

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn



策划编辑 胡志平
责任编辑 胡思佳 柳卫清
封面设计 碧君

河北省普通高等学校对口招生考试数学复习指导

主编 李强 程长胜 杨立芬



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-29051-9



9 787313 290519 >

定价:65.00元

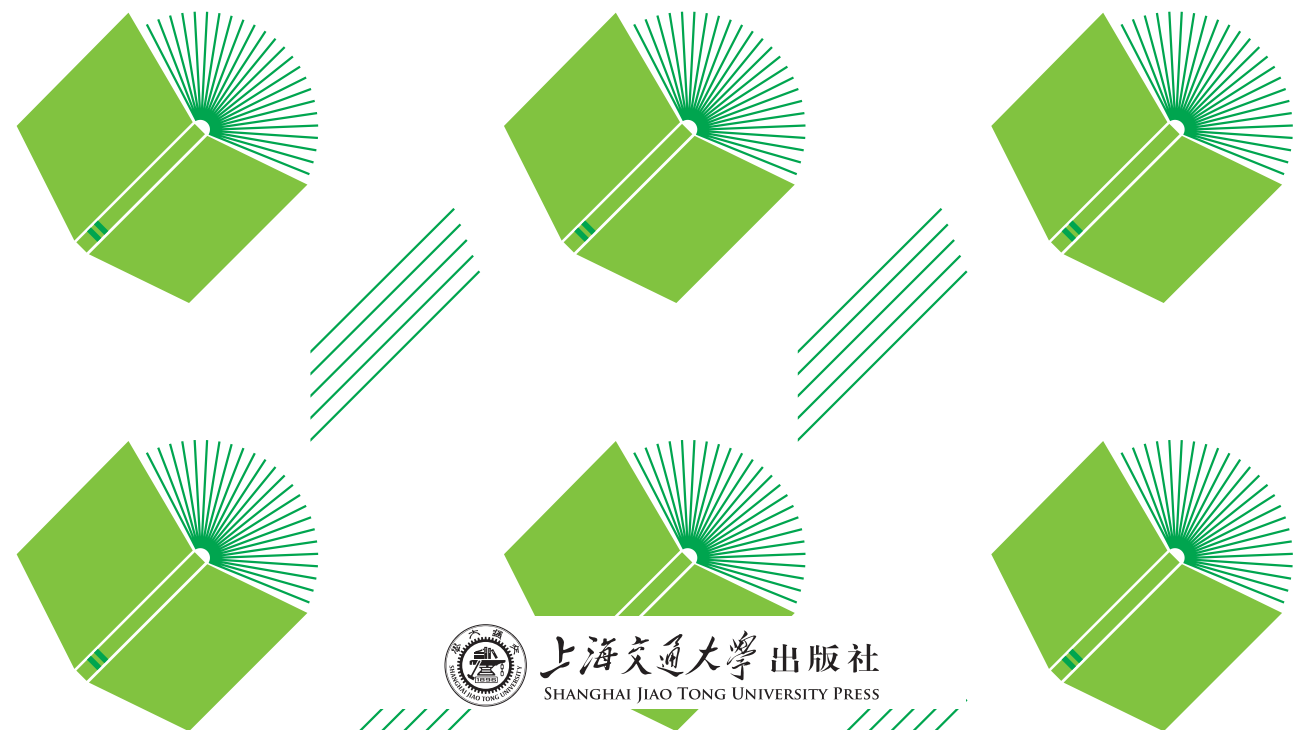
免费提供
精品教学资料包
服务热线:400-615-1233
www.huatengzy.com

河北省普通高等学校对口招生考试

数 学 复 习 指 导

赠册 参考答案及解析

主编 李强 程长胜 杨立芬

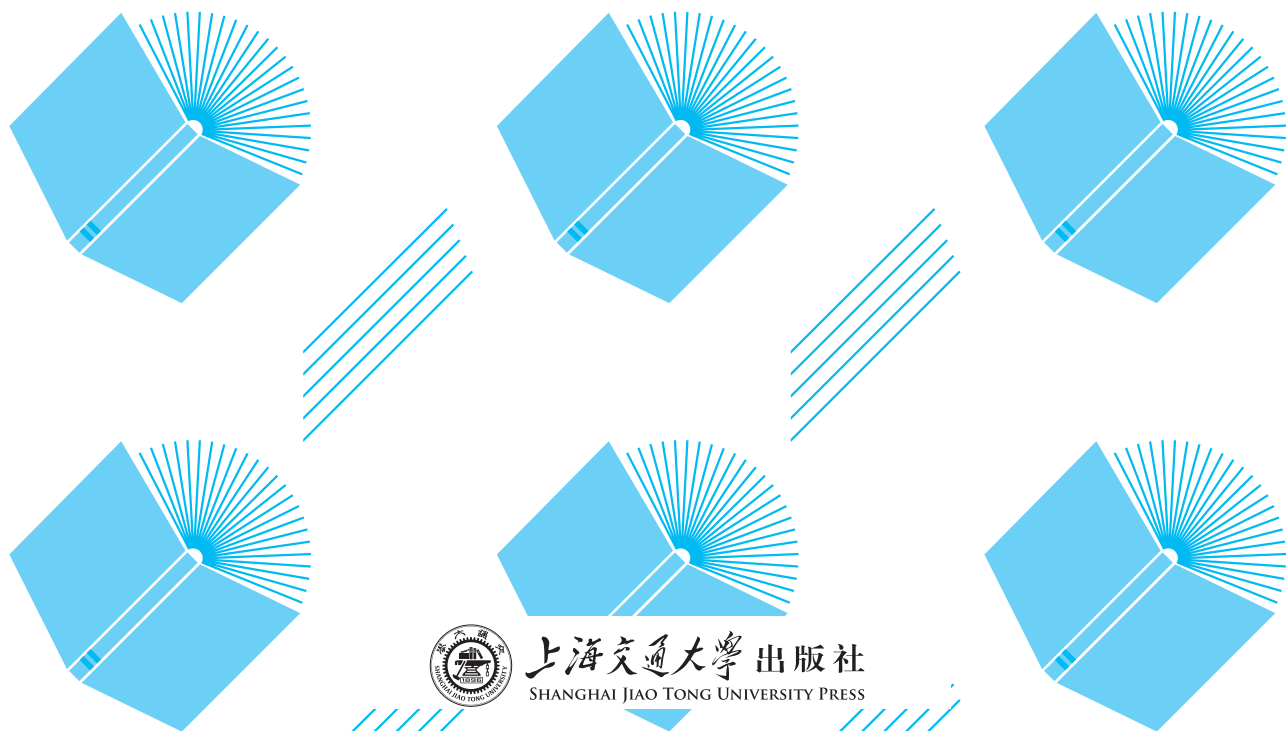


河北省普通高等学校对口招生考试

数 学

复 习 指 导

主 编 李 强 程长胜 杨立芬
副主编 刘忠诚



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



Preface

前言



通过多年的摸索与实践,河北省普通高等学校对口招生考试越来越规范有序.从考试内容和考试形式上来看,参加招生考试的考生将面临更大的挑战,多数考生都为如何在短期内熟悉考试形式、了解考试内容、把握考试重难点、弥补“短板”而备受困扰,亟须通过高效的学习来快速提升应试能力,从而在考试中脱颖而出.

为了帮助广大考生在较短的时间内高效、便捷、准确地把握考试的脉络,我们特组织多所一线院校的任课教师,根据考试科目的大纲要求,深入研究了近几年河北省普通高等学校对口招生考试的命题情况,针对命题中出现的最新变化,精心编写了这套河北省普通高等学校对口招生考试复习用书,供广大考生在复习时使用.

本书是该系列用书之《河北普通高等学校对口招生考试数学复习指导》.数学是对口升学考试的必考科目之一,其知识点较多、难度较大,也是考生备考的重点和难点所在.本书在编写时紧扣考试大纲,紧密结合真题,内容充实,结构严谨,要点突出,指导性强,是广大考生进行考试复习和储备知识的重要参考资料.

本书具有以下鲜明特色:

1. 编写阵容强大,熟知学情考情

编写成员均系河北省中等职业学校的骨干教师,他们始终工作在教学一线,常年从事中职毕业生对口招生的命题研究工作,对考试规律和命题形式有深入的研究,能够精准把握考试的命题趋势,在知识点的讲解和试题的选择上都具有权威性.

2. 立足考试大纲,全面服务考生

本书是为参加河北省普通高等学校对口招生考试的考生量身定做的复习用书.知识点的选取、题型、试题难度等设计均参照了历年考试真题和最新考试大纲,体现出考试特色,做到既能把握考试的命题特点,又能体现其发展趋势.

3. 编排合理,设计科学

本书对考点进行归纳和整理,使零散的知识形成有机的整体,从而使考生掌握知识规律和技能,找到解题方法.书中每章按照“知识结构”“考纲解读”“考情分析”“真题链接”“知识精讲”“典例解析”“巩固练习”的框架编写.

“知识结构”对本章知识点进行了总结.

“考纲解读”详细分析了考试大纲对每一知识点的要求.

“考情分析”对命题情况进行了分析.

“真题链接”从命题的角度对真题进行剖析,使考生准确把握考点,快速找到解题思路.

“知识精讲”对每一个知识点、考点进行了细致的讲解.

“典例解析”对典型例题进行分析,然后给出详细的解题思路.

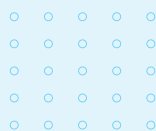
“巩固练习”针对考点知识设置了练习题,以帮助考生巩固所学知识,提高答题能力.

4. 配套齐全,全方位助力备考

本书配套有《河北普通高等学校对口招生考试数学同步提升训练》和《河北普通高等学校对口招生考试数学考前冲刺模拟卷》.衷心希望本套河北省普通高等学校对口招生考试复习用书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助.对书中的不足之处,敬请各位读者不吝指正.

最后,预祝广大考生在考试中取得好成绩!

编者



Contents 目录



第一章	集合	1
	第一节 集合的概念与集合之间的关系	2
	第二节 集合的运算	8
	第三节 充要条件	13
第二章	不等式	18
	第一节 不等式的基本性质与区间	19
	第二节 一元一次不等式	24
	第三节 一元二次不等式及分式不等式	31
	第四节 含绝对值的不等式	37
第三章	函数	41
	第一节 函数的概念及其表示	42
	第二节 函数的单调性	52
	第三节 函数的奇偶性	56
	第四节 二次函数的图像与性质	61
	第五节 函数的实际应用	66
第四章	指数函数与对数函数	74
	第一节 实数指数幂和幂函数	75
	第二节 指数函数	81
	第三节 对数及其运算	87
	第四节 对数函数	90
第五章	数列	99
	第一节 数列的概念	100
	第二节 等差数列	105
	第三节 等比数列	111
	第四节 等差数列与等比数列的应用	118
第六章	三角函数	121
	第一节 角的概念推广与弧度制	122
	第二节 任意角的三角函数	126

第三节	同角三角函数的基本关系式	130
第四节	诱导公式	133
第五节	三角函数的图像与性质	137
第六节	和角公式与倍角公式	142
第七节	正弦型函数的图像与性质	149
第八节	正弦定理和余弦定理	157

第七章 平面向量

第一节	平面向量的概念及线性运算	164
第二节	平面向量的坐标表示	170
第三节	平面向量的内积	174

第八章 平面解析几何

第一节	两点间的距离公式与线段中点的坐标	181
第二节	直线的方程	184
第三节	两条直线的位置关系	189
第四节	圆的方程	194
第五节	椭圆	200
第六节	双曲线	208
第七节	抛物线	215

第九章 立体几何

第一节	平面的基本性质	222
第二节	空间两条直线的位置关系	225
第三节	空间直线与平面的位置关系	230
第四节	空间平面与平面的位置关系	237

第十章 概率

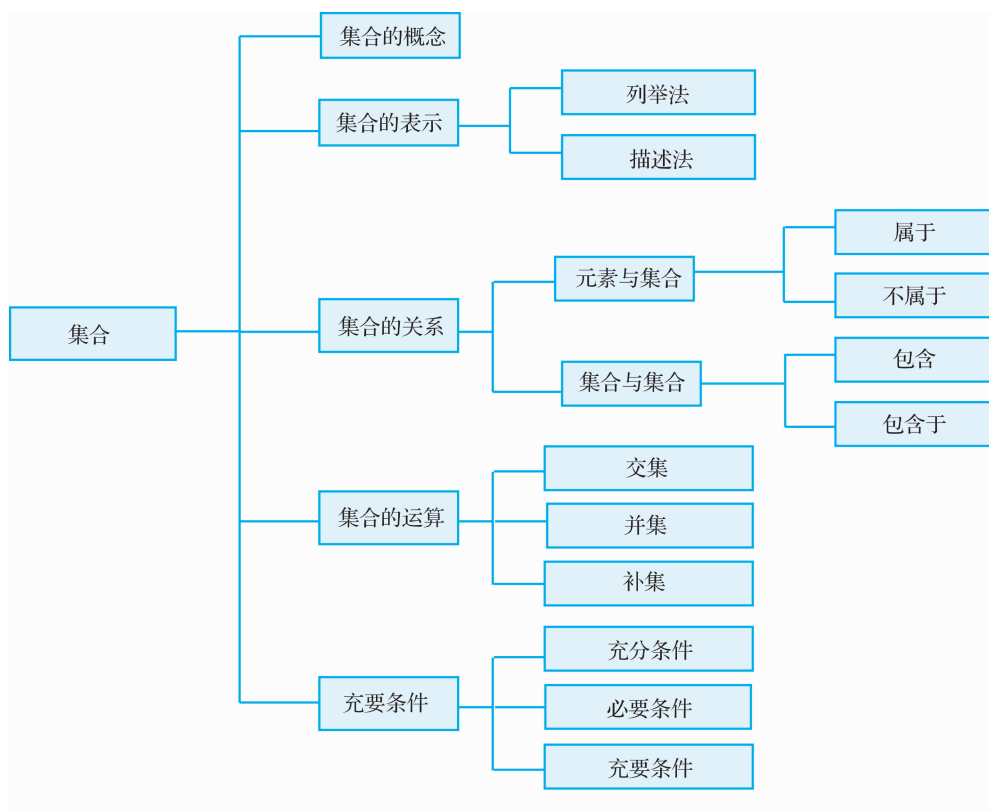
第一节	计数原理	248
第二节	排列与组合	251
第三节	二项式定理	257
第四节	随机事件与古典概型	262
第五节	离散型随机变量及其分布	268

第一章

集 合



知识结构



考纲解读

(1)理解集合的概念及其表示,了解空集和全集的含义;理解元素与集合的关系、集合与集合间的关系,并能正确应用有关的符号和术语;掌握交集、并集、补集的含义,并能进行简单的运算.

(2)理解必要条件和充分条件的概念.



考情分析

本章在历年高考题中多以选择题形式出现,难度不大,要求不高,主要从两个方面考查:一是考查集合的基本运算,命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主,多与不等式、绝对值等相结合;二是考查充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件的判定,多与函数等相结合.

第一节

集合的概念与集合之间的关系



真题链接

1. (2020·河北对口升学)下列集合中不是空集的是().

A. $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 0\}$

B. $\{x \mid x^2 + 4x + 5 = 0\}$

C. $\{x \mid e^x < 0\}$

D. \emptyset

答案:A

解析:选项 A 中,由 $|x| + |y| = 0$ 得 $x = 0, y = 0$,所以 $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 0\} = \{(0, 0)\} \neq \emptyset$. 选项 B 中,对于方程 $x^2 + 4x + 5 = 0, \Delta = 4^2 - 4 \times 5 < 0$,所以方程无解,即 $\{x \mid x^2 + 4x + 5 = 0\} = \emptyset$. 选项 C 中,由指数函数的性质可知 $e^x > 0$,所以 $\{x \mid e^x < 0\} = \emptyset$. 故选 A.

2. (2020·河北对口升学)若 $\{2a, a^2 + 1\}$ 为一个集合,则 a 的取值范围是_____. (用区间表示)

答案: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

解析:要使 $\{2a, a^2 + 1\}$ 为一个集合,应有 $2a \neq a^2 + 1$,即 $a^2 - 2a + 1 \neq 0$,解得 $a \neq 1$,所以 a 的取值范围是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. (2019·河北对口升学)设集合 $A = \{b, c, d\}$,则集合 A 的子集共有().

A. 5 个

B. 6 个

C. 7 个

D. 8 个

答案:D

解析:因为集合 A 中有 3 个元素,所以集合 A 的子集共有 $2^3 = 8$ (个),故选 D.

4. (2017·河北对口升学)已知集合 $A = \{x \mid kx^2 + 5x + 2 = 0\}$,若 $A \neq \emptyset$,且 $k \in \mathbf{N}$,求 k 的所有值组成的集合.

解:当 $k = 0$ 时, $A = \{x \mid 5x + 2 = 0\} = \left\{-\frac{2}{5}\right\} \neq \emptyset$.

当 $k \neq 0$ 时,若 $A \neq \emptyset$,则方程 $kx^2 + 5x + 2 = 0$ 有两个相等的实根或两个不等的实根,

故 $\Delta = 5^2 - 8k \geq 0$,解得 $k \leq \frac{25}{8}$.

又 $k \in \mathbf{N}$,且 $k \neq 0$,故 $k = 1, 2, 3$.

综上, k 的取值集合为 $\{0, 1, 2, 3\}$.



知识精讲

知识点一 集合的概念

1. 集合

将某些确定的对象看成一个整体就构成一个集合,简称为集,常用大写英文字母 A, B, C, \dots 表示.

2. 元素

组成集合的对象叫作这个集合的元素,常用小写英文字母 a, b, c, \dots 表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 集合的分类

(1)按元素个数分类:

- ①有限集:含有元素的个数有限的集合叫作有限集.
- ②无限集:含有元素的个数无限的集合叫作无限集.
- ③空集:不含任何元素的集合叫作空集,记作 \emptyset .

注意: \emptyset 不是 $\{0\}$.

(2)按元素的特征分类:数集、点集等.

5. 常用的集合

常用的集合有正整数集(\mathbf{N}_+ 或 \mathbf{N}^*)、自然数集(\mathbf{N})、整数集(\mathbf{Z})、有理数集(\mathbf{Q})、实数集(\mathbf{R}).

- (1)正整数集:所有正整数组成的集合叫作正整数集,记作 \mathbf{N}_+ 或 \mathbf{N}^* .
- (2)自然数集:所有自然数组成的集合叫作自然数集,记作 \mathbf{N} .
- (3)整数集:所有整数组成的集合叫作整数集,记作 \mathbf{Z} .
- (4)有理数集:所有有理数组成的集合叫作有理数集,记作 \mathbf{Q} .
- (5)实数集:所有实数组成的集合叫作实数集,记作 \mathbf{R} .

知识点二 集合的表示法

1. 列举法

将集合的元素一一列出,用逗号分隔,再用花括号括为一个整体,这种表示集合的方法叫作列举法.

注意: 用列举法表示集合时,要注意以下几点:

- (1)元素之间用逗号“,”隔开.
- (2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).
- (3)元素不能遗漏.
- (4)当集合中的元素较少时,用列举法比较简单;当集合中的元素较多或无限,但存在一定的规律时,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示.

2. 描述法

利用元素的特征性质来表示集合的方法称为描述法.

具体方法是:在花括号中画一条竖线,竖线的左侧写上集合的代表元素 x ,并标出元素的取值范围,竖线右侧写出元素所具有的特征性质.

注意: 用描述法表示集合时,要注意以下几点:

- (1)写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

(2) 写明集合中元素的特征或性质.

(3) 用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用“且”“或”等关联词.

(4) 所有描述的内容都要写在大括号内.

(5) 在不引起混淆的情况下,用描述法表示集合有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合 $\{x|x>1\}$ 就不能省略竖线及其左边的“ x ”.

知识点三 集合间的关系

1. 子集

一般地,对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,那么,集合 A 就叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

性质: (1) 任何一个集合是它本身的子集,即 $A \subseteq A$; (2) 空集是任何集合的子集,即 $\emptyset \subseteq A$; (3) 对集合 A, B, C , 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

注意: 不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为 A 的子集包括它本身,而这个子集由 A 的全体元素组成;空集也是 A 的子集,但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则 A 是 B 的真子集(A 包含于 B 但不等于 B), 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

性质: 空集是任何非空集合的真子集;对于集合 A, B, C , 若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.

注意: 元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3. 集合的相等

一般地,如果两个集合的元素完全相同,我们就说这两个集合相等,集合 A 等于集合 B , 记作 $A=B$ (A, B 的所有元素均相同).

注意: (1) 两个集合所含元素完全相同,即“集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素”.

(2) 要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集,则从“互为子集”入手进行判断.



典例解析

题型一 集合的概念

例 1 在下列每组对象中:

- (1) 我国著名的数学家;
- (2) 超过 10 的所有自然数;
- (3) 某校 2021 年新入学的高个子学生;
- (4) 方程 $x-1=0$ 的实数解;
- (5) 在直角坐标平面内,第二象限的所有点.

其中能构成集合的是().

- A. (1)(2)(3) B. (2)(3)(4) C. (2)(4)(5) D. (3)(4)(5)



解析 (1)“我国著名的数学家”不是一个明确的标准,不能构成一个集合;(3)“高个子学生”这一标准也不确定,无法判定某人是高还是矮,也不能构成集合;(2)(4)的对象是确定的;(5)的对象虽然有无限个,但它是确定的.因此选 C.



技巧点拨 判断某组对象能否构成集合,关键看对象是否为整体的和确定的.标准一定要是明确的,不能模糊,否则无法判断.



变式训练 1

下列语句中,能构成集合的是().

- A. 我班数学好的男生
B. 与 0 接近的全体实数
C. 大于 π 的自然数
D. 优秀的中等职业学校

题型二 集合与元素的关系及性质

例 2 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为().

- A. 9 B. 8 C. 5 D. 4



解析 由 $x^2 + y^2 \leq 3$ 可知, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. 又因为 $x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$, 所以 $x \in \{-1, 0, 1\}, y \in \{-1, 0, 1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9.



技巧点拨 对于求解集合中元素个数的题目,首先求出集合,然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数,或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.



变式训练 2

已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, 集合 $B = \{x | x = a + b, a \in A, b \in A\}$, 则集合 B 中元素的个数为_____.

题型三 集合的表示方法

例 3 用列举法表示下列集合.

- (1) $A = \{x | -2 < x < 5, x \in \mathbf{Z}\}$;
(2) $B = \{(x, y) | 2x + y = 5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.



解析 (1) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; (2) $B = \{(0, 5), (1, 3), (2, 1)\}$.



技巧点拨 掌握集合的两种表示方法.



变式训练 3

用描述法表示下列集合.


- (1) $\{11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$;


(2) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

题型四 元素与集合、集合与集合之间的关系

例 4 设集合 $A = \{0\}$, 下列结论正确的是().

- A. $A = 0$ B. $A \subseteq \emptyset$ C. $0 \in A$ D. $\emptyset \in A$

 **解析** 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.

 **技巧点拨** 正确理解符号 $\in, \notin, \subseteq, \supseteq$ 的意义, 是正确处理此类问题的关键.


变式训练 4

下列说法中, 正确的有().

- ①空集没有子集; ②任何集合至少有两个子集; ③空集是任何集合的真子集; ④若 $\emptyset \subsetneq A$, 则 $A \neq \emptyset$.
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

题型五 由集合之间的关系求未知数的值或范围

例 5 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.

 **解析** 由题意得: $A = \{-1, 2\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以 $B = \emptyset$ 或 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{-1, 2\}$.


又因为 $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 所以 $B = \{-1, 2\}$ 不成立.

当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (-4)^2 - 4p = 16 - 4p < 0$, 解得 $p > 4$;

当 $B = \{-1\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 16 - 4p = 0, \\ (-1)^2 - 4 \times (-1) + p = 0, \end{cases}$ 无解;

当 $B = \{2\}$ 时, $\Delta = 16 - 4p = 0, 2^2 - 4 \times 2 + p = 0$, 解得 $p = 4$.

综上, 实数 p 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

 **技巧点拨** 两个集合包含或相等关系的问题, 可通过建立方程(组), 然后解出未知数, 最后利用集合元素的特征进行检验求解.

变式训练 5

已知集合 $A = \{1, 1+m, 1+2m\}$, $B = \{1, n, n^2\}$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$, 若 $A = B$, 求 m, n 的值.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 下列命题所列对象中能组成集合的是 ()

- A. 好人 B. 非常小的数 C. 有趣的书 D. 小于 5 的数

2. 给出下面四个关系:① $0 \in \mathbf{Q}$;② $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$;③ $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$;④ $\emptyset \subseteq \{0\}$, 其中正确的个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

3. 用列举法表示集合 $\{x|x^2-3x+2=0\}$ 的结果是 ()

- A. $\{1,2\}$ B. 1,2 C. $\{1,2\}$ D. 以上都不是

4. 集合 $\{1,2,3,4\}$ 所有子集的个数是 ()

- A. 8 B. 14 C. 15 D. 16

5. 下列选项中表述正确的是 ()

- A. 由 1,3,5,7,5,3 组成的集合中有 6 个元素
 B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合
 C. 集合 $\{0\}$ 是空集
 D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

6. 用列举法表示“大于 2 且小于 9 的偶数的全体”构成的集合是 ()

- A. \emptyset B. $\{4,6,8\}$ C. $\{3,5,7\}$ D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in, \notin, \subseteq, \supseteq, =$)填空.

3 _____ $\{2,3\}$; π _____ \mathbf{Q} ; $\{1,2,3\}$ _____ \mathbf{Z} ;

\mathbf{N}^* _____ \mathbf{Z} ; $\{-3,3\}$ _____ $\{x|x^2=9\}$.

2. 绝对值等于 1 的所有整数组成的集合是_____.

3. 已知集合 $P = \{x|2 < x < a, x \in \mathbf{N}\}$, 且集合 P 中恰有 3 个元素, 则整数 $a =$ _____.

4. 下列六个关系式:① $\{a,b\} \subseteq \{b,a\}$;② $\{a,b\} = \{b,a\}$;③ $0 = \emptyset$;④ $0 \in \{0\}$;⑤ $\emptyset \in \{0\}$;⑥ $\emptyset \subseteq \{0\}$. 其中正确的个数为_____.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{0,1,2\}$, 集合 $B = \{x|x=ab, a \in A, b \in A\}$.

(1) 用列举法写出集合 B ;

(2) 判断集合 B 和集合 A 的关系.

2. 写出集合 $\{-3,-1,1,3\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

3. 已知集合 $\{1, a, b\}$ 与 $\{-1, -b, 1\}$ 是同一集合, 求实数 a, b 的值.

能力提升

已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | ax + 2 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值组成的集合.

第二节 集合的运算



真题链接

1. (2022 · 河北对口升学) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M = \{2, 4\}$, 则集合 M 的补集为 ().

- A. $\{3, 5\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{3, 4, 5\}$

答案: B

解析: 因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M = \{2, 4\}$, 所以集合 M 的补集为 $\{1, 3, 5\}$.

2. (2022 · 河北对口升学) 设集合 $A = \{(x, y) | y = 2x + 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x^2 + ax + 5\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

解: 因为 $A = \{(x, y) | y = 2x + 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x^2 + ax + 5\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 由 $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = x^2 + ax + 5, \end{cases}$ 化简得 $x^2 + (a-2)x + 4 = 0$, 所以方程无解, 即 $\Delta = (a-2)^2 - 16 < 0$, 解得 $-2 < a < 6$.

3. (2021 · 河北对口升学) 设集合 $P = \{x | -2 < x < 4\}$, $M = \{2, 3, 5\}$, 则 $P \cap M = ()$.

- A. $[2, 3]$ B. $\{2, 3\}$ C. $(2, 3)$ D. $\{3, 5\}$

答案: B

解析: $P = \{x | -2 < x < 4\}$, $M = \{2, 3, 5\}$, 由交集的定义得 $P \cap M = \{2, 3\}$, 故选 B.

4. (2021 · 河北对口升学) 设集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{R}$, 求 $\log_{2021}(a-b)$ 的值.

解: $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\} = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$. 因为 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{R}$, 所以 $B = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, 所以 -1 和 3 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两个根, $-a = -1 + 3 = 2$, 得 $a = -2$, $b = -1 \times 3 = -3$. $\log_{2021}(a-b) = \log_{2021} 1 = 0$.

5. (2020 · 河北对口升学) 设集合 $A = \{x | |x-2| > 3\}$, $B = \{x | mx + 1 > 0\}$, 若 $m \leq 0$, 求 $A \cap B$.

解: 由 $|x-2| > 3$ 得 $x < -1$ 或 $x > 5$, 故 $A = \{x | |x-2| > 3\} = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$.

若 $m = 0$, 则 $B = \mathbf{R}$, 故 $A \cap B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$.

若 $m < 0$, 则 $B = \{x | mx + 1 > 0\} = \left\{x \mid x < -\frac{1}{m}\right\}$.

当 $-\frac{1}{m} \leq 5$, 即 $m \leq -\frac{1}{5}$ 时, $A \cap B = \{x | x < -1\}$.

当 $-\frac{1}{m} > 5$, 即 $-\frac{1}{5} < m < 0$ 时, $A \cap B = \{x | x < -1 \text{ 或 } 5 < x < -\frac{1}{m}\}$.

6. (2019 · 河北对口升学) 设集合 $A = \{x | x^2 - x - 12 > 0\}$, $B = \{x | x + m \geq 1\}$, 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 求 m 的取值范围.

解: $A = \{x | x^2 - x - 12 > 0\} = \{x | x > 4 \text{ 或 } x < -3\}$, $B = \{x | x + m \geq 1\} = \{x | x \geq 1 - m\}$.

因为 $A \cup B = \mathbf{R}$, 所以 $1 - m \leq -3$, 解得 $m \geq 4$, 所以 m 的取值范围为 $[4, +\infty)$.

7. (2018 · 河北对口升学) 设集合 $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $N = \{x | 0 < x \leq 3\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$.

A. $\{1, 2\}$

B. $\{0, 1, 2\}$

C. $\{1, 2, 3\}$

D. $\{0, 1, 2, 3\}$

答案: C

解析: $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $N = \{x | 0 < x \leq 3\}$, 由交集的定义得 $M \cap N = \{1, 2, 3\}$, 故选 C.

8. (2018 · 河北对口升学) 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, $B = \{x | |x| \geq m\}$, 且 $A \cup B = A$, 求 m 的取值范围.

解: 由 $x^2 - x - 6 \geq 0$, 得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 3$, 所以 $A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$.

当 $m \leq 0$ 时, 由 $|x| \geq m$ 得 $B = \mathbf{R}$, 不合题意;

当 $m > 0$ 时, 由 $|x| \geq m$, 得 $x \leq -m$ 或 $x \geq m$, 所以 $B = \{x | x \leq -m \text{ 或 } x \geq m\}$.

因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$, 所以 $\begin{cases} -m \leq -2, \\ m \geq 3, \end{cases}$ 解得 $m \geq 3$.

所以 m 的取值范围是 $[3, +\infty)$.



知识精讲

1. 交集

一般地, 对于两个给定的集合 A, B , 由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合, 叫作集合 A 与集合 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

性质:

(1) $A \cap B = B \cap A$.

(2) $A \cap A = A$.

(3) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(4) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$.

(5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$.

2. 并集

一般地, 对于两个给定的集合 A, B , 由集合 A, B 的所有元素所组成的集合, 叫作集合 A 与集合 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

性质:

(1) $A \cup B = B \cup A$.

(2) $A \cup A = A$.

(3) $A \cup \emptyset = A$.

(4) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$.

(5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

- (1) 用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(图 1-1).
 (2) 借助数轴表示数集的交集、并集(图 1-2).

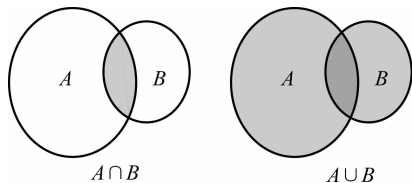


图 1-1

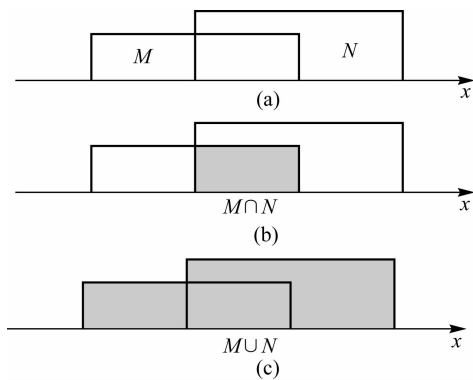


图 1-2

4. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,则称这个集合为全集,通常用 U 表示.

注意:全集是一个相对的概念,在不同的情况下全集的概念也不同.

5. 补集

如果集合 A 是全集 U 的子集,那么,由 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合叫作集合 A 在全集 U 中的补集,简称集合 A 的补集,记作 $\complement_U A$,读作“ A 在 U 中的补集”.即 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

性质:

- (1) $\complement_U (\complement_U A) = A$.
- (2) $\complement_U \emptyset = U, \complement_U U = \emptyset$.
- (3) $A \cup (\complement_U A) = U$.
- (4) $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$.



典例解析

题型一 集合的运算

例 1 (1) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

- A. $\{3\}$ B. $\{3, 4\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(2) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

- A. \emptyset B. $\{2, 3\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$


(3) 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, a\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.



解析 (1) $A \cup B$ 是由集合 A 和集合 B 中所有元素组成的, 因为 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. 故选 D.

(2) $A \cap B$ 是由集合 A 和集合 B 中相同的元素组成的, 集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 3\}$. 故选 B.

(3) 根据并集运算可知 $a=4$.

 **技巧点拨** 弄清交集与并集之间的关系.

变式训练 1


(1) 设集合 $A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.


A. $\{0,1,2\}$ B. $\{1,3\}$ C. $\{1\}$ D. $\{0,1,2,3\}$

(2) 设集合 $A=\{0,1\}$, $B=\{-1,0\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

A. \emptyset B. $\{0\}$
C. $\{-1,0,1\}$ D. $\{0,1\}$

例 2 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|0 \leq x < 2\}$, 集合 $B=\{x|x^2-2x-3 < 0\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U A \cap B$.

 **解析** $B=\{x|x^2-2x-3 < 0\}=\{x|-1 < x < 3\}$, $\complement_U A=\{x|x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x|0 \leq x < 2\}$, $A \cup B = \{x|-1 < x < 3\}$, $\complement_U A \cap B = \{x|-1 < x < 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$.


 **技巧点拨** 考查对集合运算的理解及性质的运用.

变式训练 2

设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{0,1,2,3\}$, 集合 $B=\{2,3,4\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$.

题型二 由交、并、补确定未知量的范围

例 3 已知集合 $M=\{x|a \leq x \leq a+3\}$, $N=\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

 **解析** 如图 1-3 所示, 要使 $M \cap N = \emptyset$, 必须满足 $\begin{cases} a+3 \leq 5, \\ a \geq -1, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a \leq 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $\{a|-1 \leq a \leq 2\}$.

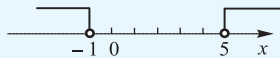



图 1-3

 **技巧点拨** 解题时利用数轴表示集合, 便于寻求满足条件的实数 a . 特别需要注意的是“端点值”的问题, 是能取“=”还是不能取“=”.



变式训练 3

已知 $A = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -6\}$.

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{2\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{2, 3, 4, 6, 8\}$ D. $\{3, 6, 8\}$

2. 已知集合 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A = \{1, 5, 7\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

A. $\{1, 3\}$ B. $\{3, 7, 9\}$ C. $\{3, 5, 9\}$ D. $\{3, 9\}$

3. 设集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

A. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ B. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$

C. $\{x | x > -2\}$ D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 1\}$

4. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 B 满足 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则集合 B 的个数为 ()

A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

5. 设集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\}$, 则 $A \cup B$ 等于 ()

A. $\{x | x \geq 3\}$ B. $\{x | x \geq 2\}$ C. $\{x | 2 \leq x < 3\}$ D. $\{x | x \geq 4\}$

6. 集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$. 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题

1. 已知集合 $A = \{x | |x| > 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x + y = 1\}$, $B = \{(x, y) | 2x - y = 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

3. 已知集合 $A = \{x | x + 1 > 0\}$, $B = \{x | 3x - 6 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{1, 5\}$, $B = \{1, 2, x^2 - 1\}$, 若 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, 求 x 及 $A \cap B$.

2. 设全集 $U = \{0, 1, 2, 5, 7\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 5\}$, 集合 $B = \{2, 5, 7\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cup \complement_U B$.

3. 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}, B = \{a-5, 1-a, 9\}$, 若 $A \cap B = \{9\}$, 求 a 的值.

能力提升

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - px + 16 = 0\}, B = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$, 且 $A \cap B = \{2\}$, 求 $A \cup B$.

2. 已知集合 $A = \{y | y = x^2 - 2x + 5, y \in \mathbf{N}\}, B = \{y | y = -x^2 - 4x + 10, y \in \mathbf{N}\}$, 求 $A \cap B$ 中所有元素的和.

第三节 充要条件



真题链接

1. (2022 · 河北对口升学)“四边形是平行四边形”是“四边形是菱形”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案: B

解析: 由“四边形是平行四边形”不能得到“四边形是菱形”, 而“四边形是菱形”可以得到“四边形是平行四边形”, 故“四边形是平行四边形”是“四边形是菱形”的必要不充分条件.

2. (2021 · 河北对口升学)“ $a=b$ ”是“ $|a|=|b|$ ”的().

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案:B

解析:“ $|a|=|b|$ ”等价于“ $a=b$ 或 $a=-b$ ”,所以“ $a=b$ ”是“ $|a|=|b|$ ”的充分不必要条件,故选 B.

3. (2020·河北对口升学) 设 A, B 为两个集合, 则“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cap B = A$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

答案:C

解析:若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$; 反之, 若 $A \cap B = A$, 则 A 是 B 的子集, 即 $A \subseteq B$.

所以“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cap B = A$ ”的充要条件. 故选 C.

4. (2019·河北对口升学) 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\sin A = \sin B$ ”是“ $A = B$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

答案:C

解析:在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\sin A = \sin B$ 可得 $A = B$. 同时, 由 $A = B$ 可得 $\sin A = \sin B$.

所以“ $\sin A = \sin B$ ”是“ $A = B$ ”的充要条件, 故选 C.

5. (2018·河北对口升学) “ $|x| > 2$ ”是“ $x > 2$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

答案:B

解析:“ $|x| > 2$ ”等价于“ $x < -2$ 或 $x > 2$ ”, 所以“ $|x| > 2$ ”是“ $x > 2$ ”的必要不充分条件, 故选 B.



知识精讲

1. 充要条件的定义

(1) 对于两个命题 p, q , 如果有 $p \Rightarrow q$, 则称 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

注意: p 是 q 的充分条件是指只要具备了条件 p , 那么 q 就一定成立, 即命题中的条件是充分的; q 是 p 的必要条件是指如果不具备条件 q , 则 p 就不能成立, 即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2) 如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 即 $p \Leftrightarrow q$, 则 p 是 q 的充分且必要条件, 简称充要条件.

注意: ①当 $p \Leftrightarrow q$ 时, 也称 p 与 q 是等价的.

②与充要条件等价的词语有“当且仅当”“等价于”“有且只有”“反过来也成立”等.

2. 充要条件的判断方法

(1) 从逻辑推理关系上判断(定义法).

- ①若 $p \Rightarrow q$ 但 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件.
②若 $p \not\Rightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要不充分条件.
③若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件.
④若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2) 从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法). 设命题 p 对应的集合为 A , 命题 q 对应的集合为 B .

- ①若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件.
②若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的必要条件.
③若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$, 即 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件.
④若 $A \not\subseteq B$ 且 $A \not\supseteq B$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.



基础巩固

一、选择题

1. “ $x < -2$ ”是不等式“ $x^2 - 4 > 0$ ”成立的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. “ $A \cap B = A$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 设甲是乙的充分不必要条件,乙是丙的充要条件,丁是丙的必要不充分条件,则甲是丁的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. “ $|x| \geq 1$ ”是“ $x \geq 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. “ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $\tan \alpha = 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 命题“ $x = 3$ ”是命题“ $x^2 = 9$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

1. “ $x \in \mathbf{N}$ ”是“ $x \in \mathbf{Z}$ ”的_____条件.
 2. “ $x = 0$ 或 $y = 0$ ”是“ $xy = 0$ ”的_____条件.
 3. “ $ab = 0$ ”是“ $a^2 + b^2 = 0$ ”的_____条件.
 4. “ $x = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $y = \sin 2x$ 取得最大值”的_____条件.

三、解答题

1. 判断下列问题中, p 是 q 的什么条件?
 (1) $p: x^2 \geq y^2, q: x \geq y$;
 (2) $p: x \in A \cup B, q: x \in A \cap B$;
 (3) $p: x > 3, q: x > 2$;
 (4) $p: a$ 是有理数, $q: a + 2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2 - ax + 1 > 0$ 成立的充要条件.

能力提升

1. 已知 p 是 q 的充分不必要条件, s 是 r 的必要不充分条件, p 是 s 的充要条件, 则 q 是 r 的 _____ 条件.

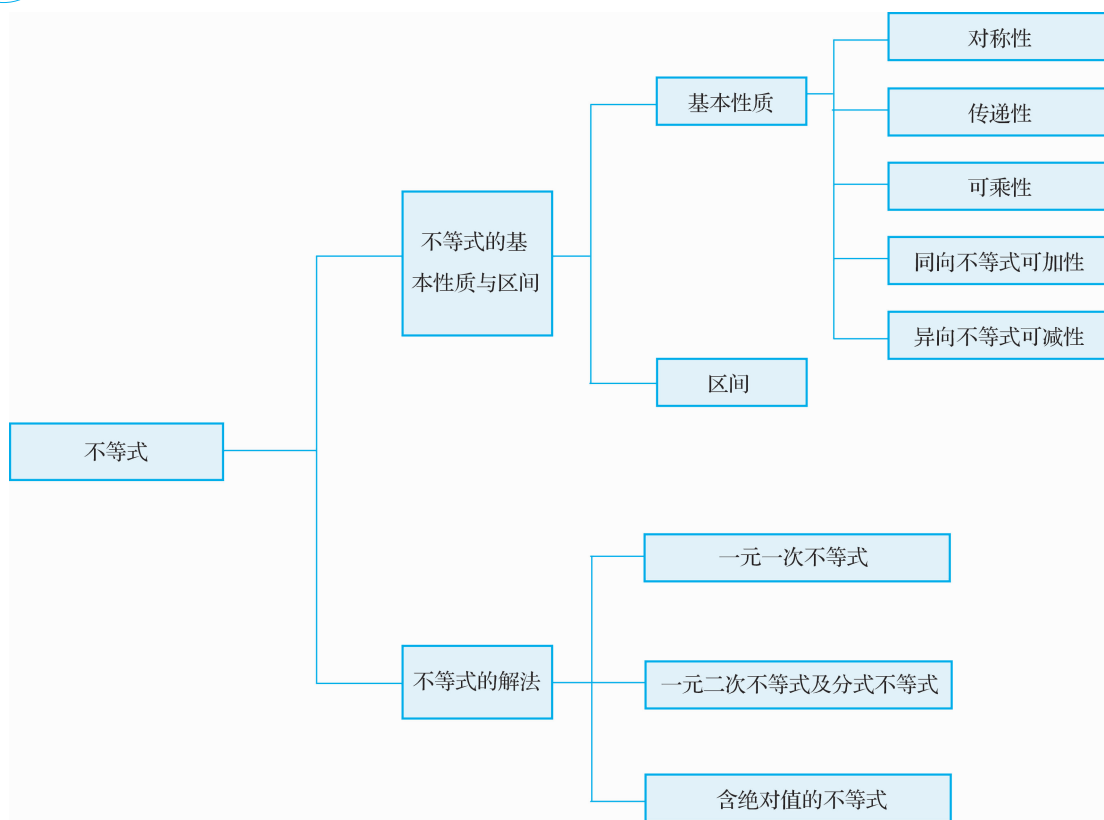
2. 已知 $p: -2 \leq x \leq 10, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

第二章

不等式



知识结构





考纲解读

- (1) 了解不等式的性质.
- (2) 理解区间的含义.
- (3) 掌握一元一次不等式、一元二次不等式及含绝对值的不等式(如: $|ax+b|<c$) 的解法, 在此基础上, 会解其他的一些简单的不等式.
- (4) 能够利用一元一次不等式解决一些简单的实际问题.



考情分析

本章内容在历年真题中多以选择题形式出现, 要求不高, 难度不大. 不等式主要从三个方面进行考查: 一是考查不等式的基本性质; 二是考查一元二次不等式、含绝对值不等式的解法, 会用集合、区间表示不等式的解集; 三是从实际问题中抽象出一元一次、一元二次不等式模型解决简单的实际问题.

第一节 不等式的基本性质与区间



真题链接

1. (2022 · 河北对口升学) 设 a, b 为实数, 且 $a < b < 0$, 则下列不等式成立的是().

A. $a^2 < b^2$

B. $|a| < |b|$

C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

D. $-a > -b$

答案: D

解析: 根据不等式的基本性质可知 D 正确.

2. (2021 · 河北对口升学) 设 a, b, c 为实数, 且 $a > b$, 则().

A. $ac^2 \geq bc^2$

B. $\ln a > \ln b$

C. $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$

D. $|a| > |b|$

答案: A

解析: 已知 a, b, c 为实数, 且 $a > b$, 则 $c^2 \geq 0$, 所以 $ac^2 \geq bc^2$, 故选 A.

3. (2020 · 河北对口升学) 设 $0 < a < b$, 则下列式子恒成立的是().

A. $3a > b$

B. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

C. $\sin a < \sin b$

D. $\cos a < \cos b$

答案: B

解析: 因为 $x > 0$ 时, $y = \sqrt{x}$ 是增函数, 所以 $0 < a < b$ 时, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, 即选项 B 正确. 故选 B.

4. (2019 · 河北对口升学) 若 $a^2 < b^2$, 则下列不等式成立的是().

A. $a < b$

B. $2^a < 2^b$

C. $\log_2(b^2 - a^2) > 0$

D. $|a| < |b|$

答案:D

解析:当 $a^2 < b^2$ 时,解不等式可得 $|a| < |b|$,故选 D.

5. (2018·河北对口升学)若 a, b, c 为实数,且 $a > b$,则().

A. $a - c > b - c$ B. $a^2 > b^2$ C. $ac > bc$ D. $ac^2 > bc^2$

答案:A

解析:当 $a > b$ 时,由不等式的性质可知, $a - c > b - c$,故选 A.



知识精讲

知识点一 不等式的基本性质

1. 实数的大小比较

(1)作差比较法.

对于任意两个实数 a, b ,

$$\textcircled{1} a - b > 0 \Leftrightarrow a > b;$$

$$\textcircled{2} a - b = 0 \Leftrightarrow a = b;$$

$$\textcircled{3} a - b < 0 \Leftrightarrow a < b.$$

(2)一般步骤:①作差;②变形(化为能判断正负的数或式子);③判断(正、负或零);④结论.

2. 不等式的基本性质

性质 1:如果 $a > b$,并且 $b > c$,那么 $a > c$.

性质 2:如果 $a > b$,那么 $a + c > b + c$.

性质 3:如果 $a > b, c > 0$,那么 $ac > bc$;如果 $a > b, c < 0$,那么 $ac < bc$.

推论:(1) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$. (同向不等式可加性)

(2) $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$. (异向不等式可减性)

(3) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

(4) $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}; a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$.

知识点二 区间

1. 有限区间

数轴上两点间的一切实数所组成的集合叫作区间,其中,这两个点叫作区间端点.

设 a, b 是实数,且 $a < b$,

满足 $a < x < b$ 的实数的全体,叫作开区间,记作 (a, b) .

满足 $a \leq x \leq b$ 的实数的全体,叫作闭区间,记作 $[a, b]$.

满足 $a \leq x < b$ 的实数的全体,叫作右半开区间,记作 $[a, b)$.

满足 $a < x \leq b$ 的实数的全体,叫作左半开区间,记作 $(a, b]$.

2. 无限区间

其中符号“ $+\infty$ ”读作“正无穷大”;符号“ $-\infty$ ”读作“负无穷大”.

满足 $x < b$ 的全体实数,可记作 $(-\infty, b)$.

满足 $x \leq b$ 的全体实数,可记作 $(-\infty, b]$.

满足 $x > a$ 的全体实数,可记作 $(a, +\infty)$.

满足 $x \geq a$ 的全体实数,可记作 $[a, +\infty)$.



典例解析

题型一 用作差法比较大小

例 1 试比较 $2x^2 - 3x + 7$ 与 $x^2 + x + 2$ 的大小.



解析 (作差法) $2x^2 - 3x + 7 - (x^2 + x + 2) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$.

因此 $2x^2 - 3x + 7 > x^2 + x + 2$.



技巧点拨 本题考查比较代数式大小的方法. 作差法是判断两个数(或代数式)大小的基本方法之一,在比较代数式大小的时候要注意变量的取值范围.



变式训练 1

比较下列各式的大小.

(1) $(a+1)(a+3)$ 和 $(a-1)(a+5)$;

(2) $a^2 + 10$ 和 $6a$.



题型二 不等式的基本性质的应用

例 2 下列命题中正确的是().

A. 若 $a > b$, 则 $ac > bc$

B. 若 $a > b$, 且 $c > d$, 则 $a + d > b + c$

C. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$

D. 若 $a > b$, 且 $c > d$, 则 $ac > bd$



解析 对于本题选项 A, 若 $c = 0$, 则 $ac = bc = 0$, A 选项不成立; 对于选项 B 和选项 D, 可以通过特殊值来判断, 令 $a = 0, b = -1, c = -2, d = -3$, 可排除选项 B 和 D. 本题选项 C 正确.



技巧点拨 解答此类题目, 要注意不等式性质的正确应用, 同时也要考虑其他知识. 另外也可用特殊值法来判断.



变式训练 2

设 $a > b > c > 1$, 则下列不等式中不正确的是().

A. $a^c > b^c$

B. $\log_a b > \log_a c$

C. $c^a > c^b$

D. $\log_b c < \log_a c$

例 3 已知 $6 < a < 10, 2 < b < 3$, 求 $a+b, a-b, ab, \frac{a}{b}$ 的取值范围.

解析 $a+b, ab$ 的取值范围可直接利用不等式的同向可加性和同向可乘性求得. 对 $a-b$ 和 $\frac{a}{b}$ 的取值范围, 应先求出 $-b$ 和 $\frac{1}{b}$ 的取值范围.

根据不等式的同向可加性可知 $8 < a+b < 13$; 根据不等式的同向可乘性可知 $12 < ab < 30$;

因为 $2 < b < 3$, 所以 $-3 < -b < -2$.

又因为 $6 < a < 10$, 所以 $6-3 < a-b < 10-2$, 即 $3 < a-b < 8$.

又因为 $\frac{1}{3} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{6}{3} < \frac{a}{b} < \frac{10}{2}$, 即 $2 < \frac{a}{b} < 5$.

技巧点拨 利用不等式的性质求取值范围一定要熟练掌握不等式的性质, 特别是同向可加性和同向可乘性.



变式训练 3

已知 $-1 < x+y < 4$ 且 $2 < x-y < 3$, 求 $z=2x-3y$ 的取值范围.

题型三 区间的应用

例 4 已知全集为实数集 \mathbf{R} , 集合 $A=(-\infty, 4), B=[1, 6)$, 求: (1) $A \cup B, A \cap B$; (2) $\complement_{\mathbf{R}}A, \complement_{\mathbf{R}}B$; (3) $B \cap \complement_{\mathbf{R}}A$.

解析 集合 A, B 在数轴上表示如图 2-1 所示:

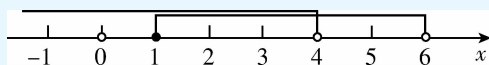


图 2-1

由图可看出:

(1) $A \cup B = (-\infty, 6), A \cap B = [1, 4)$.

(2) $\complement_{\mathbf{R}}A = [4, +\infty), \complement_{\mathbf{R}}B = (-\infty, 1) \cup [6, +\infty)$.

(3) $B \cap \complement_{\mathbf{R}}A = [4, 6)$.

技巧点拨 由此题可以看出, 集合用区间表示会更方便.



变式训练 4

设 $U=\mathbf{R}, A=(-1, 3], B=[1, 4]$. 用区间表示 $A \cup B, A \cap B$.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 如果 $a > b, b > c, c \geq n$, 则下列各项中正确的是 ()
 A. $a < n$ B. $a \leq n$ C. $a > n$ D. $a \geq n$
2. 如果 $a < b$, 则下列各项中正确的是 ()
 A. $a - c > b - c$ B. $ac < bc$ C. $ac > bc$ D. $a - c < b - c$
3. 下列命题正确的是 ()
 A. $a > b, c > d \Rightarrow ac > bd$ B. $ac < bc \Rightarrow a < b$
 C. $a > b \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}^*)$ D. $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
4. “ $cd > 0$ ”是“ $c > 0$ 且 $d > 0$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = (-\infty, 3]$, 则 $\complement_U A =$ ()
 A. $(-\infty, 3]$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$
6. 设集合 $M = [-3, 2)$, 集合 $N = (0, 5)$, 则 ()
 A. $M \cup N = [-3, 5)$ B. $M \cap N = \emptyset$ C. $M \cup N = \mathbf{R}$ D. $M \cap N = [0, 2)$

二、填空题

1. 若 $a < -2a$, 则 a _____ 0, 若 $a > 2a$, 则 a _____ 0.
 2. 若 $a > b, c + 1 < 0$, 则 ac _____ bc, ac^2 _____ bc^2 .
 3. 比较大小: $\frac{7}{9}$ _____ $\frac{7}{11}, \frac{5}{8}$ _____ $\frac{8}{11}, a^2$ _____ 0.
 4. 集合 $\{x | 1 < x \leq 3\}$ 用区间表示为 _____.
 集合 $\left\{x \mid x \neq \frac{3}{5}\right\}$ 用区间表示为 _____.

三、解答题

1. 试比较 $2a^2 - 3a + 6$ 与 $a^2 + a + 1$ 的大小.
2. 已知 $a > 0$ 时, 比较 $\frac{a}{a+1}$ 与 $\frac{a+1}{a+2}$ 的大小.

能力提升

1. 如果 $m < n, m \neq 0, n \neq 0$, 那么 ()
 A. $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ B. $\frac{1}{m} = \frac{1}{n}$
 C. $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ D. $\frac{1}{m}$ 和 $\frac{1}{n}$ 的大小关系不能确定

2. 已知全集为 \mathbf{R} , $A=[-2,5)$, $B=(-\infty,3)$, 求:

(1) $\complement_{\mathbf{R}}A$, $\complement_{\mathbf{R}}B$; (2) $\complement_{\mathbf{R}}A \cup \complement_{\mathbf{R}}B$; (3) $\complement_{\mathbf{R}}A \cap \complement_{\mathbf{R}}B$.

第二节 一元一次不等式

知识精讲

1. 一元一次不等式

经过去分母、去括号、移项、合并同类项等变形后,能化为 $ax < b$ 或 $ax > b$ 或 $ax \leq b$ 或 $ax \geq b$ 的形式,其中 x 是未知数, a, b 是已知数,并且 $a \neq 0$,这样的不等式叫作一元一次不等式.

$ax < b$ 或 $ax > b$ 或 $ax \leq b$ 或 $ax \geq b$ ($a \neq 0$) 叫作一元一次不等式的标准形式.

2. 解一元一次不等式(组)

去分母 \rightarrow 去括号 \rightarrow 移项 \rightarrow 合并同类项(化成 $ax < b$ 或 $ax > b$ 的形式) \rightarrow 系数化为 1(化成 $x < \frac{b}{a}$ 或 $x > \frac{b}{a}$ 的形式).

一般地,几个一元一次不等式的解集的公共部分,叫作由它们组成的一元一次不等式组的解集.

解一元一次不等式组的一般步骤如下:

(1) 求出这个不等式组中各个不等式的解集.

(2) 利用数轴求出这些不等式的解集的公共部分,即可求出这个不等式组的解集.

注意:

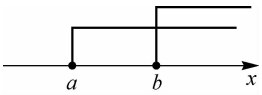
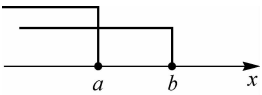
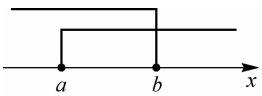
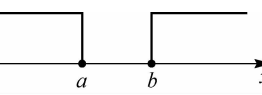
(1) 利用数轴表示不等式的解集时,要注意表示数的点的位置上是空心圆圈,还是实心圆点.

(2) 若不等式组中各个不等式的解集没有公共部分,则这个不等式组无解.

3. 由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集的情况

由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集的情况见表 2-1.

表 2-1

不等式组 ($a < b$)	图 示	解 集	口 诀
$\begin{cases} x \geq a \\ x \geq b \end{cases}$		$x \geq b$	同大取大
$\begin{cases} x \leq a \\ x \leq b \end{cases}$		$x \leq a$	同小取小
$\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$		$a \leq x \leq b$	大小、小大中间找
$\begin{cases} x \leq a \\ x \geq b \end{cases}$		空集	小小、大大找不到



典例解析

题型一 解一元一次不等式(组)

例 1 一元一次不等式 $3x+9>0$ 的解集是().

- A. $\{x|x \geq 3\}$ B. $\{x|x \geq -3\}$
C. $\{x|x > -3\}$ D. $\{x|x > 3\}$



解析 不等式通过整理为 $x > -3$, 因此选 C.



技巧点拨 掌握不等式移项, 正负号要改变.



变式训练 1

一元一次不等式 $8-2x>0$ 的解集是().

- A. $\{x|x \leq 4\}$ B. $\{x|x \leq -4\}$
C. $\{x|x < 4\}$ D. $\{x|x < -4\}$

例 2 解不等式组 $\begin{cases} x+2 \leq 0, \\ x-3 < 0. \end{cases}$



解析 由 $x+2 \leq 0$ 得 $x \leq -2$, 由 $x-3 < 0$ 得 $x < 3$, 故 $x \leq -2$.



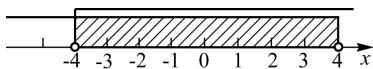
技巧点拨 掌握不等式组“同小取小”.

变式训练 2

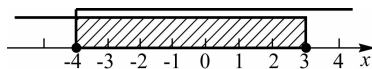
不等式组 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} \leq 3x, \\ \frac{2x+3}{2} \geq 9x \end{cases}$ 的解集为().

- A. $\{x \mid x \leq \frac{3}{16}\}$ B. $\{x \mid x \leq -\frac{1}{5}\}$ C. $\{x \mid \frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{16}\}$ D. $\{x \mid -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{16}\}$

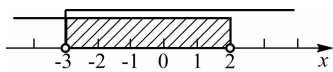
例 3 不等式组 $\begin{cases} x+1 > -2, \\ 3-x \geq 1 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示为().



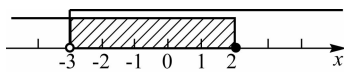
A



B



C



D

解析 根据不等式组可得 $-3 < x \leq 2$. 答案选 D.

技巧点拨 掌握数形结合思想.

变式训练 3

解不等式 $5x+1 \geq 6-3(x-1)$, 并把解集在数轴上表示出来.

题型二 一元一次不等式(组)与其他知识相结合

例 4 命题“ $x \geq 3$ ”是命题“ $16-2x \leq 0$ ”的().

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

解析 本题考查简易逻辑的判断方法. 答案选 C.

技巧点拨 掌握不等式小范围能推出大范围, 大范围不能推出小范围.

变式训练 4


命题“ $2x \geq 0$ ”是命题“ $x=1$ ”的().

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

题型三 一元一次不等式(组)的实际应用

例 5 某商店 5 月 1 日举行促销优惠活动,当天到该商店购买商品有两种方案.方案一:用 168 元购买会员卡成为会员后,凭会员卡购买商店内任何商品,一律按商品价格的 8 折优惠;方案二:若不购买会员卡,则购买商店内任何商品,一律按商品价格的 9.5 折优惠.已知小敏 5 月 1 日前不是该商店的会员.

- (1)若小敏不购买会员卡,所购买商品的价格为 120 元时,实际应支付多少元?
- (2)请帮小敏算一算,所购买商品的价格在什么范围内时,采用方案一更合算?

 **解析** (1) $120 \times 0.95 = 114$ (元).

故实际应支付 114 元.

(2)设购买商品的价格为 x 元,由题意得


$$0.8x + 168 < 0.95x, \text{解得 } x > 1\ 120.$$

故当购买商品的价格超过 1 120 元时,采用方案一更合算.

变式训练 5

为了举行班级晚会,孔明准备去商店购买 20 个乒乓球做道具,并买一些乒乓球拍作奖品,已知乒乓球每个 1.5 元,球拍每个 22 元,如果购买金额不超过 200 元,且买的球拍尽可能多,那么孔明应该买多少个球拍?

例 6 我市某化工厂现有甲种原料 290 千克,乙种原料 212 千克,计划利用这两种原料生产 A, B 两种产品共 80 件,生产一件 A 产品需要甲种原料 5 千克,乙种原料 1.5 千克;生产一件 B 产品需要甲种原料 2.5 千克,乙种原料 3.5 千克,该化工厂现有的原料能否保证生产顺利进行?若能的话,有几种方案?请你设计出来.

 **解析** 设生产 A 产品 x 件,则生产 B 产品 $(80-x)$ 件,依题意得

$$\begin{cases} 5x + 2.5(80-x) \leq 290, \\ 1.5x + 3.5(80-x) \leq 212, \end{cases} \text{解得 } 34 \leq x \leq 36.$$


因为 x 为整数,所以 x 能取值 34, 35, 36, 故有三种生产方案.

方案一:生产 A 产品 34 件,则生产 B 产品 $80-34=46$ (件);

方案二:生产 A 产品 35 件,则生产 B 产品 $80-35=45$ (件);

方案三:生产 A 产品 36 件,则生产 B 产品 $80-36=44$ (件).

综上所述,该化工厂现有的原料能保证生产顺利进行.

 **技巧点拨** 解实际应用题目的关键是理清题意,搞清量与量之间的关系,从而列出不等式.



变式训练 6

为节约用电,某学校于本学期初制定了详细的用电计划.如果实际每天比计划多用 2 度电,那么本学期的用电量将会超过 2 530 度;如果实际每天比计划节约 2 度电,那么本学期用电量将会不超过 2 200 度电.若本学期的在校时间按 110 天计算,那么学校每天用电量应控制在什么范围内?



巩固练习

基础巩固

一、选择题

- 不等式 $5-3x>2x$ 的解集为 ()
 A. $\{x|x>1\}$ B. $\{x|x>-1\}$
 C. $\{x|x<1\}$ D. $\{x|x<-1\}$
- 一元一次不等式 $-5x+15<0$ 的解集是 ()
 A. $\{x|x<3\}$ B. $\{x|x>3\}$
 C. $\{x|x<-3\}$ D. $\{x|x>-3\}$
- 不等式 $5-2x>1$ 的正整数解集为 ()
 A. $\{0,1,2\}$ B. $\{1,2\}$ C. $\{0,1\}$ D. $\{1\}$
- 不等式组 $\begin{cases} x<5, \\ x-3\leq 0 \end{cases}$ 的解集为 ()
 A. $\{x|x<5\}$ B. $\{x|x\leq 5\}$
 C. $\{x|x<3\}$ D. $\{x|x\leq 3\}$
- 不等式组 $\begin{cases} x+2>0, \\ x-3<0 \end{cases}$ 的解集为 ()
 A. $(-2,3)$ B. $(-3,2)$ C. \emptyset D. \mathbf{R}
- “ $x>-2$ ”是“ $3x+20>11$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

- 不等式组 $\begin{cases} x-1>0, \\ x+3<0 \end{cases}$ 的解集为_____.
- 不等式 $\frac{17}{2x-8}>0$ 的解集为_____.

3. 若使函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

4. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-a > 0, \\ 3-x > -1 \end{cases}$ 无解, 则 a 的取值范围是_____.

5. 小张购买笔记本和钢笔共 30 件, 已知每本笔记本 2 元, 每支钢笔 5 元, 费用不超过 100 元钱, 设小张买了 x 支钢笔, 则根据题意可列不等式为_____.

三、解答题

1. 解不等式组 $\begin{cases} x+3 > 5, \\ x-4 < 4 \end{cases}$ 的解集.

2. 解不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{2x-2} > 0, \\ 3-x \geq 1 \end{cases}$ 的解集.

3. 解不等式组 $\begin{cases} x+3 > 0, \\ x-4 > 0, \\ x \leq 8 \end{cases}$ 的解集, 用区间表示.

能力提升

1. 解不等式 $\frac{7-2x}{3}+3 > \frac{3x+8}{4}-x$, 并把解集在数轴上表示出来.

2. 若不等式组 $\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$ 无解, 求不等式组 $\begin{cases} x > 3-a, \\ x < 3-b \end{cases}$ 的解集.

3. 某公司决定从厂家购买甲、乙两种不同型号的显示器共 50 台, 购买显示器的总金额不超过 77 000 元, 已知甲、乙型号的显示器价格分别为 1 000 元/台、2 000 元/台.

(1) 求该公司至少购买甲型显示器多少台;

(2) 若要求购买甲型显示器的台数不超过乙型显示器的台数, 问有哪些购买方案?

4. 今年我市某县筹备 20 周年县庆, 园林部门决定利用现有的 3 490 盆甲种花卉和 2 950 盆乙种花卉搭配两种园艺造型共 50 个摆放在迎宾大道两侧. 已知搭配一个 A 种造型需甲种花卉 80 盆, 乙种花卉 40 盆, 搭配一个 B 种造型需甲种花卉 50 盆, 乙种花卉 90 盆. 若搭配一个 A 种造型的成本是 800 元, 搭配一个 B 种造型的成本是 960 元, 试设计一个成本最低的方案, 并计算出所需成本.