高等数学

GAODENG SHUXUE

工科类

责任编辑：黄　煌
特约编辑：李南木
装帧设计：张瑞阳

ISBN 978-7-81099-502-3
9 787810 995023
02 >
定价：42.00元

高等数学
工科类
国防科技大学出版社
X-A

高等数学

工科类

刘建勇 ● 主编

GAODENG
SHUXUE

将“互联网+”思维融入教材
纸质教材与数字资源有机整合
通过扫描书中二维码呈现
移动微课程，随时随地学

国防科技大学出版社

【内容简介】 本书是专为高职高专工科类各专业编写的高等数学课程教材。书中全面、系统地介绍了高职高专工科类所需的高等数学基础知识，内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分、无穷级数、微分方程、线性代数、数学建模、概率论、拉普拉斯变换、Mathematica 软件等。

本教材的特色在于知识讲解透彻易懂，例题选用经典实用，小结归纳方法技巧，数学基础内容全面。同时注重理论知识与实际应用相结合，强调运用数学知识解决实际问题，体现了职业教育的特色。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：工科类/ 刘建勇主编. —长沙：国防科技大学出版社，2008.6(2024.1 重印)
ISBN 978-7-81099-502-3
Ⅰ. 高…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 062462 号

出版发行：国防科技大学出版社
责任编辑：黄　煌　　**特约编辑**：李南木
印 刷 者：三河市骏杰印刷有限公司
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：18.75
字　　数：403 千字
印　　次：2024 年 1 月第 1 版第 10 次印刷
定　　价：42.00 元

编审委员会

出版说明

高职高专教育作为我国高等教育的重要组成部分，承担着培养高素质技术、技能型人才的重任。近年来，在国家和社会的支持下，我国的高职高专教育取得了不小的成就，但随着我国经济的腾飞，高技能人才的缺乏越来越成为影响我国经济进一步快速健康发展的瓶颈。这一现状对于我国高职高专教育的改革和发展而言，既是挑战，更是机遇。

要加快高职高专教育改革和发展的步伐，就必须对课程体系和教学模式等问题进行探索。在这个过程中，教材的建设与改革无疑起着至关重要的基础性作用，高质量的教材是培养高素质人才的保证。高职高专教材作为体现高职高专教育特色的知识载体和教学的基本工具，直接关系到高职高专教育能否为社会培养并输送符合要求的高技能人才。

为促进高职高专教育的发展，加强教材建设，教育部在《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》中，提出了“重点建设好3 000种左右国家规划教材”的建议和要求，并对高职高专教材的修订提出了一定的标准。为了顺应当前我国高职高专教育的发展潮流，推动高职高专教材的建设，我们精心组织了一批具有丰富教学和科研经验的人员成立了编审委员会。

编审委员会依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，调研了百余所具有代表性的高等职业技术学院和高等专科学校，广泛而深入地了解了高职高专的专业和课程设置，系统地研究了课程的体系结构，同时充分汲取各院校在探索培养应用型人才方面取得的成功经验，并在教材出版的各个环节设置专业的审定人员进行严格审查，从而确保了整套教材“突出行业需求，突出职业的核心能力”的特色。

本套教材的编写遵循以下原则：

(1) 成立教材编审委员会，由编审委员会进行教材的规划与评审。

(2) 按照人才培养方案以及教学大纲的需要，严格遵循高职高专院校各学科的专业规范，同时最大程度地体现高职高专教育的特点及时代发展的要求。因此，本套教材非常注重培养学生的实践技能，力避传统教材“全而深”的教学模式，将“教、学、做”有机地融为一体，在教给学生知识的同时，强化了对学生实际操作能力的培养。

(3) 教材的定位更加强调“以就业为导向”，因此也更为科学。教育部对我国的高职

高专教育提出了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则。根据这一原则，本套教材在编写过程中，力求从实际应用的需要出发，尽量减少枯燥、实用性不强的理论灌输，充分体现出“以行业为向导，以能力为本，以学生为中心”的风格，从而使本套教材更具实用性和前瞻性，与就业市场结合也更为紧密。

(4) 采用“以案例导入教学”的编写模式。本套教材力图突破陈旧的教育理念，在讲解的过程中，援引大量鲜明实用的案例进行分析，紧密结合实际，以达到编写实训教材的目标。这些精心设计的案例不但可以方便教师授课，同时又可以启发学生思考，加快对学生实践能力的培养，改革人才的培养模式。

本套教材涵盖了公共基础课系列、财经管理系列、物流管理系列、电子商务系列、计算机系列、电子信息系列、机械系列、汽车系列和化学化工系列的主要课程。

对于教材出版及使用过程中遇到的各种问题，欢迎您及时与我们取得联系。同时，我们希望有更多经验丰富的教师加入到我们的行列当中，编写出更多符合高职高专教学需要的高质量教材，为我国的高职高专教育做出积极的贡献。

编审委员会

前　言

本书是根据教育部制订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，认真研究总结全国高职高专数学教改的经验，结合高等工程专科教育中专业教学的特点，并充分考虑到高职高专学制转换的要求而编写的。

在多年的教学实践与研究中，我们认识到高职高专院校的数学基础教育应该着力培养学生以下几个方面的能力：一是运用数学的思想、概念和方法去消化吸收工程实践中的概念和原理的能力；二是将工程实践问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力。在本书的编写过程中，从典型的工程问题和自然科学的实际例子出发，深入浅出，引出基本的概念，然后运用一些系统化的方法和结论解决更多的工程问题。在教材体系结构及讲解方法上，我们适当淡化运算上的一些技巧，在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面有较大的提高。书中将数学素质的培养有机地融合于知识讲解中，突出数学思想的介绍，突出数学方法的应用。本书拓展了工程应用实例的范围，让学生更多地接触应用数学知识、数学方法解决工程实际问题的实例，增强学生的应用意识和能力。

本教材以培养工程应用技术型人才为目标，将数学基本知识和工程技术上的综合应用有机地融合在一起，主要具有以下几个特点：

1. 体现高职特色。根据各专业对数学的要求，贯彻“理解概念、强化应用和适用”的教学原则，强化工程数学的基础知识、基本思想，突出应用的本质。

2. 精选内容，构架新的课程体系。教学目标是使学生学会运用数学方法与工具去分析问题、解决问题，因此所选内容既要符合高职高专的特点，又要考虑到在工程实践中必须够用，因而赋予工程数学的系统性和严密性要以新的理解和认识。本书对数学结论的严密性借助图表将抽象的数学知识生动直观地表现出来就是一种较好的处理方法。

3. 强调数学知识的应用，理论与实践相结合，使学生了解工程实践中数学的应用背景，知道应用的方法，学会运用数学知识解决实际问题。因此本书的大量篇幅是数学的应用，而不是公式的推导或定理的证明。本书全部内容包括：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，多元函数微积分学，无穷级数，微分方程与数学建模，线性代数，概率论简介，拉普拉斯变换，Mathematica 软件的应用及章节小结和习题解答。

参加本书编写的有刘建勇(第三、六章及拉普拉斯变换)、陈晓玉(第五章及概率论简介)、高巍(第七章)、杨云帆(第一章)、周风琴(第四章及 Mathematica 软件)、王琳(第二章),全书由刘建勇统稿、定稿。

衷心地希望广大读者对书中的不足之处给予批评与指正。

编　者

目　录

第一章　函数 极限 连续

函数是高等数学的主要研究对象,它从数量方面反映了一切客观事物之间的相互联系、相互影响.极限理论是微积分的理论基础,微积分的重要概念几乎都是通过极限定义的,它构成了微分学和积分学的基础.连续函数是高等数学主要讨论的函数类型.本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节　函　数

一、函数的定义与性质

1. 集合

1) 集合的定义

具有某种特定性质的事物组成的总体叫做**集合**.组成这个集合的事物称为该集合的**元素**.集合通常用大写的英文字母 A,B,C,D 等表示,元素通常用小写的英文字母 a,b,c,d 等表示.用记号 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素,读作 a 属于 A;如果 a 不属于 A,记作 $a \notin A$.

一个集合,若它只含有有限个元素,则称为**有限集**;若它含有无穷多个元素,则称之为**无限集**.

例如,2007 年中国出生的人口构成一个集合,就是有限集;全体自然数构成一个集合,就是无限集.

2) 集合之间的关系

设 A,B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,读作 A 包含于 B 或者 B 包含 A.

如果集合 A 与集合 B 互为子集,则称 A 与 B **相等**,记作 $A = B$.例如 $A = \{-6,1\}$,$B = \{x \mid x^2 + 5x - 6 = 0\}$,则 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**.

由所研究的所有事物构成的集合称为**全集**,记为 S.全集是相对的,一个集合在某一条件下是全集,而在另一条件下可能不是全集.例如,讨论的问题仅限于有理数,则全体有理数的集合为全集;当讨论的问题包括有理数和无理数时,全体有理数的集合就不是全集.

不包含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$,空集是任何集合的子集.

常见的数集有:自然数集 $\mathbf{N}$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$,正整数集 $\mathbf{N}^{+}$.

3) 集合的运算

集合有以下几种基本运算:

设 A 和 B 是两个集合,则有:

由 A 和 B 的所有元素构成的集合,称为 A 和 B 的**并集**,记为 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 和 B 的**交集**,记为 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 和 B 的**差集**,记为 $A \backslash B$,即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

全集 S 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的**余集**或**补集**,记为 A^C,即

$$A^C = S \backslash A.$$

设 A,B,C 是任意的三个集合,则集合的并、交、余运算满足下列法则:

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$　$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(4) 对偶律　$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$　$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

2. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,数集 $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**,记为 $U(a,\delta)$,其中,点 a 叫做该邻域的**中心**,δ 叫做该邻域的**半径**.

称集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 集合 $\{x \mid a-\delta < x < a\}$ 为点 a 的**左 δ 邻域**;同理,集合 $\{x \mid a < x < a+\delta\}$ 为点 a 的**右 δ 邻域**.

3. 常量与变量

我们在观察某一现象的过程时,常常会遇到各种不同的量,把在某个过程中变化着的量称为变量,保持不变状态的量称为常量. 如对每个具体人来说,在年龄的增长过程中,身高、体重都是变量,但器官个数是常量;再如在圆的半径增加过程中,圆的周长、面积都是变量,而其周长与直径之比却是常量(即圆周率).

常用字母 $x,y,z,t,\cdots$ 表示变量,用字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示常量. 也就是用字母表中排在前面的表示常量,排在后面的表示变量.

4. 函数的定义

人们在考察某个自然现象或工程技术问题时，常常会遇到许多变量，这些变量之间往往存在着某种依赖关系，这种变量之间确定的依赖关系，就是**函数关系**.

例 1　某运输公司规定货物的运价为：在 a 千米以内，每千米 k 元，超过部分为每千米 $\frac{3}{5}k$ 元. 那么运价 m 和里程 s 之间的关系可用下式表示：

$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\leqslant a, \\ ka+\dfrac{3}{5}k(s-a), & a<s. \end{cases}$$

当 s 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由此关系式可确定出 m 的相应数值.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于每个给定的数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**. 数集 D 叫做这个函数的**定义域**，也记作 D_f. 数集 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

由函数的定义可以看出，定义域和对应法则是确定函数的两个必不可少的要素，也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

若自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值仅有一个，称此函数为单值函数，否则为**多值函数**. 今后，若无特别说明，函数均指单值函数.

函数关系可用**公式法**（**解析法**）、**列表法**（**表格法**）和**图像法**来表示，其中公式法由于表达简单，易于运算和讨论，最为常用.

例 2　求 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$ 的定义域.

解　由 $4-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1>0$，得

$$-2\leqslant x\leqslant 2,\quad 且\ x<-1\ 或\ x>1.$$

所以定义域为 $[-2,-1)\cup(1,2]$.

设函数的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$，这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标，就在 xOy 平面上确定一点 (x,y)，当 x 取遍 D 上的每一个数值时，就得到 (x,y) 的一个集合 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$，这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形. 一般说来，函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形是一条或几条曲线.

5. 函数的特性

有些函数具有某些特殊性质，掌握这些性质对研究函数很有帮助.

1) 有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对一切 $x\in I$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**有界函数**;否则,称 $f(x)$ 在 I 上是**无界函数**.

每一个具有上述性质的 M,都是该函数的界.也就是说有界函数的界不是唯一的.

2) 单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对区间 I 上的任意两点 $x_1 < x_2$,都有

$$f(x_1) < f(x_2)(\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上为**单调增加(或单调减少)的函数**.

例如,函数 $y = x^2$ 在区间$(-\infty, 0)$内是单调减少的;在区间$(0, +\infty)$内是单调增加的;函数 $y = x, y = x^3$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内都是单调增加的.

3) 奇偶性

随堂测试

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对任意 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = f(x)(\text{或 } f(-x) = -f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数(或奇函数)**.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的;奇函数的图形是关于原点对称的.

例如,$f(x) = x^2$、$g(x) = x\sin x$ 在定义区间上都是偶函数;$F(x) = x$、$G(x) = x\cos x$ 在定义区间上都是奇函数.

4) 周期性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个非零常数 T,对任意 $x \in D$ 均有 $f(x+T) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**.并把 T 称为 $f(x)$ 的周期.

如果把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍,则它将与周期函数的其他部分图形重合.

应当指出的是,通常讲的周期函数的周期是指最小正周期.

对三角函数而言,$y = \sin x, y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,而函数 $y = \tan x$,$y = \cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

关于函数的性质,除了有界性与无界性之外,单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质,而不是每一个函数都一定具备的.

二、初等函数

1. 反函数

定义 1　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f,值域为 W_f.对于任意的 $y \in W_f$,在 D_f 上有唯一一个 x 与之对应,且满足 $y = f(x)$.如果把 y 看作自变量,x 看作因变量,就在 W_f 上定义了一个新的函数 $x = f^{-1}(y), y \in W_f$.我们称这个新的函数 $x = f^{-1}(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**,而把函数 $y = f(x)$ 称为**直接函数**.

从反函数的定义可以看到，直接函数的定义域恰好是其反函数的值域，值域恰好是其反函数的定义域. 按照对应法则 f，D_f 与 W_f 之间必须是一一对应的，所以为使函数 $y=f(x)$ 的反函数存在，只要函数 $y=f(x)$ 在 D_f 上是单调的.

直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 1　求函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数.

解　由 $y=-\sqrt{x-1}$，得

$$x=y^2+1(y\leqslant 0),$$

从而函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数为 $x=y^2+1(y\leqslant 0)$.

2. 复合函数

自由落体运动的动能 E 是速度 v 的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$，而速度 v 又是时间 t 的函数 $v=gt$，物体的动能 E 与 t 的关系 $E=\frac{1}{2}m(gt)^2$ 就是由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与函数 $v=gt$ 复合而成的.

定义 2　设函数 $y=f(u)$，而 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且函数 $u=g(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，则 y 通过变量 u 的联系而成为 x 的函数，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in D,$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 D，变量 u 称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$，即$(f\circ g)=f[g(x)]$.

注意　不是任意两个函数都可以复合成复合函数. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-2$ 就不能复合. g 与 f 构成的复合函数 $f\circ g$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域内，即 $g(D)\subset D_f$；否则，不能构成复合函数.

例如，$y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$ 可以看作是 $y=\arctan u$，$u=2^v$，$v=\sqrt{x}$ 复合成的复合函数.

3. 初等函数

1）基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常量函数这六类函数叫做**基本初等函数**. 这些函数在中学的数学课程里已经学过，简单介绍如下：

（1）幂函数　$y=x^\alpha$　$(\alpha\in\mathbf{R})$

它的定义域和值域依 α 的取值不同而不同，但是无论 α 取何值，幂函数在 $x\in(0,+\infty)$ 内总有定义. 当 $\alpha\in\mathbf{N}$ 或 $\alpha=\frac{1}{2n-1}$，$n\in\mathbf{N}$ 时，定义域为 $\mathbf{R}$. 常见的幂函数的图形如图 1-1 所示.

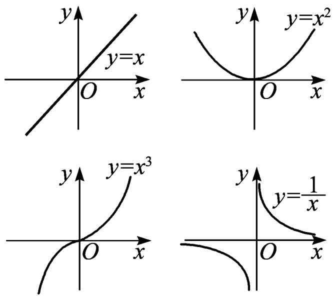


图 1-1

（2）指数函数　$y=a^x$　$(a>0,a\neq 1)$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$. 指数函数的图形如图 1-2 所示.

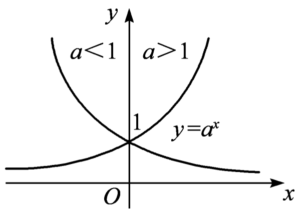


图 1-2

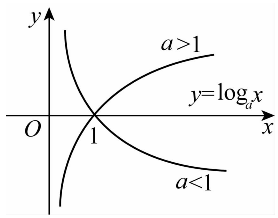


图 1-3

(3) 对数函数　$y=\log_a x\quad(a>0,a\neq 1)$

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的反函数称为对数函数,记为

$$y=\log_a x\quad(a>0,a\neq 1),$$

定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 其图形如图 1-3 所示.

在工程中,常以无理数 $e=2.718\,281\,828\cdots$ 作为指数函数和对数函数的底,并且记 $e^x=\exp x$,$\log_e x=\ln x$,而后者称为自然对数函数.

(4) 三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$. 其中正弦、余弦、正切和余切函数的图形如图 1-4 所示.

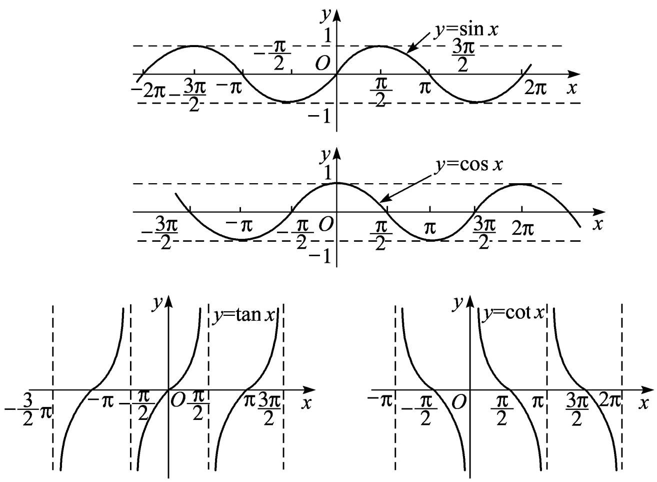
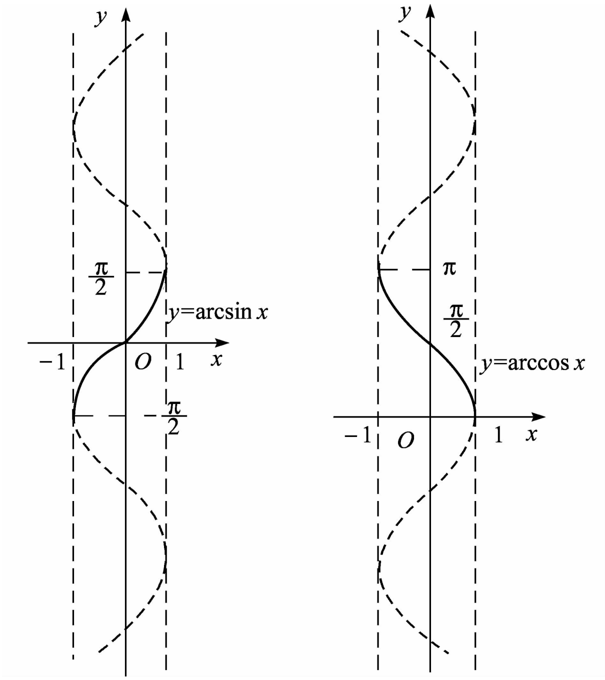


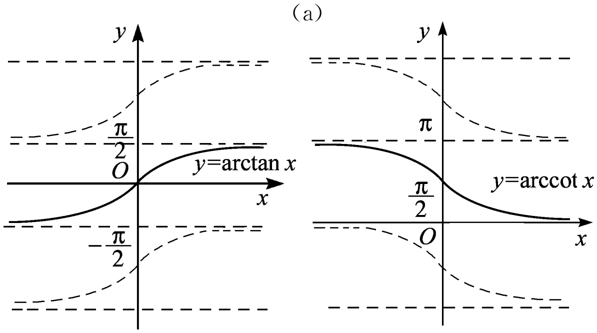
图 1-4

(5) 反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 等. 它们的图形如图 1-5 所示.



(a)



(b)

图 1-5

(6) 常量函数

不论自变量如何变化，对应的函数值都始终保持不变的函数，称为**常量函数**. 其函数表达式可表示为 $y = c$(c 为常数)，定义域为$(-\infty, +\infty)$，函数的图形是一条水平的直线.

2) 初等函数

通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合并用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**.

例如，$y = \ln(\sin x + 4)$，$y = e^{2x}\sin(3x + 1)$，$y = \sqrt[3]{\sin x}$，… 都是初等函数.

初等函数虽然是常见的重要函数,但是在工程技术中,非初等函数也会经常遇到. 例如符号函数,取整函数 $y=[x]$ 等分段函数就是非初等函数.

在微积分运算中,常把一个初等函数分解为基本初等函数来研究,学会分析初等函数的结构是十分重要的.

3) 双曲函数

在工程技术上,经常会遇到由函数 e^x 构成的一类初等函数,即双曲函数及它们的反函数——**反双曲函数**. 定义如下:

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

双曲正切函数 $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

反双曲正弦函数 $y=\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-\infty<x<+\infty)$;

反双曲余弦函数 $y=\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})(x\geqslant 1)$;

反双曲正切函数 $y=\operatorname{arth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}(|x|<1)$.

双曲函数有与三角函数类似的性质:

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh} y;$$
$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} y;$$
$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1;$$
$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x;$$
$$\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x.$$

三、分段函数

用公式法表达函数时,有时用一个解析式即可表示,但是,有的函数在定义域内,不能用一个解析式表示,在定义域的不同区间上要用不同的解析式表示,这类函数称为分段函数. 但它仍旧是一个函数,而不是几个函数,这是因为它符合一个函数的定义,只不过在定义域的不同部分用不同的式子来表示而已. 在计算分段函数的函数值时,应该按对应于定义域的不同部分的不同表达式进行计算. 下面是几个分段函数的例子.

例 1 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$.

例 2　符号函数

$$y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$.

例 3　取整函数

$$y=[x],$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(阶梯曲线). 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$.

习题 1-1

1. 已知 $A=\{-1,2,4,6,9\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2,4\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

2. 判断下列各对函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 与 $g(x)=x-2$；

(3) $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$；　(4) $f(x)=3\lg x$ 与 $g(x)=\lg x^3$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x-4}$；　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$；　(4) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x\sin x$；　(2) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$.

5. 求函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数.

6. 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x, & |x|\leqslant 1,\\ x^2+1, & |x|>1.\end{cases}$ 求下列函数值 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

7. 将下列函数分解成基本初等函数的复合.

(1) $f(x)=\arctan x^2$；　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{\sin 2x}$；

(3) $f(x)=\lg\sin\sqrt{x}$；　(4) $f(x)=(\sin\ln x)^2$.

8. 设 $f(x)=2^x$，$g(x)=\sqrt{x}$，求

(1) $g[f(x)]$；　(2) $f[g(x)]$.

9. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，如从北京到某地每千克收费 0.15 元；当超过 50 千克时，超重部分每千克按 0.25 元收费. 试求北京到某地的行李费 y(元) 与重量 x(千克) 之间的函数关系式，并画出图形.

第二节　极限与连续

极限方法是高等数学重要的研究方法. 高等数学中许多基本概念,例如,连续、导数、定积分、无穷级数等都是建立在极限的基础上的. 本节将给出极限的概念,并研究它的性质.

一、数列极限的定义与性质

1. 数列极限的定义

1) 数列的定义

如果按照某一法则,对每一个正整数 n,对应着一个确定的实数 x_n,x_n 按下标由小到大排列得到一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

就叫做**无穷数列**,简称**数列**,记作$\{x_n\}$,数列中的每一个数叫做**数列的项**,第 n 项 x_n 叫做数列的**一般项**(**通项**).

例如:

(1) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, 1+\frac{1}{n}, \cdots$;

(2) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$;

(3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$;

(4) $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$;

(5) $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$.

都是数列的例子,它们的一般项依次为

$$1+\frac{1}{n},\ 2^n,\ \frac{1}{2^n},\ (-1)^{n+1},\ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}.$$

注意　①(数列的几何意义)数列可看作数轴上的一个动点,在数轴上依次取 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$;

②(数列与函数)数列可看作自变量为正整数 n 的函数:

$$x_n = f(n),$$

其定义域是全体正整数,当自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 时,对应的函数值就排成数列$\{x_n\}$.

2）数列极限的概念

观察以上 5 个数列可以看出，它们有不同的变化趋势，大致可分为两类：

第一类是当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 无限地接近于一个确定的常数，如数列(1)、(3)、(5)；

第二类是当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 没有这种特点，如数列(2)、(4). 我们感兴趣的是第一类的数列. 如果当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 无限地接近于一个确定的常数，我们通常称这个确定的数为该数列的极限.

由此给出数列极限的直观定义.

如果数列$\{x_n\}$，当 n 无限增大时，数列$\{x_n\}$的取值无限接近常数 a，我们就称 a 是$\{x_n\}$当 $n\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

观察上述 5 个数列在 $n\to\infty$ 时的变化趋势，得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})=1$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n$ 不存在；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ 不存在；　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

2. 收敛数列的性质

定理 1(**极限的唯一性**)　收敛数列$\{x_n\}$的极限是唯一的.

对于数列$\{x_n\}$，如果存在着正数 M，使得对一切 x_n 都满足不等式 $|x_n|\leqslant M$，则称数列$\{x_n\}$是有界的；如果这样的正数 M 不存在，就说数列$\{x_n\}$是无界的.

定理 2(**收敛数列的有界性**)　如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

推论　无界数列必定发散.

二、函数的极限

我们知道数列可看作自变量为正整数 n 的函数 $x_n=f(n)$，其定义域是全体正整数. 数列的极限只是一种特殊函数的极限. 现在我们讨论定义于实数集合上的函数 $y=f(x)$ 的极限.

函数的自变量有几种不同的变化趋势：

(1)x 的绝对值 $|x|$ 无限增大，即 $x\to\infty$，其中又有 x 小于零且 $|x|$ 无限增大，即 $x\to-\infty$ 和 x 大于零且 $|x|$ 无限增大，即 $x\to+\infty$；

(2)x 无限接近 x_0，即 $x\to x_0$，其中又分 x 从 x_0 的左侧(即小于 x_0)无限接近 x_0，即 $x\to x_0^-$ 和 x 从 x_0 的右侧(即大于 x_0)无限接近 x_0，即 $x\to x_0^+$.

下面我们分别讨论.

1. 函数极限的定义

1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

由图 1-6 直观来看,当 $x\to\infty$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 与零是无限接近的.

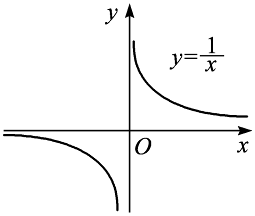


图 1-6

一般地,如果函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 无限增大时,$f(x)$ 取值和常数 l 无限接近,此时称 l 是 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$.

例如,由于当 $|x|$ 无限增大时,$\dfrac{1}{x}$ 与 0 无限接近,如图 1-6 所示,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x).$$

2) 自变量趋于有限值时函数的极限

先从图形上考察两个函数 $f(x)=x+2$ 与 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$. 如图 1-7 所示.

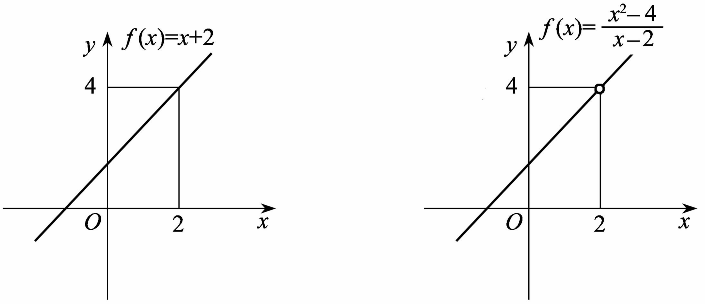


图 1-7

由图不难看出,当 x 无限接近于 2 时,$f(x)=x+2$ 无限趋近于 4,$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 也无限趋近于 4. 但函数 $f(x)=x+2$ 与 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 是两个不同的函数,$f(x)=x+2$ 在

$x=2$ 处有定义，而 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 在 $x=2$ 处无定义. 这就是说极限是否存在与其在 $x=2$ 处是否有定义无关.

一般地，我们有以下定义：

定义 1　假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，如果在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

例如，$\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

再如，$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$，$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

3) 左、右极限

在上述 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限中，x 是既从 x_0 的左侧又从 x_0 的右侧趋于 x_0 的. 但有时只能或只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0（记作 $x\to {x_0}^-$）的情形，或 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0（记作 $x\to {x_0}^+$）的情形. 于是就引进了左右极限的概念.

(1) 当自变量 x 小于 x_0 而无限趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 的对应值无限趋近于一个确定的数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to {x_0}^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A.$$

(2) 类似地，当自变量 x 大于 x_0 而无限趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 的对应值无限趋近于一个确定的数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to {x_0}^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

定理 2　函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在并且相等，即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

因此，即使 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在，但若不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限不存在. 这是因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x).$$

2. 函数极限的性质

性质 1（函数极限的唯一性）　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

性质2(函数极限的局部有界性)　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么存在常数$M>0$和$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)|\leqslant M$.

性质3(函数极限的局部保号性)　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,而且$A>0$(或$A<0$),那么就存在着点$x_0$的某一去心邻域,当$x$在该邻域内时,就有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

推论　如果在x_0的某一去心邻域内$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$),而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

3. 函数极限的运算

微课
无穷小与无穷大

1) 无穷小、无穷大

(1) 无穷小

定义2　在某一极限过程中(如$x\to x_0$,$x\to\infty$,$n\to\infty$),以零为极限的变量称为该极限过程的**无穷小量**,简称**无穷小**.

例如,因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,所以函数$\dfrac{1}{x}$为当$x\to\infty$时的无穷小.

因为$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,所以函数为$x-1$当$x\to 1$时的无穷小.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$,所以数列$\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$为当$n\to\infty$时的无穷小.

注意　无穷小不能脱离极限过程,必须与变化过程联系起来.如$f(x)=\sin x$,当$x\to 0$时是无穷小量,但在$x\to\dfrac{\pi}{2}$时就不是无穷小量.另外,无穷小量是个变量(0除外),不能把很小很小的量作为无穷小量,如0.00001不是无穷小量.零是可以作为无穷小的唯一常数.

(2) 无穷小与函数极限的关系

定理3　在自变量的同一变化过程中,函数$f(x)$具有极限A的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha$,其中α是自变量这一变化过程的无穷小.

例如,因为$\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^3}$,而$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3}=0$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 无穷小的运算性质

性质1　有限个无穷小的和也是无穷小.

例如,当$x\to 0$时,x与$\sin x$都是无穷小,$x+\sin x$也是无穷小.

无限多个无穷小的代数和未必是无穷小.例如$\lim\limits_{n\to\infty}(\overbrace{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}}^{n})=1$.

性质2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例如，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小，$\arctan x$ 是有界函数，所以 $\frac{1}{x}\arctan x$ 也是无穷小；再如，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

(4) 无穷大

定义 3　设函数 $f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$，即当 $x\to x_0$ 时，$\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \text{ 或 } f(x)\to\infty(x\to x_0).$$

定义中的 $x\to x_0$ 可以换成 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$ 等，函数 $f(x)$ 可换成数列 x_n，此时 $x\to x_0$ 换成 $n\to\infty$.

显然，$n\to\infty$ 时，n、n^2、$n^3\cdots$ 都是无穷大量.

注意　当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时为无穷大的函数 $f(x)$，按函数极限定义来说，极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态，我们也说“函数的极限是无穷大”，并记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty).$$

由无穷大的定义可知，在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(5) 无穷小的比较

微课
无穷小的比较

无穷小量虽然都是趋近于零的变量，但不同的无穷小趋近于零的速度却不一定相同，有时可能相差很大. 观察两个无穷小比值的极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

在 $x\to 0$ 的过程中，$x^2\to 0$ 比 $x\to 0$“快些”，反过来 $x\to 0$ 比 $x^2\to 0$“慢些”，而 $\sin x\to 0$ 与 $x\to 0$“快慢相仿”. 由此，我们定义如下：

设 α、β 是同一变化过程中的无穷小量，则：

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说 β 是比 α 低阶的无穷小；

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，就说 β 是和 α 同阶的无穷小；

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$,就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$,就说 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\alpha\sim\beta$.

下面举一些例子:

例 1 比较下列无穷小.

(1)x^2 与 x(当 $x\to 0$ 时); (2) $\dfrac{1}{n}$ 与 $\dfrac{1}{n^2}$(当 $n\to\infty$ 时);

(3)x^2-9 与 $x-3$(当 $x\to 3$ 时); (4)$\sin x$ 与 x(当 $x\to 0$ 时).

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$,所以当 $x\to 0$ 时,x^2 是比 x 高阶的无穷小,即

$$x^2=o(x)\quad(x\to 0).$$

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\infty$,所以当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{n}$ 是比 $\dfrac{1}{n^2}$ 低阶的无穷小.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$,所以当 $x\to 3$ 时,x^2-9 与 $x-3$ 是同阶无穷小.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,所以当 $x\to 0$ 时,$\sin x$ 与 x 是等价无穷小,即 $\sin x\sim x(x\to 0)$.

定理 4 设 $\alpha\sim\alpha', \beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

定理 4 表明,求两个无穷小之比的极限时,分子及分母都可用等价无穷小来代替.因此,如果用来代替的无穷小选取适当,则可使计算简化.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

解 当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{(2x)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\dfrac{1}{16}$.

注意 在求极限的过程中,一个无穷小量可以用与其等价的无穷小量代替,但只能代替乘积中的项,不能代替和差中的项.

2）极限的四则运算法则

定理 5（极限的四则运算法则）　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，有如下运算法则成立：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$，

$\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$，

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^n=A^n$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$，　$(B\neq 0)$.

微课
利用极限的四则运算求简单的极限

根据极限与无穷小的关系可以简单证明以上结论.

注意　① 求函数和、差、积、商的极限时，必须在各自极限都存在的前提下进行；② 在商的情形，要求分母的极限不等于零；③ 极限运算法则是对有限项而言的，对于无限项不能用.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}1=2\lim\limits_{x\to 1}x-1=2\cdot 1-1=1.$

极限值恰好是多项式在 $x=1$ 处的函数值.

一般地，如果

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

是多项式，那么

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}P(x)&=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n)+\lim_{x\to x_0}(a_1x^{n-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}(a_{n-1}x)+\lim_{x\to x_0}a_n\\&=a_0\lim_{x\to x_0}(x^n)+a_1\lim_{x\to x_0}(x^{n-1})+\cdots+a_{n-1}\lim_{x\to x_0}x+\lim_{x\to x_0}a_n\\&=a_0\left(\lim_{x\to x_0}x\right)^n+a_1\left(\lim_{x\to x_0}x\right)^{n-1}+\cdots+a_n\\&=a_0{x_0}^n+a_1{x_0}^{n-1}+\cdots+a_n=P(x_0),\end{aligned}$$

即若 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解　
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}&=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}\end{aligned}$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3-1}{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-5\cdot 2+3}$$

$$=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=-\frac{7}{3}.$$

若 $f(x_0)$ 不存在,例如,$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ 就不能代进去了,但我们可以用以下的方法来求解.

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$.

解　$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\frac{1}{6}$.

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解　由 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\frac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0$,根据无穷大与无穷小的关系得

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty.$$

一般地,求有理函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$ 时,有:

当 $Q(x_0)\neq 0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$;

当 $Q(x_0)=0$ 且 $P(x_0)\neq 0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\infty$;

当 $Q(x_0)=P(x_0)=0$ 时,先将分子分母的公因式 $(x-x_0)$ 约去.

例 7　求 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{5})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{5})(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{6}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x-4}=\frac{\sqrt{5}}{3}\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)}=\frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解　先用 x^3 去除分子及分母,然后取极限,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}.$$

由此不难得出，一般地，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

例 9　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

求极限的方法灵活多变，在求解具体题目时要灵活运用.

3) 两个准则

准则 Ⅰ　如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n\quad(n=1,2,3\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则 Ⅰ′　如果函数$f(x)$、$g(x)$及$h(x)$满足下列条件：

(1) $\exists\delta>0(M>0)$，当$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>M$)时，有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$(或$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=A$)，

那么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$)存在，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$).

注意　如果上述极限过程是$x\to x_0$，要求函数在x_0的某一去心邻域内有定义；若上述极限过程是$x\to\infty$，要求函数当$|x|>M$时有定义.

准则Ⅰ及准则Ⅰ′称为夹逼准则.

例 10　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1.$$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

定义 4　如果数列$\{x_n\}$满足条件$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$，就称数列$\{x_n\}$

是**单调增加的**;如果数列$\{x_n\}$满足条件$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots$,就称数列$\{x_n\}$是**单调减少的**. 单调增加和单调减少的数列统称为**单调数列**.

准则 Ⅱ　单调有界数列必有极限.

由收敛数列的性质知,收敛的数列一定有界. 我们也曾指出:有界的数列不一定收敛. 现在准则 Ⅱ 表明:如果数列不仅有界,并且是单调的,那么这数列的极限必定存在,也就是这数列一定收敛.

准则 Ⅱ 的几何解释:

单调增加数列的点只可能向右一个方向移动,或者无限向右移动,或者无限趋近于某一定点 A,而对有界数列只可能在后者情况下发生.

4) 两个重要极限

下面给出两个重要极限,有些不能利用四则运算法则解决的极限可以考虑利用两个重要极限求得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \left(\text{或} \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\right)$$

微课
两个重要极限

其中 e 是一个无理数,它的值为 2.718 28….

例 11　求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1.$

为了更好地利用第一个重要极限求极限,应掌握好如下模型:

$$\lim_{\mu(x) \to 0} \frac{\sin \mu(x)}{\mu(x)} = 1$$

成立的条件是在给定的趋势下,两个 $\mu(x)$ 应该是一模一样的无穷小量.

例 12　求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 1^2 = \dfrac{1}{2}.$

第二个重要极限的三种形式也可统一为模型

$$\lim_{\mu(x) \to 0} [1 + \mu(x)]^{\frac{1}{\mu(x)}} = \mathrm{e}$$

成立的条件是在给定趋势下,两个 $\mu(x)$ 是一模一样的无穷小量.

例 13　求极限$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$.

解　令 $t=-x$,则 $x\to\infty$ 时,$t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 14　求极限 $\lim\limits_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}$.

解　$\lim\limits_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}=\lim\limits_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim\limits_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3}=\mathrm{e}.$

三、函数的连续性

自然界中许多现象的变化过程都是连续不断的. 如气温的变化、生物的生长等等都是随着时间的变化连续变化的,这种现象反映在数学上就是函数的连续性.

1. 连续函数的概念

仔细分析前面实际问题中的函数,不难发现:当自变量变化很小时,函数值的变化也很小. 因此,我们可以用极限来给出函数连续性的定义. 下面,我们先引入增量的概念,然后再引出函数的连续性的定义.

1) 增量的概念

设变量 t 从它的一个初值 t_1 变到终值 t_2,终值与初值的差 t_2-t_1 就叫做变量 t 的增量,记作 Δt,即 $\Delta t=t_2-t_1$.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内是有定义的. 当自变量 x 在这邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时,函数值 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$,因此函数 y 的对应增量为

$$\Delta y=f(x+x_0)-f(x_0).$$

2) 连续的定义

从自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 与函数值的增量 $\Delta y=f(x+x_0)-f(x_0)$ 的关系出发,我们给出函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义.

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果设 $x=x_0+\Delta x$,则 $\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$. 又由于

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0),$$

所以 $\Delta y\to 0$,就相当于 $f(x)\to f(x_0)$. 于是我们可得出下面的等价定义:

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在,且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

由此定义可以看到,求连续函数在某点的极限,只需求出函数在该点的函数值即可.

例如,函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,是因为 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$.

3) 左连续、右连续的概念

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$ 存在且等于 $f(x_0)$,即 $f(x_0-0)=f(x_0)$,就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)$ 存在且等于 $f(x_0)$,即 $f(x_0+0)=f(x_0)$,就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

显然,函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续,则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,或者说函数 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 内的连续函数. 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点连续,并且在左端点 $x=a$ 处右连续,在右端点 $x=b$ 处左连续,则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,闭区间 $[a,b]$ 称为函数 $f(x)$ 的连续区间.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例 1 判定函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ 2x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$,于是

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续且右连续,从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 2 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

证 设 x 为区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点,则有

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

因为当 $\Delta x\to 0$ 时,Δy 是无穷小与有界函数的乘积,所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

这就证明了函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点 x 处都是连续的.

同理可证,函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

由函数在一点 x_0 处连续的定义及 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$,有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right),$$

也就是说，对于连续函数，极限符号与函数符号可以互换.

例如，求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$，因为$y=\sin x$是连续函数，所以$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

2. 函数的间断点

如果函数$f(x)$在点x_0处不连续，则称$f(x)$在点x_0处间断，称点x_0为$f(x)$的**间断点**.

设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义. 在此前提下，如果函数$f(x)$有下列三种情形之一：

(1) 在$x=x_0$处没有定义；

(2) 虽在$x=x_0$处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3) 虽在$x=x_0$处有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

则函数$f(x)$在点x_0处为不连续，而点x_0称为函数$f(x)$的**不连续点**或**间断点**.

下面我们通过例子说明函数间断点的类型.

例 3　函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$处没有定义，所以点$x=1$是函数的间断点.

因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$，如果补充定义$f(1)=2$，则所给函数在$x=1$处连续. 我们称$x=1$为该函数的**可去间断点**.

例 4　设函数$y=f(x)=\begin{cases}x, & x\neq1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$

因为$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}x=1$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$，所以$x=1$是函数$f(x)$的可去间断点.

如果改变函数$f(x)$在$x=1$处的定义，令$f(1)=1$，则函数$f(x)$在$x=1$处连续，我们也称$x=1$为该函数的可去间断点.

例 5　讨论函数$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geqslant0,\\ x-2, & x<0\end{cases}$在$x=0$处的连续性.

解　因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+2)=2=f(0)$，所以$f(x)$在点$x=0$处右连续但不左连续，故$f(x)$在点$x=0$处不连续. 因为$y=f(x)$的图形在$x=0$处产生跳跃现象，所以我们称$x=0$是$f(x)$的**跳跃间断点**.

例 6　正切函数$y=\tan x$在$x=\dfrac{\pi}{2}$处没有定义，所以点$x=\dfrac{\pi}{2}$是函数$\tan x$的间断点. 因为$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，故称$x=\dfrac{\pi}{2}$为函数$\tan x$的**无穷间断点**.

例 7 函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处没有定义,所以点 $x=0$ 是函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的间断点.

当 $x\to 0$ 时,函数值在 -1 与 1 之间变动无限多次,所以我们称点 $x=0$ 为函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的**振荡间断点.**

就一般情况而言,通常把间断点分成两类:如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点,但左极限 $f(x_0-0)$ 及右极限 $f(x_0+0)$ 都存在,那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**. 不是第一类间断点的任何间断点,称为**第二类间断点**. 在第一类间断点中,左、右极限相等者称为可去间断点,不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

3. 连续函数的运算

定理 1 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续,则函数 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$,$\frac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x_0)\neq 0$ 时)在点 x_0 处也连续.

例如,$\sin x$ 和 $\cos x$ 都在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,故由定理知 $\tan x$ 和 $\cot x$ 在它们的定义域内是连续的.

注意 三角函数 $\sin x$,$\cos x$,$\sec x$,$\csc x$,$\tan x$,$\cot x$ 在其有定义的区间内都连续.

定理 2 单调连续函数的反函数是单调连续的.

例如,由于 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续,所以它的反函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续的. 同样,$y=\arccos x$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调减少且连续;$y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加且连续;$y=\operatorname{arccot} x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少且连续.

注意 反三角函数 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$ 在它们的定义域内都是连续的.

定理 3 设函数 $u=\varphi(x)$,当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a,即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 处连续,那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在且等于 $f(a)$,即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right]=f(a).$$

注意 在定理 3 的条件下,求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的极限时,函数符号 f 与极限符号可以交换次序.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=1.$

定理 4　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处也是连续的.

4. 初等函数的连续性

基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.

根据初等函数的定义，由基本初等函数的连续性以及本节有关定理可得下列重要结论：一切初等函数在其定义区间内都是连续的. 所谓定义区间，就是包含在定义域内的区间. 我们常见的函数，大多是初等函数，因此，初等函数的连续性是非常重要的.

如果 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间内的点，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x}{2x+1}$.

解　初等函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{2x+1}$ 在点 $x_0=2$ 处是有定义的，有 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x}{2x+1}=\dfrac{e^2}{5}$.

函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}\,(u(x)>0)$ 既不是幂函数，也不是指数函数，称其为**幂指函数**.

因为 $f(x)=u(x)^{v(x)}=e^{\ln u(x)^{v(x)}}=e^{v(x)\ln u(x)}$，故幂指函数可化为复合函数.

在计算幂指函数的极限时，若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$，则有

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\left[\lim_{x\to x_0}u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}=a^b.$$

例 10　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 6}=e^6$.

5. 闭区间上连续函数的性质

定义在闭区间上的连续函数，在理论和应用中有很多十分重要的性质. 下面将对这些性质进行简单介绍.

1) 最值性质

对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0\in I$，使得对于任一 $x\in I$，都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\,(f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值(最小值)**.

例如，函数 $f(x)=1+\cos x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上有最大值 2 和最小值 0. 又如，函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有最大值 1 和最小值 -1. 在开区间 $(0,+\infty)$ 内，$\operatorname{sgn} x$ 的最大值和最小值都是 1. 但函数 $f(x)=x$ 在开区间 (a,b) 内既无最大值又无最小值.

定理 5(最大值和最小值定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上必有最大值和最小值.

注意　如果函数在开区间内连续，或函数在闭区间上有间断点，那么函数在该区间上

就不一定有最大值或最小值.

例如,函数 $y = x$ 在开区间 $(1,2)$ 内没有最大最小值.

又如,分段函数

$$y = f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x+3, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

在闭区间 $[0,2]$ 上无最大值和最小值.

定理 6(有界性定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

2) 介值性质

如果 x_0 使 $f(x_0) = 0$,则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**零点**.

定理 7(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a) \cdot f(b) < 0$),那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a < \xi < b)$,使 $f(\xi) = 0$.

定理 8(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a) = A$ 及 $f(b) = B$,那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi) = C(a < \xi < b)$.

定理 8 的几何意义:连续曲线弧 $y = f(x), x \in [a,b]$ 与水平直线 $y = C$(C 在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间)至少交于一点.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

习题 1-2

1. 设 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$,问 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 是否存在极限.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x+1, & x > 0, \end{cases}$ 问 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 是否存在.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3+n}$;

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{x}$;

(6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^2}{2x^2+3x-1}$;

(7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3-2x}{4x^2+x-1}$;

(8) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3-x-1}{3x^5-2x^4+1}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$；　(10) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；　(12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

随堂测试

4. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

5. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

6. 利用等价无穷小的性质，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{3x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^n}{\sin^m x}$　(n,m 为正整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\arctan x}$.

7. 判断函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

8. 指出下列函数的间断点，并说明间断点的类型. 如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使其连续.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(2) $f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 2x+1, & 1\leqslant x<2,\\ 1+x^2, & 2\leqslant x.\end{cases}$

本章小结

一、主要内容

1. 函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素.

2. 求基本初等函数的和、差、积、商及有限次复合而成的函数的定义域，就是求由基本初等函数的定义域构成的不等式组的解集.

3. 复合函数的定义，基本初等函数的定义域，复合函数的变量、中间变量、因变量.

4. 五类基本初等函数，定义域、图形及其性质.

5. 连续函数的两种等价定义，左右连续的概念，连续与极限存在的关系. 分段函数分段点处的连续性的判断(用左右连续的定义来判断). 间断点类型的判断.

二、求极限基本方法

1. 利用极限的定义，通过函数图像求极限.

2. 利用极限的运算法则，在使用这些法则时，务必注意，每一个函数的极限要存在；而且在商的情形时，分母的极限不能为零.

3. 利用夹逼准则及两个重要极限，要灵活运用以下两个公式：

$$\lim_{\mu(x)\to 0}\frac{\sin\mu(x)}{\mu(x)}=1,\quad \lim_{\mu(x)\to 0}(1+\mu(x))^{\frac{1}{\mu(x)}}=\mathrm{e}.$$

4. 利用无穷小的性质.

5. 利用等价无穷小代换，常用等价无穷小关系：$x\to 0$

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a(a>0)$，$(1+x)^a-1\sim ax(a\neq 0)$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$.

6. 利用函数的连续性求极限.

7. 利用洛必达法则(详见第三章内容).

复习题一

一、选择题

1. 函数 $y=1+\cos x$ 是(　　)

A. 无界函数　　B. 单调减少的函数

C. 单调增加的函数　　D. 有界函数

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均定义在$(-\infty,+\infty)$内，$f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们均为非零函数，则下列各式中非奇偶函数是(　　)

A. $f(x)g(x)$　　B. $f(x)g(x)+2$

C. $\frac{f(x)}{g(x)}\quad(g(x)\neq 0)$　　D. $[f(x)]^2g(x)$

3. 下列极限存在的有(　　)

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x^2}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2^x-1}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$　　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$

4. 下列变量在给定变化过程中是无穷小量的有(　　)

A. $2^{-x}-1\quad(x\to 0)$　　B. $\frac{\sin x}{x}\quad(x\to 0)$

C. $\frac{x^2}{\sqrt{x^3-3x+1}}\quad(x\to+\infty)$　　D. $\frac{1}{\mathrm{e}^x}\quad(x\to\infty)$

5. 对任意 x 总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（　　）

A. 为 0　　B. 一定存在

C. 一定不存在　　D. 不一定存在

二、填空题

1. $y=\sqrt{9-x^2}+\ln(x-1)$ 的定义域为____________.

2. 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的________ 条件.

3. $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时右极限 $f(x_0+0)$ 及左极限 $f(x_0-0)$ 存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的________ 条件.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x^2)}{\sin^3 x}=$ ________.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+4}{x-1}=-3$，则 $a=$ ________.

三、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{x^2+1}}$；　　2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$；

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 12x}{\tan 19x}$；　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

四、求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3^{-x}+3^x)}{\ln(2^{-x}+2^x)}$.

五、证明当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$，并利用此结果求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^x-1}$.

六、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\pi x, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 值.