工作任务1 电费收入模型的构建

【能力目标】会求函数值，会将一个复合函数拆分成几个基本初等函数或简单函数；会计算函数的极限，并会将极限的思想与专业问题结合，解决专业上的问题；能建立基本的、简单的、生活中常见的数学模型.

【知识目标】理解函数的基本概念；了解基本初等函数的性质和图象；理解函数的极限概念；了解无穷小与无穷大的概念；掌握无穷小的性质；掌握求函数值及函数极限的方法.

【素质目标】培养学生分工合作、独立完成任务的能力；养成系统分析问题、解决问题的能力.

函数是数学课程学习研究的主要对象，极限方法是微积分最基本的方法. 通过构建一个实际单位的电费收入模型，进一步复习和加深函数和极限的有关知识，进而会建立实际生活中的初等函数模型.

工作任务 1.1 焊接火花的控制

工作任务(焊接火花的控制问题)：如图 1-1 所示，一焊接工人在垂直于地面的一根柱子 OA 的顶端位置处进行焊接，$OA=1.25$ m，由柱子顶端 A 处的喷头向外喷火花，为确保下面人员的安全，设计要求喷溅的火花在离 OA 距离为 1 m 处达到距地面最大高度，最大高度是 2.25 m. 为了让喷出的火花全部落在一个有效范围内，那么这一有效范围的半径至少要多少米，才能达到设计要求？

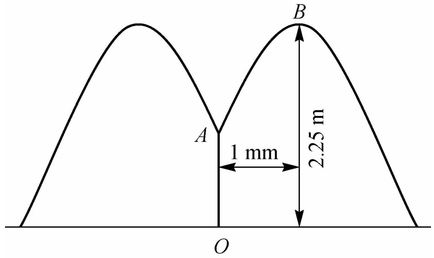

图 1-1

能力目标 会建立基本的、简单的、生活中常见的数学模型;会分析函数结构和确定函数的定义域;能求函数值.

知识目标 理解函数的基本概念,了解函数的几个特性;掌握函数求值、定义域计算方法;掌握建立函数关系的方法.

1.1.1 工作案例

案例 1-1(自由落体运动方程) 在自由落体运动中,物体下落的距离 S 随下落时间 t 的变化而变化,下落距离 S 与时间 t 的关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

案例 1-2(电量问题) 学院后勤处电工组记录了男生宿舍 5-203 今年 3 月到 10 月在正常情况下的使用电量(x 表示月份,y 表示当月使用电量总数),见表 1-1。

表 1-1

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	40	45	50	55	25	0	55	52

表 1-1 给出了“x 月”与“使用电量 y”之间的联系.

案例 1-3(电费问题) 某院教职工住宅区收取电费规定如下:月使用电不超过 300 度时,按生活照明用电价格收费 0.52 元/度,月使用电超过 300 度时,超过部分按工业生产用电价格收费 0.75 元/度.(1)求住户电费与电量之间的函数关系,并指出定义域;(2)住户三、四、五月份用电量分别为 250 度、300 度、420 度,求当月该用户的电费.

在上述的三个案例中,两个量同时变化,这两个量之间不是相互独立的,而是彼此存在一定的依赖关系,遵从一定的规律变化着,而函数正是描述了变量之间的某种依赖关系,它是微积分研究的对象.

1.1.2 知识链接

现实世界中,存在着各种各样不停变化的量,它们之间相互依赖、相互联系.函数就是对各种变量之间相互依赖关系的一种抽象,是高等数学研究的主要对象.函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联,到了 1837 年,德国数学家狄利克雷(1805—1859 年)抽象出了至今仍为人们易于接受且较为合理的函数概念.

一、函数概念

1. 函数定义

设 x 和 y 是两个变量,D 是一个非空实数集.如果对于数集 D 中的每一个数 x 按照一定的对应法则 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中,D 称为函数的定义域,x 称为自变量,y 称为函数(或因变量).

对于确定的 $x_0 \in D$,与之对应的 y_0 称为 $y=f(x)$在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0=f(x_0)\text{或}\ y_0=y|_{x=x_0}$$

当 x 取遍数集 D 中的所有数值时,对应的函数值全体构成的数集

$$M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为该函数的值域.

2. 函数的两要素

函数的对应法则和定义域称为函数的两要素.

(1)对应法则:是由自变量的取值确定因变量取值的规律.

"函数"表达了因变量与自变量的一种对应规则,这种对应规则用字母 f 来表示.因此 f 是一个函数符号,它表示当自变量取值为 x 时,因变量 y 的取值为 $f(x)$.

(2)定义域:自变量 x 的取值范围.

给定一个函数,就意味着其定义域是同时给定的,如果所讨论的函数来自某个实际问题,则定义域必须符合实际意义;如果不考虑所讨论的函数的实际背景,则其定义域应使得它在数学上有意义,为此要求:

①分母不能为零.

②偶次根号下非负.

③对数的真数大于零.

④正切符号下的式子不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

⑤余切符号下的式子不等于 $k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

⑥反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值小于等于 1.

如果两个函数的对应法则相同,定义域也相同,则这两个函数称为同一函数.

3. 函数的表示法

函数通常有三种不同的表示方法:公式法、表格法和图象法.

公式法:用数学式子表示函数,也称解析法,其优点是便于理论推导和计算.

表格法:用表格形式表示函数,优点是所求函数值容易查得.如三角函数表、对数表等.

图象法:用图形表示函数,优点是直观形象,可以看到函数的变化趋势.此方法在工程技术上应用较普遍.

有些函数在其定义域不同的范围内用不同的式子表示,这样的函数称为分段函数.

4. 反函数

设 $y=f(x)$的定义域为 D,其值域为 M.如果对于 M 中的每一个 y 值,通过 $y=f(x)$,D 中都有唯一确定的数 x 与之对应,这就以 M 为定义域确定了一个函数,这个函数称为函数 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 M,值域为 D.

由于人们习惯于用 x 表示自变量,而用 y 表示因变量,因此我们将函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$用 $y=f^{-1}(x)$表示.函数 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称.

二、函数的几种特性

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意 $x\in D$ 恒有

$f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;

$f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称,奇函数的图象关于原点对称.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,若对于区间 D 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增,区间 D 称为函数 $f(x)$ 的单调递增区间;如果当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减,区间 D 称为函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数,单调递增区间和单调递减区间统称为单调区间.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义,如果存在某一正数 M,使得对于任意的 $x\in D$,都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 D 内有界;如果找不到这样的正数 M,则称 $f(x)$ 在 D 内无界.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,如果存在不为零的常数 T,使得对于任意的 $x\in D$,有 $x+T\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,那么称 $f(x)$ 是周期函数,T 称为 $f(x)$ 的一个周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

三、基本初等函数

基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

(1)幂函数:$y=x^\alpha$(α 为任意实数).

(2)指数函数:$y=a^x(a>0,a\neq 1),x\in(-\infty,+\infty)$.

(3)对数函数:$y=\log_a x(a>0,a\neq 1),x\in(0,+\infty)$.

(4)三角函数:正弦函数 $y=\sin x,x\in(-\infty,+\infty)$.

余弦函数 $y=\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$.

正切函数 $y=\tan x,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

余切函数 $y=\cot x,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

正割函数 $y=\sec x,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

余割函数 $y=\csc x,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(5)反三角函数:反正弦函数 $y=\arcsin x,x\in[-1,1],y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数 $y=\arccos x,x\in[-1,1],y\in[0,\pi]$.

反正切函数 $y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty),y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x,x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,\pi)$.

以上函数统称为基本初等函数，它们的图象和性质参见附录4.

四、复合函数

设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在函数 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数，我们把 y 称为 x 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

1. 复合条件

$u=\varphi(x)$ 的值域的全体或部分包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域 D 中.

由函数 $y=\sqrt{u}$，$u=x+1$ 可以构成复合函数 $y=\sqrt{x+1}$. 为了使 u 的值域包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 内，必须有 $x\in[-1,+\infty)$，所以复合函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的定义域应为 $x\in[-1,+\infty)$. 又如由函数 $y=\ln u$，$u=x^2+1$ 可以构成复合函数 $y=\ln(x^2+1)$. 由函数 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 不能构成复合函数，因为 u 的值域为 $[2,+\infty)$ 不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内.

2. 拆分原则

拆分的每一个函数必须是五大基本初等函数之一或多项式. 为了研究函数的需要，今后经常需要将一个复合函数分解成若干个基本初等函数或多项式.

五、初等函数

由基本初等函数和常数 C 经过有限次四则运算和有限次复合所构成的，并且能用一个式子表示的函数称为初等函数；否则不是初等函数.

例如，$y=\sqrt{\ln 5x+2^x+\sin^2 x}$，$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x}+\tan x}{x^2\sin x+2^{-x}}$ 等都是初等函数. 今后研究的函数主要为初等函数.

结论 除了不能并成同一式子表示的分段函数外，其余函数均是初等函数.

1.1.3 技能训练

训练 1-1 $y=f(x)=x^2+3x-6$.

f 确定的对应法则为

$$f(\quad)=(\quad)^2+3(\quad)-6.$$

训练 1-2 设函数 $f(x)=x^3-2x+3$，求 $f(1)$，$f(t^2)$，$f(-x)$，$f(x_0+\Delta x)$.

解 因为 $f(x)$ 对应的法则为：$f(\quad)=(\quad)^3-2(\quad)+3$，所以

$$f(1)=1^3-2\times1+3=2,$$
$$f(t^2)=(t^2)^3-2(t^2)+3=t^6-2t^2+3,$$
$$f(-x)=(-x)^3-2(-x)+3=-x^3+2x+3,$$
$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^3-2(x_0+\Delta x)+3.$$

训练 1-3 求函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域.

解 对于 $f(x)$，当 $\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant0\\x-2>0\end{cases}$ 时，$f(x)$ 有意义，即 $2<x\leqslant3$，所以函数的定义域为 $(2,3]$.

训练 1-4 下列各题中，$f(x)$与 $g(x)$是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$.

(2) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$.

解 (1) $f(x)$与 $g(x)$是同一函数. 因为尽管二者的形式不一样，但定义域和对应法则相同.

(2) $f(x)$与 $g(x)$不是同一函数. 因为 $f(x)$定义域为 $x\neq 0$，而 $g(x)$定义域是 $x>0$.

训练 1-5 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 是一个分段函数，它在$(-\infty,0)$及$[0,+\infty)$内的表达式不相同，图形也不相同，如图 1-2 所示.

训练 1-6 单位阶跃函数是电学中的一个常用函数，如图 1-3 所示，它是一个分段函数，其表达式为 $u(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geqslant 0 \end{cases}$.

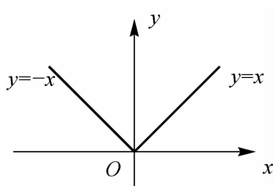

图 1-2

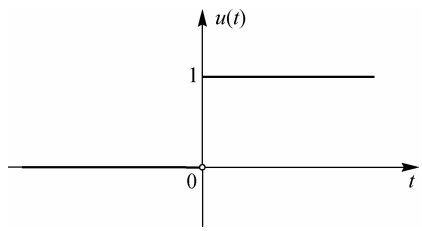

图 1-3

1.1.4 强化训练

训练 1-7 十届全国人大常委会第三十一次会议表决通过了关于修改个人所得税法的决定. 个人所得税起征点自 2008 年 3 月 1 日起由 1 600 元提高到 2 000 元. 个人所得税税率见表 1-2.

表 1-2

级数	含税级距(即(应发工资－四金或三金)－2 000)	税率(%)	速算扣除数
1	不超过 500 元的部分	5	0
2	超过 500 元至 2 000 元的部分	10	25
3	超过 2 000 元至 5 000 元的部分	15	125
4	超过 5 000 元至 20 000 元的部分	20	375

个人所得税计算公式：应缴纳的个税＝[(应发工资－四金或三金)－2 000]×税率－速算扣除数.(注：四金或三金为应交纳的保险金和住房公积金)

(1)试分析月收入与所得税之间的函数关系(不考虑四金或三金).

(2)老王月收入为 5 600 元，他每月应交多少税？

解 (1)设某人月收入为 x 元，应交所得税为 y 元，则

①当 $0\leqslant x\leqslant 2\,000$ 时，$y=0$.

②当 $2\,000<x\leqslant 2\,500$ 时，$y=(x-2\,000)\times 5\%$.

③当 $2\ 500<x\leqslant 4\ 000$ 时，$y=(x-2\ 000)\times 10\%-25$.

④当 $4\ 000<x\leqslant 7\ 000$ 时，$y=(x-2\ 000)\times 15\%-125$.

⑤当 $7\ 000<x\leqslant 22\ 000$ 时，$y=(x-2\ 000)\times 20\%-375$.

因此，所求的函数表示式为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2\ 000\\ 0.05(x-2\ 000), & 2\ 000<x\leqslant 2\ 500\\ 0.1(x-2\ 000)-25, & 2\ 500<x\leqslant 4\ 000\\ 0.15(x-2\ 000)-125, & 4\ 000<x\leqslant 7\ 000\\ 0.2(x-2\ 000)-375, & 7\ 000<x\leqslant 22\ 000\end{cases}.$$

(2)因为 $4\ 000<5\ 600\leqslant 7\ 000$，所以老王每月应交纳的个人所得税为

$$y\big|_{x=5\ 600}=0.15\times(5\ 600-2\ 000)-125=415\text{ 元}.$$

训练 1-8 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=e^{\sqrt{x}}$.　　(2) $y=(2x+3)^2$.

(3) $y=2\sin\sqrt{1-x^2}$.　　(4) $y=\ln(\arcsin 2x)$.

(5) $y=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}$.

解 采用"由外往里，逐层分解"的方法，可得：

(1) $y=e^{\sqrt{x}}$ 由 $y=e^u$，$u=\sqrt{x}$ 复合而成.

(2) $y=(2x+3)^2$ 由 $y=u^2$，$u=2x+3$ 复合而成.

(3) $y=2\sin\sqrt{1-x^2}$ 由 $y=2\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$ 复合而成.

(4) $y=\ln(\arcsin 2x)$ 由 $y=\ln u$，$u=\arcsin v$，$v=2x$ 复合而成.

(5) $y=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}$ 由 $y=\dfrac{1}{u}$，$u=\ln v$，$v=\ln x$ 复合而成.

训练 1-9(电费问题) 某院教职工住宅区收取电费规定如下：月使用电不超过 300 度时，按生活照明用电价格收费 0.52 元/度，月使用电超过 300 度时，超过部分按工业生产用电价格收费 0.75 元/度. (1)求住户电费与电量之间的函数关系，并指出定义域；(2)住户三、四、五月份用电量分别为 250 度、300 度、420 度，求当月该用户的电费.

解 设电量为 x 度，电费为 y 元，则依题意有：

(1) $y=\begin{cases}0.52x, & x\leqslant 300\\ 300\times 0.52+(x-300)\times 0.75, & x>300\end{cases}$.

(2)当 $x=250$ 度时，$y=0.52\times 250=130$ 元.

当 $x=300$ 度时，$y=0.52\times 300=156$ 元.

当 $x=420$ 度时，$y=0.52\times 300+120\times 0.75=246$ 元.

1.1.5 完成任务

工作任务(焊接火花的控制问题)：如图 1-4 所示，一焊接工人在垂直于地面的一根柱子 OA 的顶端位置处进行焊接，$OA=1.25$ m，由柱子顶端 A 处的喷头向外喷火花，为确保下面人员的安全，设计要求喷溅的火花在离 OA 距离为 1 m 处达到距地面最大高度，最大高度是 2.25 m. 为了让喷出的火花全部落在一个有效范围内，那么这一有效范围的半径至少要

多少米，才能达到设计要求？

1. 数学建模

问题假设

(1)火花在各个方向沿形状相同的抛物线落下，故可设通过火花为二次函数.

(2)火花只要落到有效范围内，可视为安全.

(3)有效范围的半径为 x m.

问题分析

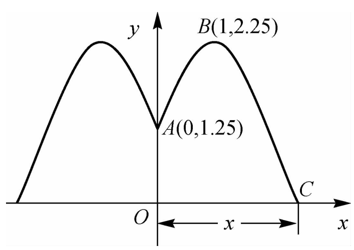

图 1-4

建立适当的直角坐标系，如图 1-4 所示，记抛物线的顶点为 B，火花下落接触地面点为 C 点，那么本题中要求有效范围的最小半径就是求 OC 长，即 C 点的横坐标. 根据问题的条件建立的坐标系，可以确定 A、B 点的坐标分别为 $A(0,1.25)$、$B(1,2.25)$. 这样问题就转化为“已知抛物线顶点 B 和另外一点 A 坐标，求抛物线的解析式”.

建立模型

设 C 点的坐标为$(x,0)$，抛物线的解析式为 $y=a(x-1)^2+2.25$，将 A 点坐标代入，得$a=-1$. 所以抛物线解析式为

$$y=-(x-1)^2+2.25 \text{ 或 } y=-x^2+2x+1.25.$$

模型求解

为求 C 点的坐标，令 $y=0$，解一元二次方程得 $x_1=2.5$ 或 $x_2=-0.5$(不合题意). 这就是说，有效范围的半径至少要 2.5 m.

2. 数学实验

在 Matlab 软件中输入：

```
>>solve('(-1)*x^2+2*x+1.25=0',x)%解方程
ans=
-.50000000000000000000000000000000
2.5000000000000000000000000000000
```

1.1.6 拓展任务

A(基础题)

1. 下列各题中所给的函数是否相同？为什么？

(1)$y=\dfrac{x}{x}$ 与 $y=1$.　　(2)$y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$.

(3)$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.　　(4)$y=\ln\sqrt{x}$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\ln x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{4-x^2}$.　　(2)$y=\ln(2-x)+\sqrt{x+1}$.

(3)$y=\arcsin(x-1)$.　　(4)$y=\lg(\lg x)$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x-\sin x$.　　(2) $f(x)=x^2+\cos x$.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=(2x-3)^5$.　　(2) $y=\mathrm{e}^{-\sin x}$.

(3) $y=\sin 5x$.　　(4) $y=\cos^2 x$.

(5) $y=\sqrt{x^2-1}$.　　(6) $y=\arctan(x^2+1)$.

B(提高题)

1. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.　　(2) $y=\ln\tan\dfrac{1}{x}$.

(3) $y=\sqrt{\cos 3x}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\leqslant x<1 \\ 0, & x=1 \\ 1-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{5}{4}\right)$.

3. 火车站收取行李费规定如下：当行李不超过 50 kg 时，按基本运费计算，每千克收费 0.15 元；当超过 50 kg 时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 求：

(1) 运费与行李质量之间的函数关系，并指出定义域.

(2) 作出函数的图象.

(3) 当行李质量分别是 30 kg、50 kg、75 kg 时，相应的运费分别是多少？

4. 某种周期齿形波的图形如图 1-5 所示，试建立一周期 $[-1,1]$ 内函数的表达式.

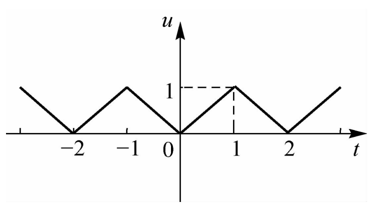

图 1-5

5. 某工厂有一水池，其容积为 100 m^3，原有水为 10 m^3，现在每 10 分钟注入 0.5 m^3 的水. 试将水池中水的体积 v 表示为时间 t 的函数，且问需用多少分钟水池才能灌满？

6. 试解释现实社会中同牌子商品大包装商品比小包装商品便宜的现象.

(1) 到商店去调查某产品的价格，列表用比例的方法说明上述现象.

(2) 分析商品价格的构成.

(3) 分析商品价格 P 与商品质量 W 的关系.

(4) 由以上关系说明这是个什么样的函数？进一步说明函数类型的区分.

(5) 写出单位重量价格 C 与质量 W 的关系，说明 W 越大 C 越小.

工作任务 1.2　阶跃响应状态的确定

工作任务（阶跃响应状态）：已知某一生产单位的电力系统的传递函数为 $G(s)=$

$\dfrac{2.72s+5.44}{s^3+3s^2+4.72s+5.44}$，系统的输出响应曲线（阶跃响应曲线）如图 1-6 所示，从图象中你能发现什么规律？

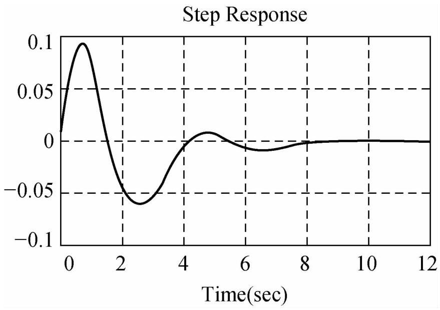

图 1-6

能力目标 会将极限思想与专业问题（或实际问题）相结合，解决专业（或实际）问题；能求函数极限.

知识目标 理解函数极限的相关概念，掌握求极限的基本方法.

极限的概念是微积分学最基本的概念. 微积分的基本概念都用极限概念来表达，极限方法是微积分的最基本的方法，微分法与积分法都借助于极限方法来描述，所以掌握极限的概念与会进行极限运算是非常重要的.

1.2.1 工作案例

案例 1-4（截杖问题） "一尺之锤，日取其半，万世不竭". 这是战国时期庄周所著的《庄子・天下篇》引用过一句话，意思是一根长为一尺的棒头，每天截去一半，这样的过程可以无限地进行下去.

实际上，每天截后余下的棒的长度是（单位为尺）：

第 1 天余下$\dfrac{1}{2}$，

第 2 天余下$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^2}$，

第 3 天余下$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{2^3}$，

⋮

第 n 天余下$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^n}$

⋮

得到一个数列：$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$

想一想：随着时间的推移，余下的长度越来越短，余下的棒的长度$\dfrac{1}{2^n}$逐渐接近于多少？

案例 1-5（割圆求周） 公元三世纪，我国数学家刘徽在《九章算术》中解释他的"割圆术"

的时候说:"割之弥细,所失弥少;割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣".这就是说,为了求得单位圆的面积即圆周率 π,古人用圆内接正 n 边形的面积 A_n($n\geqslant 3$)去逼近它,以 A_n 作为 π 的近似值.随着 n 的增大,人们不断地改进 π 的近似值的精确程度,在这不断改进的过程中,逐渐产生了极限的概念.

案例 1-6(工时问题) 生产同一产品,熟练工所需的工时数比新手要少,因为当你不断重复地做同一工作时,你的操作方法会不断得到改善,操作时间也在不断地减少,随着时间推移你的单位工作时间如何变化?

数学描述:设 t 表示总工作时间,y 表示生产一个产品所需要的时间,问 $t\to+\infty$ 时,y 会如何变化?

案例 1-7(水温现象) 将一盆 80 ℃的热水放在同一室温恒为 20 ℃的房间里,随着时间的推移,水温如何变化?

数学描述:设 t 表示时间,y 表示水温,问 $t\to+\infty$ 时,y 会如何变化?

案例 1-8(单摆现象) 将单摆离开垂直位置的偏度用角度来度量,让单摆自己摆动,考虑机械摩擦力和空气阻力,在这个过程中角的变化趋势如何?

数学描述:设 t 表示单摆摆动的时间,y 表示单摆离开垂直位置的角度,问 $t\to+\infty$ 时,y 会如何变化?

案例 1-9(资金利率计算) 国家向企业投资 1 000 亿元,按连续复利率 6%计算利息,规定 20 年后一次收回投资基金,问到期时企业应向国家缴回投资基金多少?

1.2.2 知识链接

一、极限概念

1. 数列极限

对于数列$\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,数列 x_n 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为数列$\{x_n\}$的极限.记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A(\text{或当 } n\to\infty \text{ 时},x_n\to A).$$

此时,也称数列$\{x_n\}$收敛于 A.

2. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

"$x\to\infty$"表示 x 的绝对值$|x|$无限增大,x 既可取正值也可取负值.若 x 取正值且无限增大,记作 $x\to+\infty$;若 x 取负值且其绝对值$|x|$无限增大,记作 $x\to-\infty$.

(1)如果当 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 x 趋于无穷大时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\ (\text{或当 } x\to\infty \text{ 时},f(x)\to A).$$

由定义可知,当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$的极限是 0,即$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

有时只需研究 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数的变化趋势.

(2)如果当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\ (\text{或当 } x\to+\infty \text{ 时},f(x)\to A).$$

如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A\ (\text{或当 } x\to-\infty \text{ 时}, f(x)\to A).$$

(3)极限存在的条件.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

3. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

“$x\to x_0$”表示 x 无限接近于 x_0，但不等于 x_0.

(1)如果当 x 无限接近于定值 x_0（$f(x)$ 在 x_0 可以没有定义）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 x_0 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A(\text{或当 } x\to x_0 \text{ 时}, f(x)\to A).$$

我们讨论当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，其中 x 以任意方式趋近于 x_0，但有时只需或只能讨论 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0（记为 $x\to x_0^-$），或从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0（记为 $x\to x_0^+$）时函数的变化趋势.

(2)如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$.

如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

(3)极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

4. 极限不存在的形式

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

(2)摆动函数，如 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

二、无穷小与无穷大

1. 无穷小

如果在自变量的某个变化过程中，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为该变化过程中的无穷小量，简称无穷小.

(1)说明：绝对值很小的常数，不是无穷小，常数中只有零是无穷小.

说一个函数是无穷小，必须指明自变量的变化趋势.

(2)无穷小的性质：

性质 1　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2　有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 3　有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

由性质 3 可得下面推论：

推论 常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

2. 无穷大

如果在自变量的某个变化过程中,函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,那么称函数 $f(x)$ 是该变化过程中的无穷大量,简称无穷大.

说明:

无穷大不是一个很大的数,它是一个绝对值无限增大的变量.

说一个函数是无穷大,必须指明自变量的变化趋势.

按极限的定义,无穷大的函数的极限是不存在的,但为了讨论问题方便,我们也说"函数的极限是无穷大".当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,$f(x)$ 为无穷大,记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$(或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

3. 无穷大与无穷小的关系

当 $x \to 0$ 时,x^2 是无穷小,$\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷大,这说明无穷小与无穷大存在着倒数关系.

定理 1(无穷大与无穷小的关系) 在自变量的同一变化过程中,无穷大的倒数是无穷小,恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

三、极限的计算方法

1. 极限的四则运算法则

利用极限的定义只能计算一些很简单的函数的极限,而实际问题中的函数却要复杂得多.下面介绍的极限的四则运算法则,为计算变量的极限提供了很大的方便.

定理 2 设 x 在同一变化过程中 $\lim f(x) = A$,$\lim g(x) = B$,则

(1)$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

(2)$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$.

(3)$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B} \ (B \neq 0)$.

注:上面的极限中省略了自变量的变化趋势,下同.

由上面的定理 2 可得下面两个推论:

推论 1 $\lim[Cf(x)] = C\lim f(x) = CA$($C$ 为常数).

推论 2 $\lim[f(x)]^m = [\lim f(x)]^m = A^m$($m$ 为正整数).

2. 两个重要极限

1)极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

特征:(1)这是个"$\dfrac{0}{0}$"型极限.

(2)含有三角函数.

(3)其一般形式可以形象地写成 $\lim\limits_{\square \to 0} \dfrac{\sin \square}{\square} = 1$(方框□代表同一变量).

2)极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

特征:(1)这是个"1^∞"型幂指数函数的极限.

(2)它可形象地表示为$\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$(方框□代表同一变量).

(3)令$\frac{1}{x}=u$,则$x=\frac{1}{u}$,且当$x\to\infty$时,$u\to0$,于是得到这个极限的另一形式$\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$.

特别:1^{∞}型极限$\xlongequal{\text{作恒等变形}}\lim(1+\alpha)^{\beta}=\mathrm{e}^{\lim\alpha\cdot\beta}$(其中$\alpha$、$\beta$分别表示在自变量的某一变化过程中的无穷小量和无穷大量).

1.2.3 技能训练

训练 1-10 下列数列当$n\to\infty$时的极限是否存在?若存在,写出其极限.

(1)$x_n=\frac{1}{n}$. (2)$x_n=(-1)^n n$. (3)$x_n=C$(C为常数).

解 观察数列当$n\to\infty$时的变化趋势,可得

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n$不存在.

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$.

训练 1-11 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$、$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$及$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

训练 1-12 考察函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$当$x\to1$时的变化趋势.

解 函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$无定义,参见表1-3可知,当x无限接近于1时,函数无限接近于2.

表 1-3

x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	$\to1\leftarrow$	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
$f(x)$	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	$\to2\leftarrow$	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5

由定义可知,$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

训练 1-13 在一个电路中的电荷量Q由下式定义:

$$Q=\begin{cases}E, & t\leqslant0\\ E\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}, & t>0\end{cases}$$

其中C,R为正常数,求电荷Q在$t\to0$时的极限.

解 $\lim\limits_{t\to0^-}Q=\lim\limits_{t\to0^-}E=E$,$\lim\limits_{t\to0^+}Q=\lim\limits_{t\to0^+}E\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=E$,所以$\lim\limits_{t\to o}Q=E$.

训练 1-14 求$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0} x=0$，即 x 是当 $x\to 0$ 时的无穷小；又因为$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\dfrac{1}{x}$是有界函数. 由性质 3 得

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

注：极限$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$不能利用极限的乘法法则计算.

训练 1-15 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x-5}{x^2+4x-3}$.

解 先求$\dfrac{3x^3-2x-5}{x^2+4x-3}$的倒数当 $x\to\infty$时的极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-3}{3x^3-2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{3-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}}=\frac{0}{3}=0.$$

根据无穷大与无穷小的关系得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x-5}{x^2+4x-3}=\infty$.

训练 1-16 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^2-3}$.

解 因为分母的极限不等于零，所以由法则 3，有

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x^2-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)}=\frac{2\lim\limits_{x\to 2}x+1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-3}=\frac{5}{1}=5.$$

1.2.4 强化训练

训练 1-17 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$.

解 当 $x\to 2$ 时，分母的极限为 0，不能直接应用法则 3. 但分母、分子有以 0 为极限的公因子$(x-2)$. 这时可先进行因式分解，约去公因子，再应用法则 3 求其极限.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{3}.$$

训练 1-18 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{4x^2+4x-3}$.　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-3x^2}{1+x^2+4x^3}$.

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2+4x-5}$.

解 (1)当 $x\to\infty$时，分母与分子都是无限增大，极限不存在，不能直接应用法则 3. 可先将分母与分子同除以 x 的最高次幂 x^2，再应用法则 3 求其极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{4x^2+4x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=\frac{3}{4}.$$

(2)用与(1)同样的方法，得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-3x^2}{1+x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+4}=\dfrac{0}{4}=0.$

(3)先求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{2x^3+3x^2+1}$，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-5}{2x^3+3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}}{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=0,$$

由无穷小与无穷大的关系知，原极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2+4x-5}=\infty$.

训练 1-19 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

分析：当 $x\to 1$ 时，上式的两项均为无穷大，所以不能用差的极限运算法则，但是可以先通过通分，再求极限.

解 $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{(1+x+x^2)}=-1.$$

训练 1-20 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2.$$

训练 1-21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

训练 1-22 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}.$$

训练 1-23 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{3}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}.$$

训练 1-24 求$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{2x})^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{2x})^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{(-2x)}\right]^{-2x}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

训练 1-25 计算$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left[1+(-x)\right]^{\frac{1}{-x}}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

训练 1-26(水温变化问题) 将一盆 80 ℃的热水放在同一室温恒为 20 ℃的房间里，随

着时间的推移,水温如何变化?

解 设 t 表示时间,y 表示水温,问 $t\to+\infty$时,y 会如何变化?

$$\lim_{t\to\infty} y=20$$

结论:将一盆 80 ℃的热水放在同一室温恒为 20 ℃的房间里,随着时间的推移,水温会达到 20 ℃.

1.2.5 完成任务

1. 工作任务(阶跃响应状态)

已知某一生产单位的电力系统的传递函数如下 $G(s)=\dfrac{2.72s+5.44}{s^3+3s^2+4.72s+5.44}$,系统的输出响应曲线图象(阶跃响应曲线)见图 1-6,试确定此函数的变化规律.

1)数学建模

模型假设

此题条件很充分,无须再做假设.

模型建立

根据题意,建立的目标函数为 $G(s)=\dfrac{2.72s+5.44}{s^3+3s^2+4.72s+5.44}$.

模型求解

对上述目标函数求极限,得

$$\lim_{s\to\infty}\frac{2.72s+5.44}{s^3+3s^2+4.72s+5.44}=\lim_{s\to\infty}\frac{\dfrac{2.72}{s^2}+\dfrac{5.44}{s^3}}{1+\dfrac{3}{s}+\dfrac{4.72}{s^2}+\dfrac{5.44}{s^3}}=\frac{0+0}{1+0+0+0}=0.$$

模型分析

从图象上可以看出,时间在 0~6 s 时,曲线做简谐振动,振幅由大逐渐变小,当时间大于 6 s 后,振幅随时间的增大而减小,逐渐逼近于 0.

2)数学实验

```
>> syms G s              %定义符号变量
>> G=(2.72*s+5.44)/(s^3+3*s^2+4.72*s+5.44);
>> limit(G,s,inf)                  %求极限
ans =
0
```

在 Matlab 软件中输入如下命令:

```
>> num=[2.72 5.44]
>> den=[1 3 4.72 5.44]
>> sys=tf(num,den)
Transfer function:
2.72 s+5.44
------------------------------
s^3+3 s^2+4.72 s+5.44
```

>> step(sys)　　　　　%求传递函数的阶跃响应曲线

利用软件,可作出如图 1-7 所示的图象.

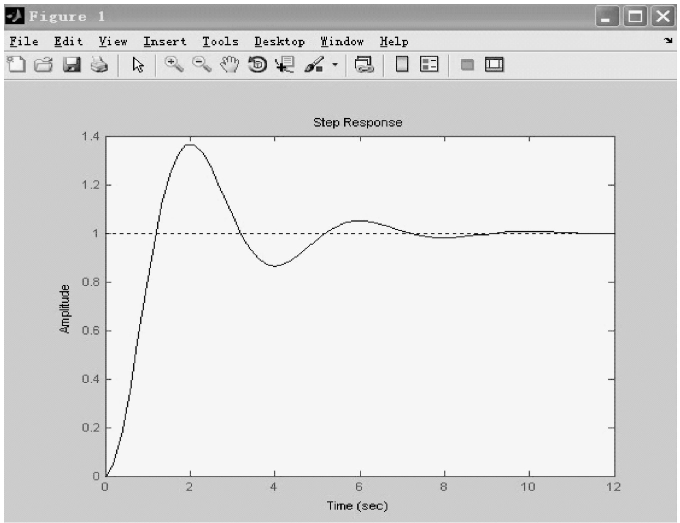

图 1-7

2. 案例

国家向企业投资 1 000 亿元,按连续复利率 6%计算利息,规定 20 年后一次收回投资基金,问到期时企业应向国家缴回投资基金多少?

1)数学建模

问题假设

(1)企业向银行贷款要付利息,利息是按规定的利率和期限付息.

(2)假设在规定的时间内利息不变.

模型建立

假设本金为 P,年利率为 r,贷款期限为 x 年,则计息可按单利和复利两种方式计算,其公式如下:

按单利的本利和:$S=P(1+xr)$

按复利的本利和:$S=P(1+r)^x$

现在我们如果将一年均分为 t 次计算复利,则向银行贷款 x 年后,应还的本利和为

$$S=P\left(1+\frac{r}{t}\right)^{tx}$$

因为 $\lim\limits_{t\to\infty}P\left(1+\frac{r}{t}\right)^{tx}=P\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{r}{t}\right)^{tx}=Pe^{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{r}{t}\cdot tx}=Pe^{rx}$,所以,本金为 P,按名义年利率 r 不断计算复利,则 x 年后的本利和为

$$S=Pe^{rx}\text{(即连续复利计算公式)}$$

模型求解

因为:$P=1\ 000$(亿元),$r=0.06$,$x=20$,所以,20 年后企业应向国家缴回的投资基金为

$$S=1\ 000\times e^{20\times 0.06}\approx 3\ 320.12(\text{亿元})$$

2)数学实验

```
>>syms S P r t x
>>S=P*(1+r/t)^(t*x)
S=P*(1+r/t)^(t*x)
>>limit(S,t,inf)
ans=
exp(r*x)*P
>>exp(0.06*20)*1000
ans=
  3.3201e+003
```

1.2.6 拓展任务

A(基础题)

1.分析函数的变化趋势,求极限.

(1)$f(x)=\dfrac{1}{x^2}(x\to-\infty)$.

(2)$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}(x\to+\infty)$.

(3)$f(x)=\ln(x+2)(x\to+\infty)$.

(4)$f(x)=\dfrac{1}{2^x}(x\to+\infty)$.

2.指出下列变量中,哪些是无穷小?哪些是无穷大?

(1)$\ln x$,当 $x\to1$ 时.

(2)e^x,当 $x\to+\infty$时.

(3)$\ln|x|$,当 $x\to0$ 时.

(4)$1-\cos x$,当 $x\to0$ 时.

3.计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to1}(2x^2-3x+4)$.

(2)$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^4-4}{x^2-2}$.

(3)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3}{2x^2+1}$.

(4)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+2x-3}{7x^2-5x-1}$.

(6)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

(7)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{x}$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$.

B(提高题)

1. 试从图象上说明：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$不存在.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sin(x-1)}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{3x}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{2\cot x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x}$.

3. 利用无穷小量的性质计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\sin x}{x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x^2}$.

4. 某集团公司计划今年筹设永久性“振兴杯”教育奖，从明年开始准备每年发奖一次，奖金总额为 A 万元，奖金来源为基金的存款利息. 设银行规定年利率为 r，每年结算一次，试问基金的最低金额 P 应为多少？

5. 一男孩和一女孩分别在离家 2 km 和 1 km 且方向相反的两所学校上学，每天放学后分别以 4 km/h 和 2 km/h 的速度步行回家. 一小狗以 6 km/h 的速度由男孩处奔向女孩，又从女孩处奔向男孩，如此往返直到回到家中. 问小狗奔波了多少路程？如果男孩和女孩上学时小狗也往返奔波在它们之间，问当他们到达学校时小狗在何处？

自测题 1

1. 判断题.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-3$，则 $f(1)=-3$. (　　)

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 无定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必不存在. (　　)

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$. ( )

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$. ( )

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$. ( )

2. 填空题.

(1)设函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$,则 $f[g(x)]=$________.

(2)函数 $y=\sqrt{2x+1}+\ln(1-\dfrac{1}{3}x)$的定义域是________________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=$________.

(4)设 $f(x)=e^x-1$,则 $f(x)$当 $x\to$________时是无穷大,当 $x\to$________时是无穷小.

(5)函数 $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$的复合过程为________________.

3. 选择题.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的( ).

A. 充分条件 B. 必要条件

C. 充分必要条件 D. 无关条件

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=$( ).

A. 0 B. 1

C. 2 D. -1

(3)若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则当 $x\to\infty$时,$f(x)-A$ 是( ).

A. A B. 不存在

C. 无穷小 D. 无穷大

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x=$( ).

A. 1 B. e^{-2}

C. e^2 D. e

4. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f(-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(x+\Delta x)$.

5. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{\tan x}$.

(2) $y=\ln\ln x$.

(3) $y=(3x^2-2x+1)^4$.

(4) $y=e^{\cos 2x}$.

(5) $y=\sqrt{\sin(4x-2)}$.

(6) $y=\tan^2\dfrac{x}{2}$.

6.求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)(2x+1)(3x+1)}{x^3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

7.连续复利的年利率为0.6%,已知6年后到期的本利和(又称终值)为100万元,问本金(又称现值)是多少?

8.(人口模型)设1982年底我国人口为10.3亿,如果不实行计划生育,按照年均2%的自然增长率计算,t 年后的人口为 p,试列出 p 与 t 时间之间的函数关系式.

9.试构建本校办公大楼上一季度的电费收入模型.