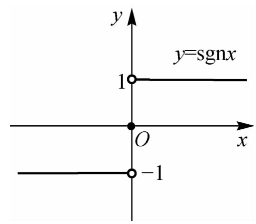

图 1-2

3. 函数的特性

1)有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在正数 M，使得对每一个 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$为上的有界函数，否则，称 $f(x)$为 D 上的无界函数.

有界函数的几何意义：若函数 $f(x)$为 D 上的有界函数，则函数 $f(x)$的图像完全落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 和 $f(x)=\cos x$ 为$(-\infty,+\infty)$上的有界函数. 因为对每一个 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$|\sin x|\leqslant 1 \text{ 和 } |\cos x|\leqslant 1 \text{ 成立.}$$

2)单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若对于任意的两个自变量 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，总有

(1)$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 内单调递增或单调增加，特别当严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$成立时，称 $f(x)$在 I 内是严格单调递增函数；

(2)$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 内单调递减或单调减少，特别当严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$成立时，称 $f(x)$在 I 内是严格单调递减函数.

反映在函数的图像上，单调增加函数的图形是随 x 的增大而上升的曲线；单调减少函数的图形是随 x 的增大而下降的曲线. 如图 1-3 和图 1-4 所示.

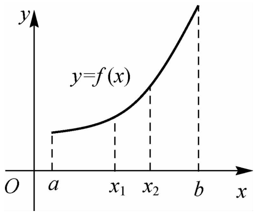

图 1-3

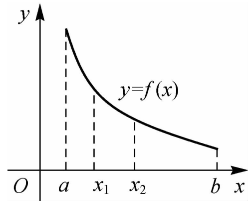

图 1-4

3)奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,若对于任意 $x\in D$,都有

(1)$f(x)=f(-x)$成立,则称函数 $f(x)$为偶函数;

(2)$f(x)=-f(-x)$成立,则称函数 $f(x)$为奇函数.

例如,$f(x)=x^3$,$f(x)=\sin x$ 为奇函数,$f(x)=x^2$,$f(x)=\cos x$ 为偶函数,而 $f(x)=\cos x+\sin x$ 是非奇非偶函数.

注:偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

4)周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,若存在一个正数 T,使得对于任意 $x\in D$ 有$(x\pm T)\in D$,且

$$f(x\pm T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期.

显然,若 T 为函数 $f(x)$的周期,则 $2T,3T,4T,\cdots$都为 $f(x)$的周期.我们通常说周期函数的周期是指 $f(x)$的最小正周期.例如函数 $\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数;函数 $f(x)=C$(C 为常数)是以任何正数为周期的周期函数,但不存在最小正周期.

二、反函数与复合函数

1.反函数

函数 $f(x)$反映了两个变量之间的对应关系,当自变量在定义域 D 内取定一个值后,因变量 y 的值也随之唯一确定.例如,在自由落体运动中,如果已知物体下落时间 t,要求出下落距离 s,则有公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$($t\geqslant 0$,g 为重力加速度),这里的 t 是自变量而距离 s 是因变量.但我们也常常需要考虑反过来的问题.已知下落距离 s,求出下落时间 t,这时我们可从上式解得 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$($s\geqslant 0$),这里距离 s 成为自变量而时间

t 成为因变量. 在数学上,如果把一个函数中的自变量和因变量进行对换后能得到新的函数,就把这个新函数称为原来函数的反函数.

定义 1-2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是数集 D,值域是数集 W. 若对每一个 $y\in W$,都有唯一的 $x\in D$ 适合关系 $f(x)=y$,那么就把此 x 值作为取定的 y 值的对应值,从而得到一个定义在 W 上的新函数. 这个新的函数称为 $y=f(x)$ 的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y)$$

这个函数的定义域为 W,值域为 D,相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由反函数的定义可知单调函数必有反函数.

在函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中,字母 y 表示自变量,字母 x 表示因变量. 但习惯上一般用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此当集中注意于反函数本身时,就常常对调函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x,y,把它改写成 $y=f^{-1}(x)$. 例如,函数 $y=-\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 1)$ 的反函数是 $x=y^2+1(y\leqslant 0)$,或改写为 $y=x^2+1(x\leqslant 0)$.

再如 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格增加,值域是 $(-\infty,+\infty)$,有反函数 $y=\arctan x$,它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

由中学代数已知,函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

2. 复合函数

在有些实际问题中,有时两个变量之间的依赖关系不是直接的,而是通过第三个变量联系起来的.

例如,质量为 m 的物体做自由落体运动时,动能 E 是时间 t 的函数(不考虑空气阻力).

由物理学可知,动能 E 是物体运动速度 v 的函数,即

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1-1}$$

而速度 v 又是时间 t 的函数,它们之间的关系是

$$v=gt \tag{1-2}$$

式中,g 为重力加速度.

将(1-2)式代入(1-1)式,得

$$E=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2$$

可见,时间 t 通过速度 v 间接影响动能 E,那么动能 E 当然可以看成时间 t 的函数,E 与 t 的关系称为一种复合的函数关系.

定义 1-3 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_1,函数 $g(x)$在 D 上有定义,且 $g(D)\subset D_1$,则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],x\in D$$

称为由函数 $y=f(u)$和函数 $u=g(x)$构成的复合函数,它的定义域为 D,变量 u 称为中间变量.

例 1-3 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中,即为所求的复合函数

$$y=\cos^2 x,x\in(-\infty,+\infty).$$

例 1-4 指出下列复合函数的结构.

(1)$y=(3x+1)^5$;　　(2)$y=5^{\sin(3x+1)}$;

(3)$y=\sqrt{\lg(x^2-3x+2)}$;　　(4)$y=\arcsin\sqrt{\dfrac{e^x+1}{x}}$.

解 (1)$y=(3x+1)^5$ 是由 $y=u^5$,$u=3x+1$ 这两个函数复合而成的.

(2)$y=5^{\sin(3x+1)}$是由 $y=5^u$,$u=\sin v$,$v=3x+1$ 这三个函数复合而成的.

(3)$y=\sqrt{\lg(x^2-3x+2)}$是由 $y=\sqrt{u}$,$u=\lg v$,$v=x^2-3x+2$ 这三个函数复合而成的.

(4)$y=\arcsin\sqrt{\dfrac{e^x+1}{x}}$是由 $y=\arcsin u$,$u=\sqrt{v}$,$v=\dfrac{e^x+1}{x}$这三个函数复合而成的.

注:(1)并不是任何两个函数都可以构成一个复合函数,例如,$y=\lg u$ 和 $u=-x^2$ 就不能构成复合函数(为什么?).

(2)复合函数也可由多于两个函数相继复合而成,但每一层函数都应该是基本初等函数或简单函数(常数与基本初等函数的有限次四则运算式).

三、初等函数

1.基本初等函数

在中学数学中,我们已经熟悉以下几类函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,将这五类函数统称为**基本初等函数**.

(1)幂函数 $y=x^\mu$,μ 是常数,$\mu\in\mathbf{R}$,其图像如图 1-5 所示.

幂函数的性质如下:

$$x^m\cdot x^n=x^{m+n},\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n},(x^m)^n=x^{mn}$$

(2)指数函数 $y=a^x$，a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1-6 所示.

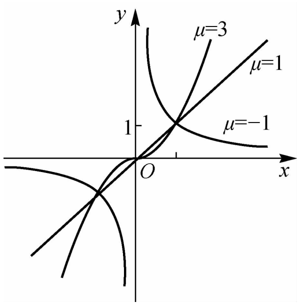

图 1-5

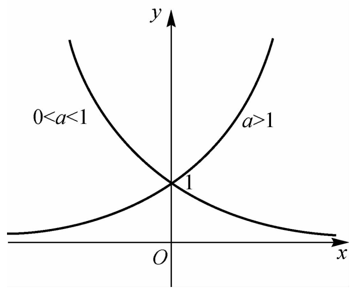

图 1-6

指数函数的性质如下：

$$a^x b^x=(ab)^x,\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$$

(3)对数函数 $y=\log_a x$，a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$，$x\in(0,+\infty)$，其图像如图 1-7 所示. 特别地，当 $a=10$ 时，记为 $y=\lg x$；当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$.

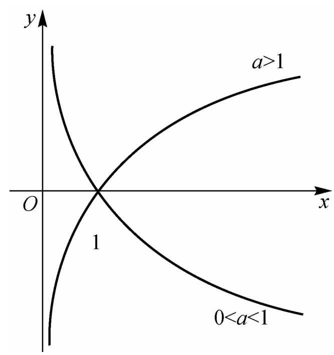

图 1-7

对数函数的性质如下：

①$\ln A+\ln B=\ln(AB)$；

②$\ln A-\ln B=\ln\dfrac{A}{B}$；

③$\ln A^B=B\ln A(A>0)$.

(4)三角函数. 三角函数包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数 6 种.

①正弦函数 $y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$，其图像如图 1-8 所示.

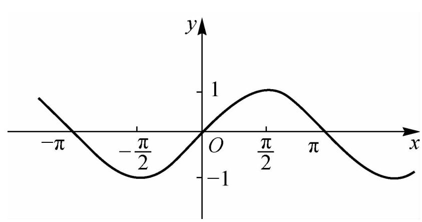

图 1-8

正弦函数的性质如下：

$\sin 2x=2\sin x\cos x$，$\sin(-x)=-\sin x$

②余弦函数 $y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$，其图像如图 1-9 所示.

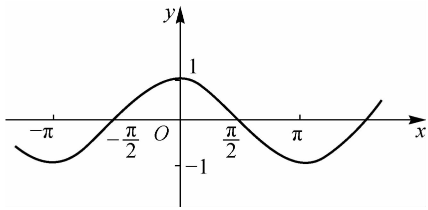

图 1-9

余弦函数的性质如下：

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x,$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

$$\cos(-x)=\cos x.$$

③正切函数 $y=\tan x, k\in\mathbf{Z}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, y\in(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1-10 所示.

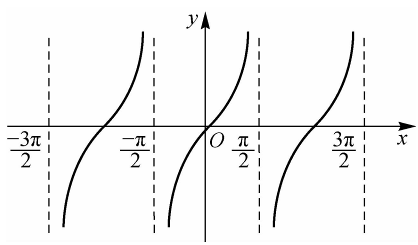

图 1-10

正切函数的性质如下：

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, \tan(-x)=-\tan x.$$

④余切函数 $y=\cot x, k\in\mathbf{Z}, x\neq k\pi, y\in(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1-11 所示.

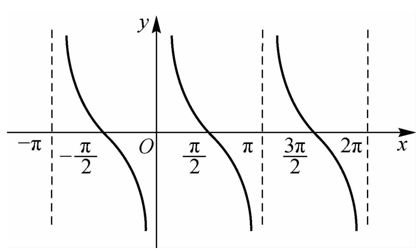

图 1-11

余切函数的性质如下：

$$\cot x=\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x},\cot(-x)=-\cot x.$$

⑤正割函数 $y=\sec x$.

正割函数的性质如下：

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},1+\tan^2 x=\sec^2 x.$$

⑥余割函数 $y=\csc x$.

余割函数的性质如下：

$$\csc x=\frac{1}{\sin x},1+\cot^2 x=\csc^2 x.$$

(5)反三角函数. 反三角函数包括反正弦函数、反余弦函数、反正切函数和反余切函数.

①反正弦函数 $y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,其图像如图 1-12 所示.

②反余弦函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$,其图像如图 1-13 所示.

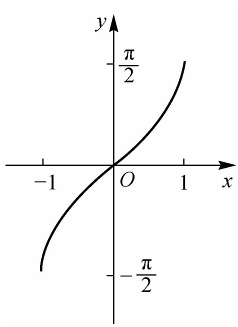

图 1-12

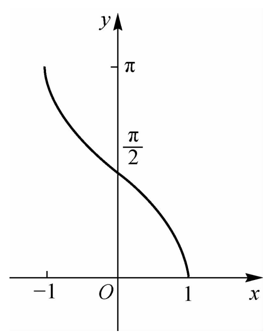

图 1-13

③反正切函数 $y=\arctan x, x\in(-\infty,\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,其图像如图 1-14 所示.

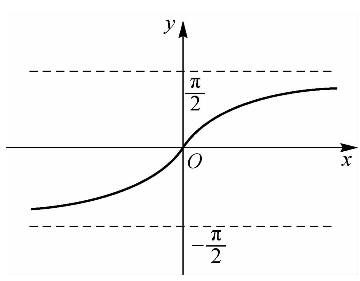

图 1-14

④反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x, x\in(-\infty,\infty), y\in(0,\pi)$，其图像如图 1-15 所示.

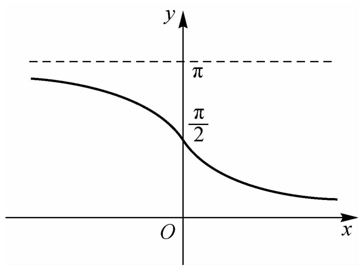

图 1-15

2. 初等函数

常数与基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的函数称为**初等函数**.

显然，初等函数只能用一个解析式子来表示. 例如，$y=\arctan\sqrt{1-e^x}$，$\sin 2x$，$e^{\cos x}$等都是初等函数.

凡不是初等函数的函数皆称为非初等函数. 例如，符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$，$f(x)=1+x+x^2+\cdots$等都是非初等函数.

习题 1-1

1. 判断题.

(1)函数 $y=2\sin x$ 是基本初等函数；（　　）

(2)单调递增函数一定无界；（　　）

(3)$\cos^2 x$ 是最小正周期为 2π 的周期函数；（　　）

(4)任意两个初等函数都可以复合成一个复合函数；（　　）

(5)奇函数的定义域一定是关于原点对称的.（　　）

2. 下列各题中 $f(x)$和 $g(x)$是否为同一函数？为什么？

(1)$f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$，$g(x)=x+3$；

(2)$f(x)=\lg x^3$，$g(x)=3\lg x$；

(3)$f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$；

(4)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

3.求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　　(2)$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$；

(3)$y=\ln(x+1)$；　　(4)$y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

4.判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=x^3+4$；　　(2)$\sin^2 x+\cos x$；

(3)$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(4)$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

5.设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, x>0, \\ 0, x=0, \\ x^2+1, x<0, \end{cases}$ 求 $f(0), f(3), f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$.

6.将 y 表示成 x 的函数.

(1)$y=u^2, u=\sin x$；　　(2)$y=\sqrt{u}, u=1+x^2$；

(3)$y=\lg u, u=\sin v, v=x+\dfrac{\pi}{6}$；　　(4)$y=\arccos u, u=\dfrac{1}{v^2}, v=\mathrm{e}^x$.

7.分析下列复合函数的结构.

(1)$y=\cos 5x$；　　(2)$y=(2x+1)^5$；

(3)$y=\mathrm{e}^{\sin 3x}$；　　(4)$y=\lg(\arctan\sqrt{1+x^2})$；

(5)$y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$；　　(6)$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln(3x-1)}}$.

第二节　极　　限

一、数列极限的定义

极限概念是求某些实际问题的精确解答而产生的.例如,我国古代数学家刘徽(公元3世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术,就是极限思想在几何学上的应用.

设有一圆,首先作内接正六边形,把它的面积记为 A_1;再作内接正十二边形,其面积记为 A_2;再作内接正二十四边形,其面积记为 A_3;循此下去,每次边数加倍,一般把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n(n\in\mathbf{N}^+)$.这样,就得到一系列内接正多边形的面积: