（第2版）

大学应用数学

DAXUE YINGYONGSHUXUE

策划编辑：金颖杰
责任编辑：高　宇
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5635-6622-8

9 787563 566228 >

定价：55.00元

大学应用数学（第2版）

主编　刘明忠　叶　俊　黄长琴

北京邮电大学出版社

“十四五”职业教育国家规划教材

（第2版）

大学应用数学

主编　刘明忠　叶　俊　黄长琴

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书共分3篇17章，上篇是基础数学，包括极限与连续、导数与微分、积分及其应用、多元函数的微积分、无穷级数等5章；中篇是应用数学，包括线性代数初步、线性规划初步、概率初步、数理统计初步等4章；下篇是数学软件，系统介绍了Mathematica软件的具体应用，每章列举了大量与前两篇各章密切联系的实际案例，并配备适量的练习。本书在第1版的基础上更新了部分例题及练习题，并增加了课程思政的相关元素。

本书可作为高等职业院校的教材，也可供相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学应用数学 / 刘明忠，叶俊，黄长琴主编. -- 2版. -- 北京：北京邮电大学出版社，2022.4(2023.7重印)

ISBN 978-7-5635-6622-8

Ⅰ.①大… Ⅱ.①刘… ②叶… ③黄… Ⅲ.①应用数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第055412号

策划编辑：金颖杰　　**责任编辑**：高　宇　　**封面设计**：刘文东

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：21 插页 1
字　　数：450千字
版　　次：2022年4月第2版
印　　次：2023年7月第2次印刷

ISBN 978-7-5635-6622-8　　　　定　价：55.00元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

服务电话：400-615-1233

第 2 版前言

本书依据党的二十大报告、教育部印发的《高等学校课程思政建设指导纲要》《职业院校教材管理办法》和《教育部关于职业院校专业人才培养方案制订与实施工作的指导意见》(教职成〔2019〕13 号)等文件,结合高职高专院校人才培养目标、职业教育教学规律及数学学科教学特点编写而成.

为贯彻落实党的二十大精神,全面贯彻党的教育方针,落实立德树人根本任务,培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人,我们在第 1 版的基础上秉承"以育人为根本,以专业为导向"的编写理念,总结相关课程思政和各编者在数学教学改革与实践中的经验,并结合各用书单位师生反馈的教材使用情况,对第 1 版教材做了如下修订.

(1)保持第 1 版教材的主体框架、章节内容不变,对教材疏漏之处进行修正,对个别章节进行重新编写.

(2)重新编写范例,融入思政元素.

(3)在前两篇每章增设"思政阅读园地"栏目,提供思政阅读材料.

本书具有如下特色与创新.

1. 融合课程思政

本书落实课程思政要求,通过数学范例及思政阅读材料挖掘数学课程的思政元素,提炼课程中蕴含的"四个自信"、社会主义核心价值观、人文精神、工匠精神、社会责任、开拓创新、绿色发展、健康中国、全民国防教育等价值范式,以期帮助学生提升思想政治素养.如书中介绍"分段函数"时,通过"2022 年最新个税计算(含个税专项扣除、专项附加扣除等)"范例,融入依法纳税的社会责任,同时说明专项附加扣除既反映出尊重人民的权益和国家治理水平的提高,又体现坚持以人民为中心的发展思想,让现代化建设成果更多更公平惠及全体人民,从而增加我们的制度自信.又如,介绍微分方程应用时,通过传染病的流行问题范例,对比分析得到"采取科学防控措施能有效控制传染病的流行"的结论,进而证明我国政府采取的抗击新冠肺炎疫情的防疫政策是科学的、正确的,让我们对中国的制度优势感到无比的自豪.又如,第 5 章的思政阅读园地介绍了华罗庚的人生故事,以激发学生强烈的爱国主义精神,同时激发学生"自信自强、守正创新,踔厉奋发、勇毅前行,为全面建设社会主义现代化国家、全面推进中华民族伟大复兴而团结奋斗".

2. 有效体现现代职业教育的特点,职业院校学生的认知水平

本书以专业为导向,以应用为目的,以"掌握概念,强化应用,培养技能"为重点,以必需、够用为度,注重与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练.在保证科学性的基础上,本书注重讲清概念,减少论证,避免过于复杂的计算和变换,符合学生的学习认知心理,方便学生学习、理解和应用.

3. 强化专业应用

本书结合专业应用介绍基本概念，结合专业案例介绍基本运算，将高等数学与工程数学、经济数学融为一体，兼顾各专业对数学知识的需求. 案例覆盖各专业，充分满足后续专业课程的学习需要，提高数学课程的实用性.

4. 数学建模思想贯穿全书

本书突出数学知识与实际问题的联系，以实例引入概念，并最终回归应用，加强培养学生利用数学建模解决实际问题的意识、能力，提升学生的创新意识和团队协作精神.

5. 搭建“互联网+”教学平台

本书配有完善的线上和线下教学资源，包括课程标准、电子课件、数字教材、微课视频二维码等，既能满足教学要求，又能满足课后学生的自我探索，实现教师教学有保障、学生自学有支撑. 创设融合职前与职后、课堂与课外、线上与线下、全面贯通的育人环境.

本书由武汉交通职业学院刘明忠设计整体框架和编写思路，刘明忠、叶俊、黄长琴任主编，胡刚、粟勤农、王雪、周陈焱、李红参与了编写.

在编写过程中，编者参考了众多院校教师编写的教材，查阅了大量网站、自媒体的相关资料，听取和吸收了相关学科专家的宝贵建议，在此一并表示诚挚的感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在不足和疏漏之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

第1版前言

本教材是依据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,同时结合高职高专院校在培养技术应用型人才方面的教学特点编写而成的.

目前,我国高职院校数学课程普遍存在着教学内容多、教学时数少、学生厌烦学习、专业教师抱怨教学内容难以满足专业课程学习需要的问题,为了解决这一难题,我们在充分调研的基础上,提出以专业为导向,重新构建"高等数学"课程的内容,使之更加符合高职高专学生的接受能力,更能满足后续专业课程学习的需要.

在编写过程中,我们综合吸收了大量优质教材的特点,密切结合当前高职高专教学改革的实际,在保证科学性的基础上,注重讲清概念,减少论证,力求简洁、通俗,符合学生的学习心理,方便学生对高等数学的学习、理解和应用.

本教材具有如下一些特点.

(1)定位准确,针对性强.本教材以专业为导向,以"掌握概念,强化应用,培养技能"为重点,根据以应用为目的,以必须、够用为度的原则编写而成.

(2)深入浅出,通俗易懂.本书注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练,避免过分复杂的计算和变换.

(3)与专业密切联系,将高等数学与工程数学、经济数学融为一体,兼顾各专业对数学知识的需求,案例覆盖各专业,充分满足后续专业课程的学习需要,从而提高数学课程的实用性.

(4)数学建模思想贯穿全书.本书突出强调数学知识与实际问题的联系,以实例引入概念,并最终回到数学应用,加强学生对数学的应用意识、兴趣及能力的培养.

(5)增加数学软件的详细介绍,强化高职学生应用数学工具解决实际问题的能力.

本书由刘明忠、叶俊、黄长琴任主编,胡刚、粟勤农、王雪、周陈焱、李红参与了编写.

在编写过程中,我们参考了国内外众多院校教师编写的教材和书籍,在此表示感谢,同时对积极支持本教材编写和出版的领导表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免存在不足和疏漏之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

目　　录

上篇　基础数学

中篇　应用数学

下篇　数学软件

上篇　基础数学

第 1 章　极限与连续

微积分是高等数学的重要内容之一，它的研究对象是函数，而微积分的基本理论是极限. 极限方法的萌芽起源于公元 5 世纪，到 17 世纪中后期，牛顿-莱布尼茨对微积分的创立，经历了漫长的理论探索与问题实践. 极限理论是高等数学的基石，是微积分的基础. 极限方法是微积分最基本的方法. 因此，掌握极限概念与极限运算是学好高等数学的第一步.

本章主要介绍函数与极限概念、常用的求极限方法、极限的简单应用及函数的连续性.

§1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

定义 1-1　设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，对于任意的 $x\in D$，通过对应关系 f，变量 y 都有确定的值与它相对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**. 记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为函数的**定义域**，f 为**函数关系**，y 的取值范围为函数的**值域**，记为 M.

必须注意的是：定义域和函数关系是函数的两个要素，当函数的两个要素相同时，即为同一个函数.

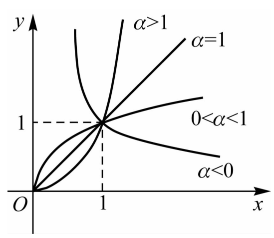
1.1.2　函数关系

函数关系的表示上又分为图像法、表格法和解析式法. 下面先介绍解析式函数关系的几种常见类型.

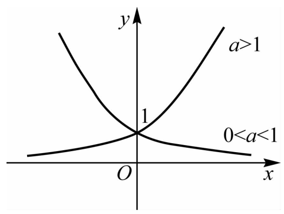
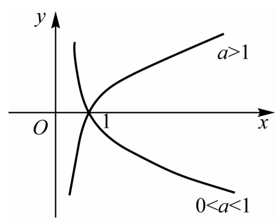
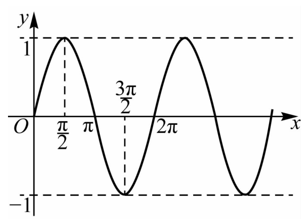
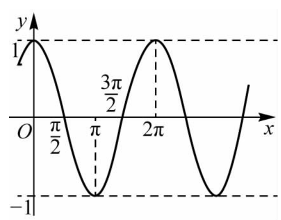
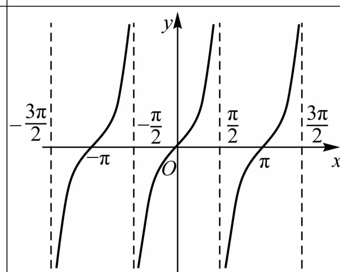
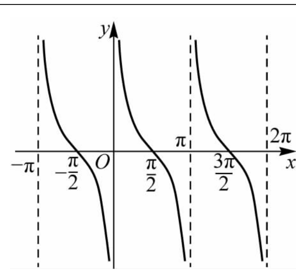
1. 基本初等函数

基本初等函数的相关内容见表 1-1.

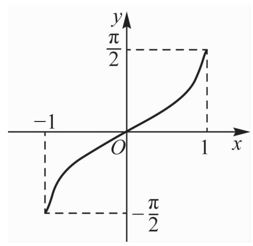
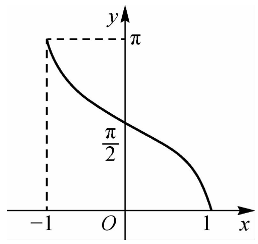
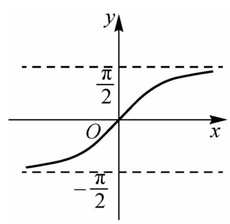
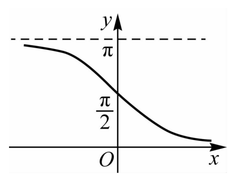
表 1-1

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in D)$	依 α 不同而异		图形都经过点(1,1). 在第一象限内， 当 $\alpha>0$ 时，函数单调增加； 当 $\alpha<0$，函数单调减少

续表

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要性质
指数函数	$y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图形都分布在 x 轴的上方，都过点 $(0,1)$. 当 $0<a<1$ 时，函数单调减少；当 $a>1$ 时，函数单调增加
对数函数	$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		图形都分布在 y 轴的右侧，都过点 $(1,0)$. 当 $0<a<1$ 时，函数单调减少；当 $a>1$ 时，函数单调增加
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		奇函数，周期为 2π，图形分布在两直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		偶函数，周期为 2π，图形分布在两直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少

续表

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要性质
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

2. 复合函数

我们知道，当动点在单位圆上以点 $A(0,1)$ 为起点做逆时针匀速运动时，动点在 y 轴上的投影的纵坐标 y 是角度 θ 的函数 $y=\sin\theta$，如果角速度为 ω，则角度 θ 是时间 t 的函数 $\theta=\omega t$. 显然，对于大于或等于零的任意时间 t，动点在 y 轴上的投影纵坐标 y 都是确定的，因此，y 也是时间 t 的函数，即 $y=\sin(\omega t)$. 我们把这样一种函数关系定义如下.

复合函数　一般地，如果函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 W_φ，当 D_f 与 W_φ 的交集 I 为非空集时，设与 I 相对应的 x 的取值范围为 D（显然 $D\subseteq D_\varphi$），那么，对于任意 $x\in D$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in I$ 与之相对应，由于 $I\subseteq D_f$，因此对于这个 u，通过函数 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之相对应. 这样，对于任意 $x\in D$，通过变量 u 有确定的 y 值与之相对应，从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中，变量 u 称为复合函数的**中间变量**. 为方便起见，我们把 $y=f(u)$ 称为**外函数**，把

$u=\varphi(x)$称为**内函数**.

必须注意以下几点.

(1)当且仅当 D_f 与 W_φ 的交集 I 为非空集时,两个函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合才是有意义的. 例如,$y=f(u)=\arcsin u$,$u=\varphi(x)=x^2+2$,这两个函数就不能复合. 因为,无论 x 取任何值,都有 $u\geqslant 2$,而对于任意绝对值大于常数 1 的 u,相应的反正弦值都不存在.

(2)如果没有特别说明,复合函数的定义域是使复合函数有意义的自变量的取值范围. 例如,函数 $y=\sin(\omega t)$的定义域为全体实数集 $\mathbf{R}$,$y=\sqrt{x^2-1}$的定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(3)多个函数也可以进行类似的复合运算. 例如,$y=\sqrt{u}$,$u=\sin v$,$v=x^2+1$ 就可以复合成 $y=\sqrt{\sin(x^2+1)}$.

例 1-1　分解下列复合函数.

(1)$y=\cos^2 3x$;　　　(2)$y=\sqrt{\ln[\sin(x^2+x+1)]}$.

解　(1)$y=u^2$,$u=\cos v$,$v=3x$;

(2)$y=\sqrt{u}$,$u=\ln v$,$v=\sin\omega$,$\omega=x^2+x+1$.

例 1-2　已知 $f(x-1)=x^3-x+1$,求 $f(x)$.

解　设 $x-1=u$,则 $x=u+1$,于是 $f(u)=(u+1)^3-(u+1)+1=u^3+3u^2+2u+1$,所以

$$f(x)=x^3+3x^2+2x+1$$

例 1-3　设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求函数 $f(x+1)$,$f(e^x)$的定义域.

解　因为 $f(x+1)$由 $y=f(u)$,$u=x+1$ 复合而成,必须使 $u=x+1\in D_f$,即 $x+1\in[0,1]$,所以 $x\in[-1,0]$.

因为 $f(e^x)$由 $y=f(u)$,$u=e^x$ 复合而成,必须使 $u=e^x\in D_f$,即 $e^x\in[0,1]$,所以 $x\in(-\infty,0]$.

3. 初等函数

我们把经过有限次四则运算和有限次复合步骤的常数和基本初等函数所构成并可以用一个解析式表示的函数,称为**初等函数**. 例如,$y=x^2$,$y=2x+\ln(\sin x)$,$y=3\arctan\sqrt{x^2+1}$ 等都是初等函数. 本书所涉及的函数绝大多数都是初等函数.

4. 分段函数

我们把不同定义域区间所对应的函数解析式不同的函数统称为**分段函数**,如邮资函数、电话费用函数、个人收入所得税函数等. 高等数学课程中还会涉及如下几个分段函数.

符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$;

取整函数 $y=[x]=n$,$x\in[n,n+1)$,$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

这里,符号函数和取整函数都是非初等函数,但绝对值函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}$可以用一个解析式来表示,所以是初等函数.

例 1-4　【社会责任、制度自信】 根据《中华人民共和国个人所得税法》及其实施条例、《中华人民共和国税收征收管理法》及其实施细则等法律法规的规定，负有纳税义务的单位和个人应该**依法纳税**，以保障国家税收收入，促进经济和社会发展. 2018 年 12 月 21 日，国家税务总局发布了《个人所得税扣缴申报管理办法(试行)》，自 2019 年 1 月 1 日起施行，表 1-2 是本法规定的个人所得税预扣率表(居民个人工资、薪金所得预扣预缴适用).

表 1-2

级数	累计预扣预缴应纳税所得额	预扣率/%	速算扣除数
1	不超过 36 000 元	3	0
2	超过 36 000 元至 144 000 元的部分	10	2 520
3	超过 144 000 元至 300 000 元的部分	20	16 920
4	超过 300 000 元至 420 000 元的部分	25	31 920
5	超过 420 000 元至 660 000 元的部分	30	52 920
6	超过 660 000 元至 960 000 元的部分	35	85 920
7	超过 960 000 元的部分	45	181 920

注：1. 累计预扣预缴应纳税所得额＝累计收入－累计免税收入－累计减除费用－累计专项扣除－累计专项附加扣除－累计依法确定的其他扣除. 其中，累计减除费用按照 5 000 元/月乘以纳税人当年截至本月在本单位的任职受雇月份数计算.

2. 非居民个人的工资、薪金所得，以每月收入额减除费用五千元后的余额为应纳税所得额；劳务报酬所得、稿酬所得、特许权使用费所得，以每次收入额为应纳税所得额，适用表 1-3 计算应纳税额.

表 1-3

级数	应纳税所得额	税率/%	速算扣除数
1	不超过 3 000 元	3	0
2	超过 3 000 元至 12 000 元的部分	10	210
3	超过 12 000 元至 25 000 元的部分	20	1 410
4	超过 25 000 元至 35 000 元的部分	25	2 660
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30	4 410
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35	7 160
7	超过 80 000 元的部分	45	15 160

2018 年 12 月，国务院印发的《个人所得税专项附加扣除暂行办法》(以下简称《办法》)对个人所得税专项附加扣除的原则、范围、标准等做了具体规定.

《办法》规定，纳税人子女在全日制学历教育阶段(包括义务教育、高中阶段教育、高等教育)的支出，以及子女年满 3 岁至小学入学前处于学前教育阶段的支出，纳税人可选择由夫妻一方按每孩每月 1 000 元扣除，也可选择夫妻双方分别按每孩每月 500 元扣除.

《办法》规定，纳税人在中国境内接受继续教育发生的支出，其中属于学历(学位)继续教育的支出，按每月 400 元扣除，扣除期限不能超过 48 个月(4 年)；属于技能人员职业资格继续教育和专业技术人员职业资格继续教育的支出，在取得相关证书的当年扣除 3 600 元.

《办法》规定，一个纳税年度内，由纳税人负担的医药费用支出超过 1.5 万元的部分，在每年 8 万元的限额内据实扣除.

《办法》规定，纳税人本人或其配偶购买中国境内住房发生的首套住房贷款利息支出，可以选择由夫妻一方按每月 1 000 元扣除，扣除期限最长不超过 240 个月(20 年).

《办法》规定，纳税人赡养年满 60 岁父母的支出，或者祖父母、外祖父母的子女已经去世，纳税人赡养年满 60 岁的祖父母或外祖父母的支出可以扣除. 纳税人属于独生子女的，按每月 2 000 元扣除；属于非独生子女的，与其兄弟姐妹分摊每月 2 000 元的扣除额度，其中每人分摊的扣除额度不得超过 1 000 元.

因此，2022 年最新个税计算公式(含个税专项扣除、专项附加扣除等)为

月度应纳税所得额＝月度收入－个税起征点－专项扣除(五险一金等)－
专项附加扣除－依法确定的其他扣除

2018 年 10 月 1 日之后的个税起征点是 5 000 元，使用超额累进税率计算应纳税额为

月度应纳税额＝月度应纳税所得额×适用税率－速算扣除数

于是，月度应纳税额与月度收入之间的函数关系为**分段函数**.

钱先生，北京人，45 岁，身体健康，独生子女，已婚，有房，但每月需还房贷 3 000 元；有 1 个女儿，正在读大学本科；父母健在，均 60 岁以上；月收入 30 000 元，“三险一金”专项扣除为 3 000 元.

请问：(1)若没有专项附加扣除，钱先生每月需缴纳个税多少元？

(2)若按照最新政策，考虑专项附加扣除，钱先生每月需缴纳个税多少元？

(3)比较个税的两种计算方法，钱先生每月可节省多少税额？

解　(1)若没有专项附加扣除，钱先生每月需缴纳个税为

$$(30\ 000-5\ 000-3\ 000)\times 20\%-1\ 410=2\ 990(\text{元})$$

(2)若按照最新政策，考虑专项附加扣除，钱先生可以享受住房贷款利息 1 000 元扣除、子女教育 1 000 元扣除、赡养老人 2 000 元扣除(独生子女)，钱先生每月需缴纳个税为

$$(30\ 000-5\ 000-3\ 000-1\ 000-1\ 000-2\ 000)\times 20\%-1\ 410=2\ 190(\text{元})$$

(3)比较个税两种计算方法所得的结果，钱先生每月可节省税额为

$$2\ 990-2\ 190=800(\text{元})$$

个税跟人们的收入息息相关. 按照新个税法的计算方法，将会节省一部分税额，体现了社会主义制度的优越性.

总之，专项附加扣除办法的出台是对我国现代个人所得税制度的完善，同时更重要的意义在于其在减税的背景下实现了一定的社会政策目标. 具体而言，主要着力于教育、医疗、养老及住房四个社会最为关注的民生问题. 它是社会价值观及民生关注的反映. 为确保税制的弹性，未来还会根据教育、住房、医疗等民生支出变化情况，适时调整专项附加扣除范围和标准. 从更深层次上看，**专项附加扣除所体现出来的社会意义也是尊重人民的权益、提高国家治理水平的反映，又是坚持以人民为中心的发展思想，让现代化建设成果更多更公平惠及全体人民.**

1.1.3　函数的定义域

函数的定义域是使函数有意义的自变量取值的集合. 解析式函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值范围.

例 1-5　求下列函数的定义域.

(1) $y=\tan(x+1)$；　　(2) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{x-1}{3}$.

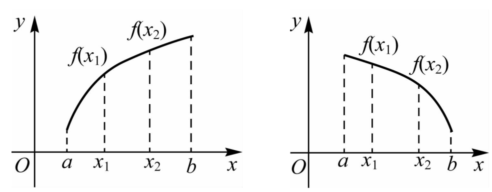
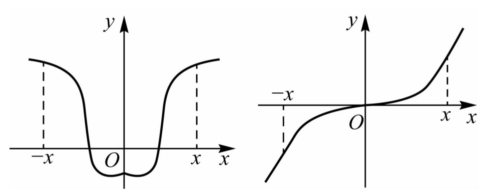
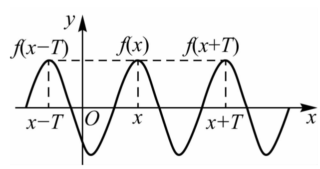
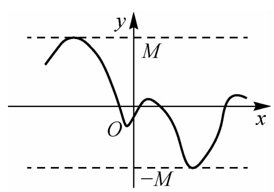
解　(1)要使函数有意义,必须 $x+1\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1(k\in\mathbf{Z})$.

(2)要使函数有意义,必须 $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\-1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 3\\-2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$,即 $x\in[-2,3]$.

1.1.4　函数的性质

函数常见的几种性质及其几何意义如表 1-4 所示(D 为函数 $f(x)$的定义域).

表 1-4

性质	定义	几何意义
单调性	设区间 $I\subseteq D$,若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调增加;若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调减少	
奇偶性	设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,对任意的 $x\in D$,若有 $f(-x)=f(x)$,则函数 $f(x)$ 为偶函数;若有 $f(-x)=-f(x)$,则函数 $f(x)$为奇函数	
周期性	若存在常数 $T\neq 0$,使对任意的 $x\in D$,有 $x+T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数	
有界性	设区间 $I\subseteq D$,对任意的 $x\in I$,存在正数 M,有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$ 成立,则称 $f(x)$在区间 I 上有界	

1.1.5　经济分析中的函数举例

在经济分析中,经常会涉及总成本 C、总收益 R、利润 L 等与产量 Q 之间的函数关系,我们把这些函数关系分别称为**成本函数**、**收益函数**、**利润函数**;也会遇到商品的供给量、需求量与价格之间的函数关系,我们把这些函数关系分别称为**供给函数**、**需求函数**,它们的反函数就是**价格函数**.

例 1-6　某厂生产某种产品,固定成本为 100 元,每生产一件产品需增加 6 元成本,又知该产品的需求函数为 $Q=1\ 000-100p$(p 表示价格).求:(1)总成本 C 与产量 Q 之间的函数关系;(2)总收益 R 与产量 Q 之间的函数关系;(3)利润 L 与产量 Q 之间的函数关系.

解　(1)总成本为固定成本与可变成本之和,于是 $C(Q)=100+6Q$.

(2)由需求函数 $Q=1\ 000-100p$ 的反函数为价格函数,得 $p=\dfrac{1\ 000-Q}{100}=10-\dfrac{Q}{100}$. 于是,总收益为 $R(Q)=Qp=10Q-\dfrac{Q^2}{100}$.

(3)利润等于总收益与总成本之差,因而有

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=10Q-\frac{Q^2}{100}-100-6Q=4Q-\frac{Q^2}{100}-100$$

即

$$L(Q)=4Q-\frac{Q^2}{100}-100$$

练习 1-1

1. 填空题.

(1)若函数 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & -3\leqslant x<0\\ x-1, & 0\leqslant x<4\end{cases}$,则 $f(0)=$__________.

(2)若函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x<-1\\ \mathrm{e}^x, & -1\leqslant x<+\infty\end{cases}$,则函数 $f(x)$的定义域为__________.

(3)函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域是__________.

(4)设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$,那么 $f(x)=$__________.

2. 选择题.

(1)基本初等函数与初等函数的关系,下列说法错误的是(　　).

(A)基本初等函数就是初等函数

(B)初等函数包括基本初等函数

(C)基本初等函数与初等函数的解析式都只能是一个

(D)初等函数中的运算关系有四则运算,而基本初等函数中没有四则运算

(2)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,则 $f[f(x)]=$(　　).

(A)$\dfrac{1}{1-x}$　　(B)$\dfrac{1}{1+x}$　　(C)$1+\dfrac{1}{x}$　　(D)$1-\dfrac{1}{x}$

(3)下列函数中,有界的函数是(　　).

(A)$f(x)=\dfrac{10}{1+x^2}$　　(B)$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$　　(C)$f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$　　(D)$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$

(4)如果函数 $f(x)$的定义域为$(0,1]$,则函数 $f(2^x)$的定义域为(　　).

(A)$[0,1]$　　(B)$[-1,0]$　　(C)$(0,+\infty)$　　(D)$(-\infty,0]$

3. 设 $f(x)=x^3$,求$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

4. 求下列函数的复合函数.

(1)$y=\sqrt{1+u}$,$u=v^2$,$v=\sin x$;

(2)$y=\lg u$,$u=\cos v$,$v=2^x$.

5. 将下列初等函数分解为简单函数.

(1) $y=\sin^2(1-2x)$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{1}{3x+2}$.

6. 某工厂单位时间内生产 Q 单位的某种产品的成本为 C 元，其中固定成本为 300 元，每生产 1 单位的产品，成本增加 15 元. 设该产品的需求函数为 $Q=150-3p$（p 为单价），且产品均可售出. 试将该产品的利润 L 表示为产量 Q 的函数.

7. 某品牌的照相机，每台售价为 2 400 元时，市场的供给量为 50 台；每台价格为 245 元时，市场的供给量为 55 台. 若供给量和价格之间呈线性关系，求此照相机的供给量 Q 与价格 p 的函数关系.

§1.2　函数的极限

极限概念是由于求某些问题的精确解答而产生的，也是微积分的理论基础.

1.2.1　问题举例

割圆术　我国古代数学家刘徽创造了“割圆术”，即利用圆内接正多边形的面积来推算圆的面积，他认为不断增加圆内接正多边形的边数，“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”. 对于圆的面积的计算，先从圆内接正六边形算起，依次将边数加倍. 如果把圆内接正 $6\times2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n，显然，正多边形的边数 n 越大，则正多边形的面积 A_n 就和圆的面积越接近，当 n 无限增大时，圆内接正多边形的面积就无限接近于圆的面积.

【家国情怀、民族自信】刘徽的“割圆术”是对极限思想的深刻论述. 早在战国时代，中国就有了极限思想，庄周的《庄子·天下篇》中载有“一日之棰，日取其半，万世不竭”. 中国这两个富有极限思想的例子，要比欧洲早一千多年. 再比如，祖冲之使中国在圆周率的计算方面领先西方约 1 000 年；杨辉三角的发现早于其他国家 400 多年；“中国剩余定理”比高斯创用的同类方法早 500 多年，等等. 中国是四大文明古国之一，是人类文明的发祥地之一，也是数学的故乡之一，中华民族的数学成就对世界数学的形成和发展做出了巨大贡献，涌现了像李善兰、熊庆来、姜立夫、陈建功、苏步青、华罗庚、陈省身等一大批近现代卓越的数学家.

水温的变化趋势　将一盆 80 ℃的热水放在室温恒为 20 ℃的房间里，显然，水温 T 将随时间 t 的增加而逐渐降低，随着时间 t 的推移，水温会越来越接近于室温 20 ℃.

单摆运动　单摆离开垂直位置一定的距离后，在重力作用下左右摆动，如果不施加外力作用，那么单摆在摩擦力和空气阻力的作用下，其振幅会不断减小，时间越长，振幅也就越小，当时间无限延长时，单摆的振幅就无限接近于零.

细胞分裂　假设某细胞分裂的周期为 1 min，则细胞数量 y 与时间 t 的函数关系为 $y=2^t$，显然，当时间变量越大时，对应的细胞数量就越多；当 $t\to+\infty$ 时，对应的细胞数量也就无限增多.

1.2.2　函数的极限类型

上述举例反映出相同的规律，即当自变量沿着某方向变化时，对应的函数值是否无限接近于一个确定的常数. 我们把函数的这种变化趋势定义为极限. 根据自变量的变化方式，我们把函数的极限分为以下两种类型.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

对于函数 $f(x)$，当自变量 x 的绝对值无限增大时，如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于

唯一确定的常数 A,则称 **A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

当自变量 x 的绝对值无限增大时,如果对应函数的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称极限不存在,或称极限为无穷大,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

例如,对于函数 $y=\frac{1}{x}$,当自变量 x 的绝对值无限增大时,对应的函数值无限接近于常数零,在函数图形上表现为:当函数曲线向左、右两侧无限延伸时,曲线和 x 轴无限接近(见图 1-1),即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

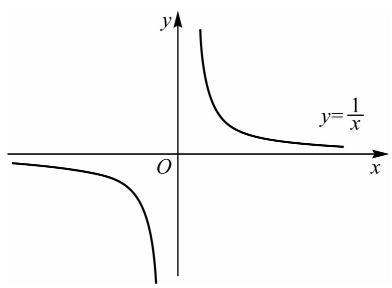


图 1-1

特别地,当自变量 x 取正值方向无限增大时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于唯一确定的常数 A,则称 **A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

当自变量 x 取负值方向无限增大时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于唯一确定的常数 A,则称 **A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty)$$

例如,对于函数 $y=\mathrm{e}^x$,当自变量 x 取负值无限增大时,即当 $x\to-\infty$ 时,对应函数值无限接近于常数零,即 $\mathrm{e}^x\to0\ (x\to-\infty)$,如图 1-2 所示. 对于函数 $y=\arctan x$,当 $x\to-\infty$ 时,对应的函数值无限接近于常数 $-\frac{\pi}{2}$,即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$;当 $x\to+\infty$ 时,对应的函数值无限接近于常数 $\frac{\pi}{2}$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$. 如图 1-3 所示.

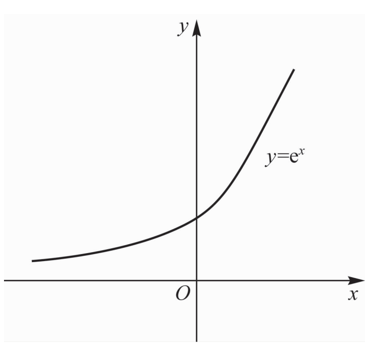


图 1-2

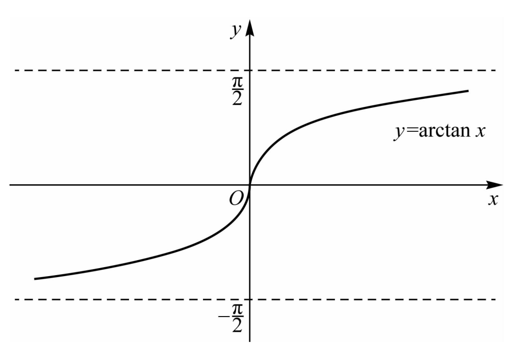


图 1-3

必须注意的是: 对于极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,自变量的变化方向包括 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种方式,只有当 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种方式下函数 $f(x)$ 的极限都存在且相等时,函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限才存在;否则,$f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限不存在.

例如,函数 $y=\mathrm{e}^x$,$y=\arctan x$ 当 $x\to\infty$ 时的极限不存在.

结论 1-1　如果 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$,$A=B$,那么 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

下面,我们分析当自变量无限接近于一个确定的值时,对应函数的变化趋势.

例如,对于函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,当 $x=1$ 时,函数无意义,但是,当自变量 x 从 1 的左、右两侧无限接近于 1 时,对应的函数值无限接近于唯一确定的常数 2,如图 1-4 所示.

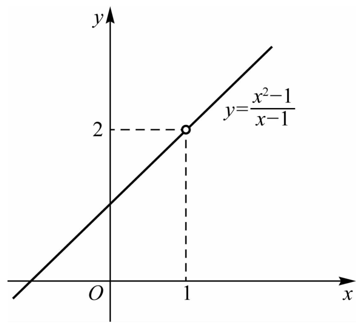


图 1-4

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 1-2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 近旁有意义,当自变量 x 无限接近于 x_0 时,如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于唯一确定的常数 A,则称 **A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

微课
$x\to x_0$ 时函数
$f(x)$的极限

必须注意的是: x 无限接近于 x_0 的方式是任意的,它包括变量 x 从 x_0 的左、右两侧无限接近于 x_0. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 反映的是在自变量 x 无限接近于 x_0 的过程中对应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势,而与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义以及函数值的大小无关.

例如,对于函数 $y=x^3$,当自变量 x 无限接近于 x_0 时,对应的函数值 $f(x)$ 就无限接近于 x_0^3. 所以当 $x\to x_0$ 时,函数 $y=x^3$ 的极限为 x_0^3,如图 1-5 所示.

对于函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$,当自变量 x 无限接近于零时,对应的函数值 $f(x)$ 就无限接近于零. 所以当 $x\to 0$,函数 $f(x)$ 的极限为 0(与函数值 1 无关),如图 1-6 所示.

对于函数 $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$,当自变量 x 无限接近于零时,对应的函数值 $f(x)$ 不是无限接近于唯一确定的常数. 因此,我们说该函数当 $x\to 0$ 时的极限不存在,如图 1-7 所示.

对于函数 $y=\dfrac{1}{x}$,当自变量 x 无限接近于零时,对应的函数值 $f(x)$ 的绝对值无限增大,不是无限接近于唯一确定的常数. 因此,我们说该函数当 $x\to 0$ 时的极限不存在.

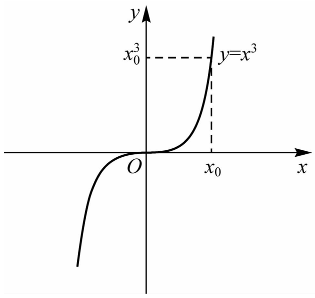


图 1-5

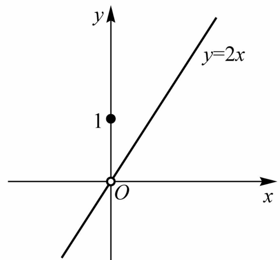


图 1-6

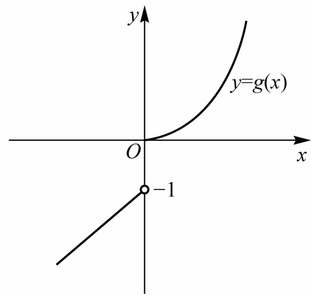


图 1-7

特别地，当自变量 x 从 x_0 的左侧(右侧)无限接近于 x_0 时，如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于唯一确定的常数 A，则称常数 A 为**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限(右极限)**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)；\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)$$

显然，对于函数 $g(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0 \\ x-1, & x<0 \end{cases}$，当自变量从零的左侧无限接近于零时，相应的函数值无限接近于唯一确定的常数 -1，因而，该函数在零处的左极限为 -1，即 $g(0-0)=-1$；当自变量从零的右侧无限接近于零时，相应的函数值无限接近于唯一确定的常数零，因而，该函数在零处的右极限为零，即 $g(0+0)=0$.

结论 1-2　如果 $f(x_0-0)=A$，$f(x_0+0)=B$，$A=B$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

如果设 A 为我们的理想，$y=f(x)$ 为人生规划函数，根据函数极限的定义，我们可以得到启示：**只要我们朝着正确的方向，自强不息、砥砺前行，就会离我们的理想越来越近.**

回首过往，中国共产党自诞生之日起，就将为人民谋幸福、为民族谋复兴视为使命. 岁月如梭，斗转星移，但中国共产党人初心不改，矢志不渝. 中国特色社会主义进入新时代，不仅意味着中国日益走近世界舞台的中央，也意味着中华民族正在以崭新姿态屹立于世界东方.

“从现在起，中国共产党的中心任务就是团结带领全国各族人民全面建成社会主义现代化强国、实现第二个百年奋斗目标，以中国式现代化全面推进中华民族伟大复兴.”

“今天，我们比历史上任何时期都更接近、更有信心和能力实现中华民族伟大复兴的目标，同时必须准备付出更为艰巨、更为艰苦的努力. 全党必须坚定信心、锐意进取，主动识变应变求变，主动防范化解风险，不断夺取全面建设社会主义现代化国家新胜利！”

1.2.3　无穷小与无穷大

微课
无穷小与
无穷大

1. 无穷小的概念

当自变量以某种方式变化时，如果对应的函数值无限接近于零，那么我们就把具备这样一种变化趋势的量称为**无穷小**(或**无穷小量**).

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$)，则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小**(或**无穷小量**).

无穷小量就是极限为零的变量. 例如，当 $x\to 0$ 时，ax^2，$\sin x$ 是无穷小量，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{\ln|x|}$ 也是无穷小量.

特别地,常数零也是无穷小量.

2. 无穷大的概念

当自变量以某种方式变化时,如果相应的函数值无限增大,那么我们就把具备这样一种变化趋势的量称为**无穷大**(或**无穷大量**).

设函数 $f(x)$在点 x_0 近旁有意义,当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,如果相应的函数 $f(x)$的绝对值$|f(x)|$无限增大,则称 $f(x)$是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷大**(或**无穷大量**).

3. 无穷小的性质

性质 1-1　有限个无穷小之和(或差)仍为无穷小.

性质 1-2　无穷小与有界变量之积仍为无穷小.

性质 1-3　有限个无穷小之积仍为无穷小.

应当注意的是:无限个无穷小的代数和不一定为无穷小. 例如,将长为 1 的线段 n 等分,每段长度为$\frac{1}{n}$,$\frac{1}{n}$为无穷小,无限个$\frac{1}{n}$的和为 1,1 不是无穷小.

“勿以恶小而为之,勿以善小而不为”. 坏事也要从小事开始防范,否则积少成多,也会坏大事;好事要从小事做起,积小成大,也可成大事.

4. 无穷小与无穷大的关系

由函数 $y=\frac{1}{x}$可以看出,当 $x\to\infty$(x 为无穷大量)时,$\frac{1}{x}\to 0$(无穷大量的倒数为无穷小量);反之,当 $x\to 0$(x 为无穷小量且 $x\neq 0$)时,$\frac{1}{x}\to\infty$(不为零的无穷小量的倒数为无穷大量).

在自变量的同一变化过程中,无穷大量的倒数为无穷小量;反之,不为零的无穷小量的倒数为无穷大量.

1.2.4　数列的极限

定义 1-3　对于数列$\{a_n\}$,当项数 n 无限增大时,如果对应的项 a_n 无限接近于唯一确定的常数 A,则称常数 A 为**数列$\{a_n\}$的极限**,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$.

数列是一种整标函数. 显然,数列的极限只是函数的极限当 $x\to+\infty$时的特例.

例如,一只皮球从高度为 100 m 的高空落下,如果每次反弹的高度为上一次的$\frac{2}{3}$,那么,每次反弹的高度就构成了一个公比为$\frac{2}{3}$的等比数列,其中第 n 次反弹的高度为 $a_n=100\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 显然,当 $n\to\infty$时,反弹高度无限接近于零,即该数列的极限为零.

练习 1-2

1. 填空题.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=$__________.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=$__________.

(3)$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=$__________.

2. 选择题.

(1)函数 $y=f(x)$在点 $x=a$ 处有定义是 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在的(　　).

(A)必要条件　　(B)充分条件

(C)充要条件　　(D)无关条件

(2)下列式子中错误的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=-1$

(C) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$　　(D) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=+\infty$

(3)设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>1\\ 1, & x=1\\ -2x, & x<1\end{cases}$,则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=($　　$)$.

(A)1　　(B)-2　　(C)2　　(D)不存在

(4)当 $x\to+\infty$时,下列变量为无穷小的是(　　).

(A)$x+\dfrac{1}{x}$　　(B)$\ln x$　　(C)$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　(D)$\arctan x$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$在自变量何种变化方式下是无穷小,又在何种变化方式下是无穷大?

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+b, & x<0\\ e^x+1, & x>0\end{cases}$,如果 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,求常数 b 的值.

5. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,分别求出 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,并问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在.

6. 分析 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 的存在性.

§1.3　极限的运算及其在经济分析中的应用

1.3.1　极限的运算法则

1. 四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}g(x)=AB$$

$$\lim_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim_{x\to x_0}f(x)=CA$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$$

上述极限运算法则同样适用于当自变量 $x\to\infty$或 $x\to-\infty$,$x\to+\infty$及在定点 x_0 处左、右

极限的情形. 极限的四则运算法则表明函数的和、差、积、商(分母的极限不为零)的极限等于它们极限的和、差、积、商. 其中,函数的个数可以由两个推广到有限多个.

例 1-7　对于无穷数列$\{aq^{n-1}\}$(a 为常数),如果$|q|<1$,则称数列$\{aq^{n-1}\}$为无穷递缩等比数列. 求:(1)该数列的极限;(2)所有项的和 S.

解　(1)因为$|q|<1$,所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} aq^{n-1}=0$;

(2)求等比数列的前 n 项和 S_n. 根据公式 $S_n=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$,有

$$S=\lim_{n\to+\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a(1-\lim\limits_{n\to+\infty}q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}$$

必须注意的是:无穷多项的和不能用极限运算法则.

例 1-8　计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+1}{x^2-2x+3}$.

解　根据上述法则有 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+1}{x^2-2x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(3x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+3)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to1}x+1}{\lim\limits_{x\to1}x^2-2\lim\limits_{x\to1}x+3}=\dfrac{4}{2}=2.$

例 1-9　计算 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$.

分析　当 $x\to3$ 时,分母 $x^2-x-6\to0$,且分子 $x^2-4x+3\to0$,不能直接用法则求极限,此式属于"$\dfrac{0}{0}$"型未定式,可将分子和分母约掉极限为零的公因子 $x-3$.

解　$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{2}{5}.$

例 1-9 说明,当 $x\to3$ 时,分子和分母均为无穷小量. 我们通常用无穷小量比值的极限来区分无穷小量趋向于零的速度的快慢.

例 1-10　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{3x^3+x+2}$.

分析　当 $x\to\infty$时,分子 $x^3-3x+1\to\infty$,分母 $3x^3+x+2\to\infty$,不能直接用法则求极限,此式属于"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式,将分子和分母同时除以 x^3,就可以用法则求极限了.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{3x^3+x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=\dfrac{1}{3}.$

一般地,我们有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$$

2. 复合函数的极限运算法则

法则　设函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$构成的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$满足 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,而复合

函数的外函数 $f(u)$ 为初等函数，且 a 在函数 $f(u)$ 的定义域内，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right]=f(a)$$

上述运算法则同样适用于当自变量 $x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 及在定点 x_0 处的左右极限的情形. 复合函数的极限运算法则表明，当复合函数的外函数是初等函数时，复合运算关系与极限运算可以交换顺序.

例 1-11　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}$.

解　$y=\sqrt{1-x^2}$ 由外函数 $y=\sqrt{u}$ 与内函数 $u=1-x^2$ 复合而成. 其中，外函数 $y=\sqrt{u}$ 是初等函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)=1$ 在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域内，由法则得

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\lim_{x\to 0}(1-x^2)}=\sqrt{1}=1$$

例 1-12　求无穷数列 $\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\cdots$ 的极限.

解　将数列的通项 a_n 简化为 $2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$，于是该数列的极限为

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}=2^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=2$$

微课
无穷小量阶的比较

1.3.2　无穷小的比较

问题举例　当 $x\to 0$ 时，显然有 $2x\to 0$，$x^2\to 0$，$\sin x\to 0$，它们趋向于零的速度如表 1-5 所示.

表 1-5

x	1	0.1	0.01	0.001	0.000 1	…	$\to 0$
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	0.000 2	…	$\to 0$
x^2	1	0.01	0.000 1	0.000 001	0.000 000 01	…	$\to 0$
$\sin x$	0.84	0.099 8	0.01	0.001	0.000 1	…	$\to 0$

可见，当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $2x$，x^2 及 $\sin x$ 趋向于零的速度不同. 为了便于描述无穷小量趋向于零的速度的快慢，我们采用比值法.

无穷小量阶的比较：设 α 和 β 为同一变化方式下的无穷小.

(1) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 比 β 高阶（或说 α 是比 β 高阶的无穷小量），记作 $\alpha=o(\beta)$；也说 β 比 α 低阶.

(2) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C(C\neq 0,C$ 为常数$)$，则称 α 与 β 同阶（或说 α 是与 β 同阶的无穷小量）.

(3) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 等价，记作 $\alpha\sim\beta$.

对于表 1-5 中的无穷小量，有 $x^2=o(x)$，$x^2=o(2x)$，$x\sim\sin x$，x 与 $2x$ 同阶.

定理 1-1　若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$$

1.3.3　重要极限

微课
两个重要函数极限

在极限的运算过程中，我们经常会用到下列两个极限结论.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

通过列表法(见表 1-6)可以看出，当 $x\to 0$ 时，函数$\frac{\sin x}{x}\to 1$.

表 1-6

x	1	0.5	0.1	0.01	…
$\frac{\sin x}{x}$	0.841 471	0.958 85	0.998 33	0.999 98	…

必须注意的是：当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x$；当 $u\to 0$ 时，$u\sim\sin u$. 对于"$\frac{0}{0}$"型未定式，除使用因式分解、有理化、极限公式 1 求极限外，还可考虑等价无穷小量比较法.

例 1-13　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

分析　此极限类型属于"$\frac{0}{0}$"型未定式，$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$

由此可知，当 $x\to 0$ 时，$x\sim\tan x$.

例 1-14　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

分析　当 $x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$，$\tan 5x\sim 5x$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{5x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{5x}\cdot\lim\limits_{5x\to 0}\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}.$

上述运算过程中，相当于分子和分母同时用等价的无穷小量作了替代，即在上述"$\frac{0}{0}$"型未定式中，用与分子等价的无穷小量 $3x$ 替代 $\sin 3x$，用与分母等价的无穷小量 $5x$ 替代 $\tan 5x$. 事实上，对于无穷小量的积或商运算的类型，我们都可以用等价的无穷小量作替代，从而使极限运算简便.

例 1-15　计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\cos x)}{\frac{\pi}{2}-x}$.

分析　此极限类型属于"$\frac{0}{0}$"型未定式，考虑到 $x\to\frac{\pi}{2}$时，$\cos x\to 0$，于是 $\sin(\cos x)\sim\cos x$.

解　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\cos x)}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{\frac{\pi}{2}-x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}=1.$

例 1-16　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

通过观察通项 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 数列的各项(见表 1-7),我们不难得出 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

表 1-7

n	x_n	n	x_n
1	2	100 000	2.718 268 24
5	2.488 32	500 000	2.718 279 10
10	2.593 742 46	1 000 000	2.718 280 47
100	2.704 813 83	5 000 000	2.718 281 55
1 000	2.716 923 93	10 000 000	2.718 281 69
10 000	2.718 145 93	50 000 000	2.718 281 81

从表 1-7 中我们可以发现,当 n 无限增大时,相应的变量 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 无限接近于一个确定的无理数 e=2.718 281 8…. 事实上,可以证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

必须注意的是:该重要极限的类型属于“1^∞”型. 其中,幂底变量为 1 加无穷小量 α,指数为无穷小量 α 的倒数 $\dfrac{1}{\alpha}$(无穷大量). 该极限类型也可以表示为以下形式.

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

例 1-17　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解　当 $x\to\infty$ 时,$-\dfrac{1}{x}\to 0$. 令 $-\dfrac{1}{x}=t$,则 $x=-\dfrac{1}{t}$,于是有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1}=e^{-1}$$

例 1-18　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$.

由此可以总结出:当 $x\to 0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$.

1.3.4　极限在经济分析中的简单应用

以重要极限 2 为例,简单列举极限在经济分析中的应用,其中比较常见的是复利问题和

贴现问题.

例 1-19 (复利问题)设本金为 A,银行存款的年利率为 r,如果以年为周期结算,则 t 年末的本利和为 $S_t=A(1+r)^t$.

(1)如果要求一年结算 n 次,求 t 年末的本利和;

(2)如果以连续复利结算,求 t 年末的本利和.

解 (1)如果每年结算 n 次,则每次的利率为$\frac{r}{n}$,于是,t 年末的本利和为

$$S_n=A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

(2)如果以连续复利计算,即每年结算的次数 $n\to\infty$(资金的周转是连续的,计算复利也应越细越合理),则 t 年末的本利和为

$$S=\lim_{n\to\infty}A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=\lim_{n\to\infty}A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}rt}=A\lim_{\frac{r}{n}\to 0}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}=Ae^{rt}$$

这个公式就是国际上广泛使用的“连续复利法”,其中,e^r 称连续复利系数.在现实世界中,如物体的冷却、生物的连续生长、人口的增长等,都可以视为连续复利模型.

例 1-20 (贴现问题)设某项投资的年利率为 6%,问:现投资多少元,10 年末可得 120 000 元?分别求每年结息 1 次、6 次及连续复利情况下的投资额 A.

解 与复利问题相反,现在已知 S_t,求 A.每年结息 1 次、6 次、连续复利下相应的贴现公式分别为 $A_1=S_t(1+r)^{-t}$,$A_6=S_{6t}\left(1+\frac{r}{6}\right)^{-6t}$,$A=Se^{-rt}$.于是

每年结算 1 次时,$A_1=120\ 000\times 1.06^{-10}=67\ 007.40$;

每年结算 6 次时,$A_6=120\ 000\times 1.01^{-6\times 10}=120\ 000\times 1.01^{-60}=66\ 054.00$;

连续复利时,$A=120\ 000\times e^{-0.06\times 10}=120\ 000\times e^{-0.6}=65\ 857.40$.

练习 1-3

1. 填空题.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=$__________.

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=$__________.

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x}$__________.

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{3x}$__________.

(5)如果 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}+a}=\frac{3}{4}$,则 $a=$__________.

2. 选择题.

(1)当 $x\to 0$ 时,与无穷小 $x\sin x$ 同阶的无穷小是(　　).

(A)x　　(B)$3x^2$　　(C)x^3　　(D)$2x^4$

(2)下列等式正确的是(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　(B)$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$

(C) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}=1$

(3)下列等式错误的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

(4)设 $f(x)=\begin{cases}3\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0\\ \dfrac{\sin x}{x}+b, & x>0\end{cases}$,若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,则 $b=$(　　).

(A)1　　(B)2　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

(5)设 $f(x)=\dfrac{\sin|x|}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)-1　　(D)不存在

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x-2)(x+3)}-x)$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x-1)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

§ 1.4　函数的连续性

自然界中的很多现象,如生物的生长、气温的变化、河水的流动等,都是随着时间的改变而连续变化的. 我们把变量连续变化的性质叫作函数的连续性.

为了便于描述函数的性质,我们对变量的增量规定如下.

如果变量 u 从一个初值 u_1 变化到终值 u_2,那么终值 u_2 与初值 u_1 的差 u_2-u_1 称为变量 u 的**增量**(或**改变量**),记作 Δu,即 $\Delta u=u_2-u_1$.

对于函数 $y=f(x)$,当自变量 x 由 x_1 变化到 x_2 时,对应的函数增量为 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$;当自变量由 x_0 变化到 $x=x_0+\Delta x$ 时,函数的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$$

1.4.1　函数在点 x_0 处的连续性

函数在点 x_0 处连续,在数量的变化上表现为不间断变化,在图形上的特征表现为该点的函数图形和该点左右两侧的函数图形连接在一起,如图 1-8 所示.

定义 1-4　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 及近旁有定义,若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处**连续**.

微课
函数在一点的连续性

例如，函数 $y=x^2$ 在点 x_0 及近旁有定义，当自变量由 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-{x_0}^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$，于是有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[2x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=0$，所以，函数 $y=x^2$ 在点 x_0 处连续.

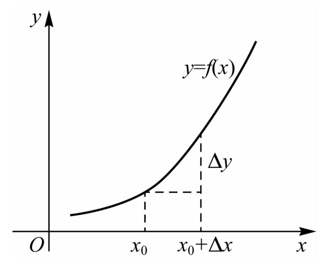


图 1-8

由定义 1-4 可知，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，即当 $x\to x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)\to 0$，于是有下面的定义 1-5.

定义 1-5　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及近旁有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

由此可知，函数在点 x_0 处连续必须满足下列三个条件.

(1)函数在点 x_0 及近旁有定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

特别地，设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及左侧有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及右侧有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**.

显然，函数既左连续又右连续的点，是函数的连续点.

例 1-21　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\geqslant 1\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & x<1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

解　$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x-1\to 0}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$，$f(1)=1$.

因为 $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

1.4.2　函数的连续性

1. 连续区间

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点处都连续，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，也称区间 (a,b) 为函数 $y=f(x)$ 的**连续区间**.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，并且在点 $x=a$ 处右连续，在点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

结论 1-3　如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

2. 初等函数的连续性

基本初等函数在定义域内连续，连续函数的四则运算与复合运算在定义域内也连续，所以，初等函数在其定义域内都是连续的.

由连续的条件可知，初等函数在定义域内某点的极限值等于该点的函数值.

例 1-22　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{1+x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{e}^{\arcsin x}$.

解　(1) 因为函数 $\sqrt{1+x^2}$ 是初等函数，并且在点 $x=2$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

(2) 因为函数 $\mathrm{e}^{\arcsin x}$ 是初等函数，并且在点 $x=1$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{e}^{\arcsin 1}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

1.4.3　函数的间断点

1. 间断点的定义

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**间断**(或**不连续**)，也说点 x_0 是函数 $f(x)$ 的**间断点**(或**不连续点**).

当然，不满足连续条件的点都是间断点. 因此，间断点有以下三种情形.

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义.

(2) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限不存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

例 1-23　求下列函数的间断点.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$；　　(2) $f(x)=\tan x$；　　(3) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$.

解　(1) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$ 是初等函数，只需考察函数无意义的点，因为函数在点 $x=-2$ 处无意义，所以函数在点 $x=-2$ 处间断.

(2) 因为 $f(x)=\tan x$ 是初等函数，函数无意义的点为 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以函数的间断点为 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

事实上，当 $x\to k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\tan x$ 为无穷大量.

(3) 当 $x<0$ 时，$f(x)=x+1$ 为初等函数，且函数在该区间内连续，无间断点；当 $x>0$ 时，函数 $f(x)=x-1$ 也为初等函数，且函数在该区间内连续，无间断点；当 $x=0$ 时，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$. 因为 $f(0+0)\neq f(0-0)$，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，所以，点 $x=0$ 是函数的间断点.

2. 间断点的分类

为方便起见，我们把间断点分成两大类.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，而 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**. 如例 1-23 中的(1)和(3). 如果 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，也称 x_0 为**可去间断点**，如例 1-23 中的(1)；如果 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，也称 x_0 为**跳跃间断点**，例如 1-23 中的(3).

(2) 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 两者之中至少有一个不存在，则

称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**,如例 1-23 中的(2),事实上,当 $x \to k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,$\tan x \to \infty$. 对于这种类型的间断点,我们也称之为**无穷间断点**.

1.4.4 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的图形是一条不断开且有端点的曲线,因而有如下几个性质.

性质 1-4(最值性) 闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值.

性质 1-5(介值性) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在区间端点处取得不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B(A\neq B)$,那么,对于 A,B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$. 如图 1-9 所示.

性质 1-6(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,即 $f(a)\cdot f(b)<0$,那么在开区间 (a,b) 内至少有一个使函数 $f(x)$ 为零的点,即至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0(a<\xi<b)$,如图 1-10 所示.

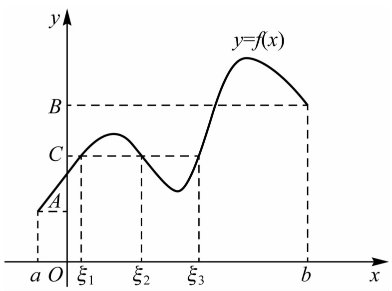


图 1-9

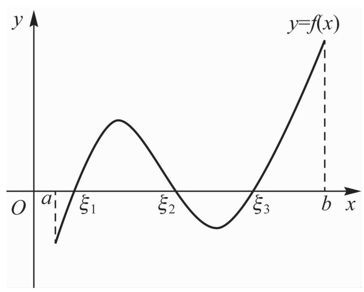


图 1-10

例 1-24 证明:方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证 函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,且

$$f(0)=1>0,\ f(1)=-2<0$$

根据零点定理,在开区间 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$,即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0\ (0<\xi<1)$$

因此,方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

当然,如果想找该方程在区间 $(0,1)$ 内的根,可以采用二分法,即先判断该区间中点处的函数值 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 与哪个端点对应的函数值异号,然后就可判断方程在该小区间内有一个根,如此步骤多次反复,就可得到方程根的近似值.

练习 1-4

1. 填空题.

(1)函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 的间断点为__________,其中第一类间断点为__________.

(2)函数 $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间为__________.

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<1 \\ \ln(1+x), & x\geqslant 1 \end{cases}$ 的连续区间为__________.

(4) $\lim\limits_{x\to -1} e^{\arctan x^2}=$__________.

(5)$x=a$ 是函数 $f(x)=(x-a)\sin\dfrac{1}{x-a}$ 的第__________类间断点.

2. 选择题.

(1) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 是函数 $f(x)$ 在点 a 处连续的(　　).

(A)必要条件　　(B)充分条件

(C)充要条件　　(D)无关条件

(2)闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定有下列性质(　　).

(A) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一定有单调性

(B) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内不一定有界

(C) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一定有界

(D) $f(x)$ 在区间 (a,b) 内一定有最大值和最小值

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 a 为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)-1

(4)设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ ax+b, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \sin \pi x, & x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则(　　).

(A) $a=1,b=1$　　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=-1,b=-1$　　(D) $a=1,b=-1$

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, & -1\leqslant x<2\\ x+1, & x\geqslant 2\end{cases}$ 的连续性. 如果有间断点，说明间断点的类型.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{1+x^2}, & x\geqslant 0\\ 3x^2+2, & x<0\end{cases}$ 是连续函数，求 k 的值.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\leqslant 1\\ \dfrac{x}{|x|}, & 1<|x|\leqslant 3\end{cases}$，求：(1)函数 $f(x)$ 的定义域；(2)间断点；(3)最大值与最小值.

6. 证明：方程 $x=\sin x+1$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个实根.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

§1.5　数学建模举例

在生产和科学研究中所遇到的实际问题往往受多种因素的共同影响，对实际问题进行简化，并用数学语言和方法做出抽象或模仿而形成的一种数学结构，就是数学模型. 建立数

学模型的过程称为**数学建模**.

1.5.1　数学建模的步骤

1. 模型准备

建模前要对实际问题的背景有深刻的了解，明确建模的目的；进行全面、深入、细致的观察，收集必要的数据和有关资料；找出问题的内在规律.

2. 模型假设

对错综复杂的各种信息进行清理，抓住主要因素，舍弃一些次要因素；对问题进行适当简化，提出恰当、合理的假设.

3. 模型建立

在假设、简化的基础上，选择适当的数学工具建立各种因素之间的数学关系.

4. 模型求解

求解各种类型的方程、图表、函数关系式等，必要时需利用计算机及软件等工具.

5. 模型分析与检验

对模型和求解结果进行分析，并与实际情况进行比较，检验模型的合理性与使用范围，以便修改模型的假设，使求得的数学模型不断完善.

6. 模型应用

把所得的数学模型应用到实际问题中去.

1.5.2　建模举例

例 1-25　某汽车公司做 30 min 的广告，其内容为：一段喜剧小品、一段音乐、至少 3 min 的广告. 电视台规定，30 min 节目中播放广告的时间不得超过 12 min，且无论如何不得超过播放喜剧小品的时间，而播放喜剧小品的时间又不得超过 20 min，其余时间播放音乐. 播出成本：喜剧小品为 150 元/min、音乐为 100 元/min、广告为 50 元/min. 由经验知，播放 1 min 的喜剧，可增加 4 000 名观众，播放 1 min 的音乐，可增加 2 000 名观众；播放 1 min 的广告，可减少 1 000 名观众. 汽车公司希望在付出最小成本的情况下获得最多的观众. 问：如何分配节目播出时间，才能满足汽车公司的需求？

解　(1)模型准备. 考虑观众人数与节目类型的关系，播出成本与节目类型及时间的关系，从而收集相关数据，如题目中给出的数据.

(2)模型假设. 观众人数的变化忽略其他媒体、社会因素或自然因素的影响；对于具体节目类型观众的影响，忽略节目的相对差异性等.

(3)模型建立. 假设播放喜剧的时间为 x(min)，播放广告的时间为 y(min)，播放音乐的时间(单位：min)为 $30-x-y$，则

观众人数为 $N=4\,000x+2\,000(30-x-y)-1\,000y=60\,000+2\,000x-3\,000y$.

播出成本为 $C=150x+100(30-x-y)+50y=3\,000+50(x-y)$，

约束条件为 $\begin{cases} 3\leqslant y\leqslant 12 \\ y\leqslant x\leqslant 20, x+y\leqslant 30. \\ x, y\geqslant 0 \end{cases}$

(4)模型求解. 如图 1-11 所示,将约束条件反映在多边形中,分析成本函数可知,成本最小值(3 000 元)在线段 AB 上取得. 点 A 处的观众人数为 $N_A=57\ 000$ 人,点 B 处的观众人数为 $N_B=48\ 000$ 人.

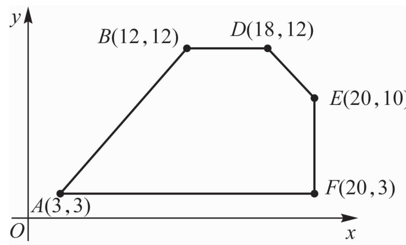


图 1-11

同样的成本,点 A 处的观众人数最多,所以,可以建议汽车公司节目的播出时间为:喜剧小品与广告各 3 min,音乐 24 min,这样,在成本最小的情况下,观众人数最多.

(5)模型分析与检验. 由于数据的收集有限,因而该模型的解决方案不一定是使 30 min 广告达到最大收益的广告策略. 如果能够进一步收集与分析观众人数与产品销售量之间的关系,就可以找出现有条件下的最优投入产出比,使汽车公司达到最大的收益.

(6)模型应用. 该模型适用于在一定的广告费用情况下如何分配节目时间,使观众人数最多的情况.

1.5.3　数学建模的意义

数学建模是数学学习的一种新方式,它为学生提供了自主学习的空间,有助于学生体验数学在解决实际问题中的价值和作用,体验数学与日常生活和其他学科的联系,体验综合运用知识和方法解决实际问题的过程,增强应用意识;有助于激发学生学习数学的兴趣,发展学生的创新意识和创造能力;有助于学生建立严谨的科学态度和不怕困难的科学精神;有助于培养学生勇于质疑和善于反思的习惯;有助于训练学生逻辑思维、发散性思维和开放性思考方式;有助于培养学生发现、提出、解决实际问题的能力.

参加大学生数模竞赛,可以培养学生相互协作的品质和能力,锻炼学生的抗压能力,增强学生快速获取信息和文献资料的能力,锻炼学生快速了解、掌握并运用新知识的技能,以及提升学生的写作技能和排版技术.

对于学生来说,参加全国大学生数学建模竞赛很可能是一生中的一件大事,将会是"一次参赛,终身受益"的好事,很可能会影响到有些学生的一生. 因为**该项竞赛能帮助学生提高创新能力、竞争力,培养优秀的品质,从某种意义上说是提前了解走上工作岗位后所需要的能力和品质.**

练习 1-5

某企业有下面四个投资机会.

项目 A:从第一年到第四年,每年年初投资,并于次年年末回收本利 115%;

项目 B:第三年年初投资,到第五年年末回收本利 125%,最大投资额不超过 50 万元;

项目 C:第二年年初投资,到第五年年末能回收本利 140%,最大投资额不超过 60 万元;

项目 D:五年内每年年初可购买公债,于当年年末归还,并加利息 6%.

企业现有资金 100 万元,问应如何确定给这些项目每年的投资额,使到第五年年末拥有的资金本利总额最大. 请你为企业建立最优投资方案的数学模型.

第 1 章自测题

一、填空题

1. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，那么 $f(2x+1)$ 的定义域为__________.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin 3x}{x^2+2x+3}=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin x+\dfrac{\sin x}{x}\right)=$__________.

4. 设 $x\to 0$ 时，$\ln(1-x)$ 与 $e^{ax}-1$ 是等价无穷小，则 $a=$__________.

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+2}{2x-1}=3$，则 $a=$__________，$b=$__________.

二、选择题

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在是函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续的(　　).

(A)必要条件　　(B)充分条件　　(C)充要条件　　(D)无关条件

2. 设 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$(　　).

(A)1　　(B)-1　　(C)0　　(D)不存在

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$(　　).

(A)0　　(B)$\dfrac{1}{2}$　　(C)1　　(D)3

4. 函数 $y=\dfrac{\tan x}{x}$ 间断点的个数为(　　).

(A)0 个　　(B)一个　　(C)有限多个　　(D)无穷多个

5. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 都存在，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内(　　).

(A)有界　　(B)无界　　(C)有最大值　　(D)有最小值

三、计算题

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}-\dfrac{n}{2}\right)$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x-1}, & 1<x\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 的连续性.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ ax+b, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3-\ln x, & 1<x\end{cases}$ 连续，求 a,b 的值.

4. 证明方程 $x^3+3x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根.

思政阅读园地

人民日报:数学到底有多重要

“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学.”2019年7月,科学技术部、教育部、中国科学院、国家自然科学基金委员会联合印发了《关于加强数学科学研究工作方案》.统计计算、模型算法……数学不只用于星空之上,也用于社会之中.为何要学数学?或许,这就是答案.

一、数学与航空航天

1. 世界上任何一枚火箭的设计制造都离不开一个公式

1903年,齐奥尔科夫斯基公式由俄国科学家康斯坦丁·齐奥尔科夫斯基提出.这个公式揭示了火箭飞行速度与火箭发动机喷气速度、火箭质量、燃料质量的关系.

2. 航天器何时发射是可以算出来的

航天器发射时间的限制条件繁多,包括光照条件、回收时间、交会对接等.通过建立每个限制条件和发射时间之间的计算公式,可分别算出相应的发射窗口,取其共同部分便是航天器最终的发射时间.

二、数学与国防安全

1. 定量化分析、建模用于现代化战争

大到战役指挥,小到作战方案,都需要进行定量化分析,建立模型,形成随机应变的作战指挥系统.其中概率统计、运筹学等数学分支发挥着重要作用.

2. 数论用于信息的“加密”与“解密”

公开密钥算法大多基于计算复杂度很高的难题,求解需要在高速计算机上耗费许多时日才能得到答案.这些方法通常来自数论.例如,RSA源于整数因子分解问题,DSA源于离散对数问题,而椭圆曲线密码学则基于与椭圆曲线相关的数学问题.

三、数学与生物医药

1. 生命现象可以通过数学模型研究

数学模型能定量描述生命物质运动过程,一个复杂的生物学问题借助数学模型能转变成数学问题,通过对数学模型的逻辑推理、求解和运算,就能够获得客观事物的有关结论,达到对生命现象进行研究的目的.

2. 用数学辅助精准医疗

浙江大学一团队通过数学模型和数学算法,不仅能重构病人腹部三维,还编成软件呈现给医生,帮助进行精准判断.他们还利用深度学习处理超声影像,同时加入旋转不变性等现代数学的概念,研制出基于超声影像的智能诊断系统的DE超声机器人.

四、数学与信息

1. 没有快速傅里叶变换，就没有当今互联网

在主要信息学科的建立和发展中，一些著名数学家往往成为相关领域的开创者. 没有快速傅里叶变换就没有当今互联网；谷歌的核心技术就依赖于大型矩阵特征值的快速算法.

2. 解决物联网中的关键科学问题

提出并发展具有原创性的理论和方法，给出具有实时性、精确性、智能性和鲁棒性的分布式网络算法，有助于解决以物联网为代表的网络优化与控制技术中的关键科学问题，包括网络资源的有效分配等.

五、数学与能源

1. 偏微分方程组、几何学关乎电的安全

很大一片地区联成由若干电网组成的大电网. 每个电网由若干发电厂支持，每个发电厂的生产过程都可用微分方程组描述，用高阶代数方程作为约束条件. 发电与供电、输电的安全问题涉及复杂的偏微分方程组、几何学等多方面数学问题.

2. 数学也能用于油气勘探

由于油气资源的勘探日益复杂，利用大型的计算机和先进的数学方法处理油气勘探地震资料，已经成为国内外油气勘探的最重要的手段.

六、数学与海洋

1. 大数据实现天气预报

动力系统、偏微分方程、随机微分方程、计算方法等研究方向在大气与海洋科学的研究中都有重要应用. 例如，深圳打造的海洋大数据系统，通过数据融合和交织分析，能给出指定区域的出行建议，并能预测台风登陆行径，为专家决策提供依据.

2. 数学模型可以预测海啸

数学模型通过估计海啸登陆的地点、海浪的高度，以及海浪前进的速度，为海啸预警系统提供支持. 更根本的是，数学科学有助于映射海底的地形，并根据不规则地布置在相隔数百英里的地方的独立海洋验潮仪的数据，推断大尺度波浪的行为.

七、数学与人工智能

1. 人工智能归根结底是算法

人工智能实际上是一个将数学、算法理论和工程实践紧密结合的领域，归根结底是算法. 也就是数学、概率论、统计学等各种数学理论的体现. 例如一个概率公式加上一个马尔可夫假设就可以做到简单的机器翻译和语音识别.

2. 数学让人工智能成为规范的科学

人工智能的综合性很强，机器识别、遗传算法、概率统计、数据科学、数值分析等都在人工智能领域起着重要的作用. 数学是这些分门别类知识的核心基础，数学让人工智能成了一门规范的科学.

八、数学与先进制造

1. CAD 的核心功能建立在计算几何等数学基础上

在数字化设计制造技术发展的每个关头，数学方法都起了关键作用. 例如，计算机辅助

设计(CAD)的核心功能，如曲面造型、参数化设计、协同设计等，直接建立在计算几何、计算代数几何、自动推理、运筹学等数学分支的基础上.

2. 用于高档数控机床的数控系统

数控系统是数控机床的“大脑”，是决定其性能的关键因素. 数控系统的若干核心技术，是实现高速、高精控制的基础. 这些问题可以归结为几何计算、非线性方程组求解与最优控制问题.

可以说，数学不以“有用”为研究的原点，但却是极为“有用”的学科. 数学的基础性、引领性使得它在科学研究中处于独一无二的核心地位，它对一个国家、一个民族的长远发展的影响是深远的、至关重要的. 长期以来，数学研究在发达国家的科学战略中始终居于最重要的地位. 因此，从长远来看，我们的国家要实现可持续发展不能缺少原创性的科学研究，不能缺少原创性的数学研究. 目前我国处于创新发展的关键时期，历史机遇难得. 为实现中华民族伟大复兴的中国梦，亟须更加重视数学的研究与教育，重建对数学的正确认识，希望有更多的优秀人才加入数学研究的队伍当中，探寻发现数学那不止于“有用”的独特魅力.