辽宁省职业教育“十四五”规划教材

新标准教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

主编　王中兴

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

辽宁省职业教育「十四五」规划教材

高等数学

主编　王中兴

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

X-A

巍巍交大　百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑　金颖杰
责任编辑　胡思佳
封面设计　刘文东

GAODENG SHUXUE

高等数学

扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-25656-0
9 787313 256560 >
定价: 49.80元

辽宁省职业教育“十四五”规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

主　编　王中兴

副主编　陈海霞

上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

为适应现阶段我国教育教学改革的需要，本书在充分总结高等职业院校一线教师教学经验的基础上编写而成. 全书共分为九章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、向量与空间解析几何、微分方程、多元函数微分学. 本书每节后有围绕本节知识内容设置的习题，每章后有相关的复习题. 全书融入课程思政.

本书可作为高等职业院校高等数学课程的教学用书，也可作为相关人士学习数学的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王中兴主编. —上海：上海交通大学出版社，2021.11(2024.1 重印)

ISBN 978-7-313-25656-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 225536 号

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　　编:王中兴

出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路 951 号

邮政编码:200030　　电　　话:021-64071208

印　　制:三河市骏杰印刷有限公司　　经　　销:全国新华书店

开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16　　印　　张:17

字　　数:357 千字

版　　次:2021 年 11 月第 1 版　　印　　次:2024 年 1 月第 3 次印刷

书　　号:ISBN 978-7-313-25656-0

定　　价:49.80 元

PREFACE 前言

“高等数学”是高等职业院校的基础课程.“高等数学”可以帮助学生掌握必要的数学知识,培养学生的空间想象能力、分析与解决问题的能力和数学思维能力,为学生学习专业知识、掌握职业技能和终身发展奠定基础.

为适应现阶段我国教育教学改革的需要,本书在充分总结高等职业院校一线教师教学经验的基础上编写而成.全书共分为九章,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、向量与空间解析几何、微分方程、多元函数微分学.

本书具有以下特点.

1.融入课程思政

为贯彻执行《高等学校课程思政建设指导纲要》的要求,推进习近平新时代中国特色社会主义思想进教材,本书每章设置了“思政园地”板块,介绍我国杰出的数学家及古代数学著作,培养学生勇攀高峰、敢为人先的创新精神,追求真理、严谨治学的求实精神,以及淡泊名利、潜心研究的奉献精神;增强学生的民族自豪感;弘扬爱国精神及工匠精神.

2.激发学习兴趣

本书灵活运用典型例题,理论联系实际,降低知识的枯燥感,能激发学生的学习兴趣,使学生由浅入深地掌握所学知识.

3.促进学练结合

本书每节后有围绕本节知识内容设置的习题,每章后有相关的复习题,能促进学生学练结合.

4.配套资源丰富

本书配有课件、微课、习题答案等多种教学资源,以支持网络化、多媒体及线上教学等现代教学手段.

本书由沈阳职业技术学院王中兴任主编,郑州职业技术学院陈海霞任副主编.本书在编写过程中参考了一些相关教材及资料,在此向相关作者表示诚挚的谢意!

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

CONTENTS

目　录

第一章　函　　数

第一节　函数及其特性

一、函数的概念及其表示

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中往往存在多个不断变化的量，即变量，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定规律的. 函数就是用来描述这种联系的. 下面先讨论两个变量的情形(多于两个变量的情形将在第九章中讨论).

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假定开始下落的时刻 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度.

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 若对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为这个函数的**定义域**，也记为 D_f，即 $D_f=D$.

对于每个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在点 x 处的**函数值**，记为 $f(x)$. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 遍取 D 中的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义确定. 若讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域为开区间$(-1,1)$.

对函数 $y=f(x)(x\in D)$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点 (x,y). 当 x 遍取定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**(见图 1-1).

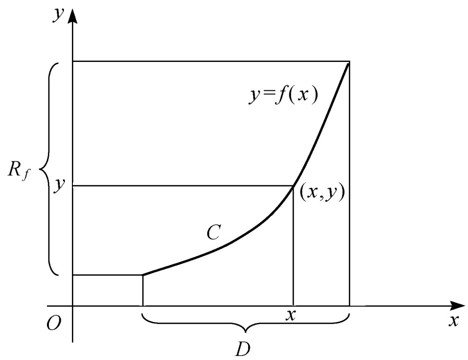


图 1-1

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是唯一的，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，方程 $x^2+y^2=a^2$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数. 对每一个 $x\in(-a,a)$，都有两个 y 值($\pm\sqrt{a^2-x^2}$) 与之对应，因而 y 是多值函数.

注意：若无特别声明，本书中函数均指单值函数.

函数的常用表示法有以下三种：

(1) **表格法**：将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图形法**：在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析法)**：将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(解析表达式)来表示的方法.

例 1 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-2 所示.

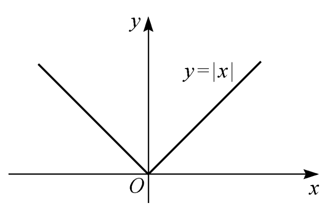


图 1-2

例 2 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=$

$\{-1,0,1\}$. 对任一实数 x，总有 $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$，它的图形如图 1-3 所示.

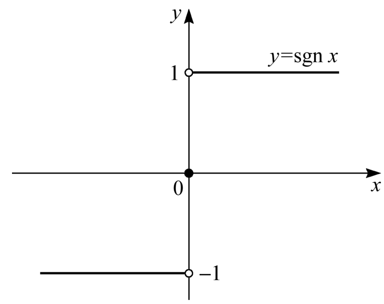


图 1-3

有些函数，对于自变量的不同取值范围有不同的对应法则，这种函数称为**分段函数**，如例 1 和例 2 中的两个函数.

例 3　取整函数 $y=[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数. 例如，

$$[2.3]=2,\quad [5]=5,\quad [\pi]=3,\quad [-6.7]=-7.$$

取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$，它的图形如图 1-4 所示.

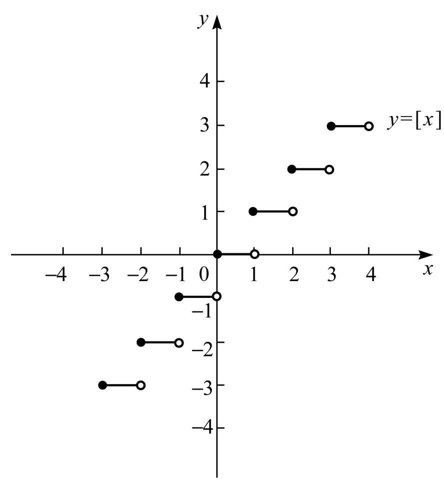


图 1-4

二、函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x \in X$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 每一个满足上述不等式的正数 M 都是该函数的界.

若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在区间 $[1,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数在区间 I 上是**单调增加函数**；若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对于任一 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对于任一 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例如，$f(x)=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$；$f(x)=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T>0$，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，$\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图形特点：若把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍距离，则它将与周期函数的其他部分图形重合(见图 1-5).

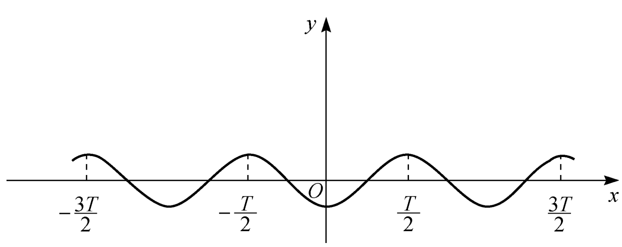


图 1-5

周期函数的应用非常广泛，因为在科学与工程技术中研究的许多现象都呈现出明显的周期性特征，如家用的电压和电流具有周期性，用于加热食物的微波炉中的电磁场是周期性变化的，季节和气候是周期性变化的，月相的变化和行星的运动具有周期性，等等.

习题 1.1

1. 判断下列各组函数是否是相同的函数.

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 与 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$；

(3) $y=\dfrac{\pi}{2}$ 与 $y=\arcsin x+\arccos x$；

(4) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 与 $y=x^2+x+1$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{5}{x^2+2}$；

(2) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\lg(4-x)$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$；　　(2) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=x^2-x^3$；　　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

4. 判断下列哪些函数是周期函数，对于周期函数，求出它的最小正周期.

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=x\cos x$；

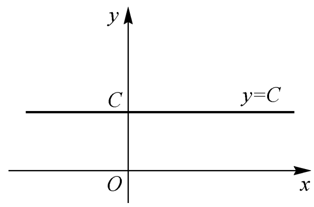
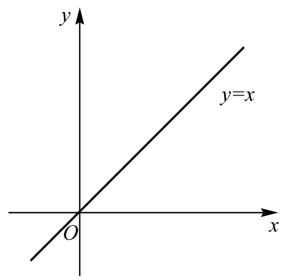
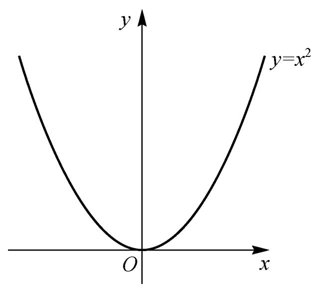
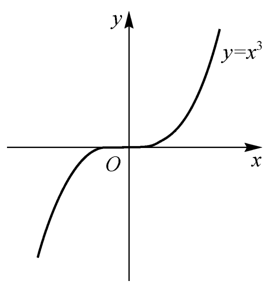
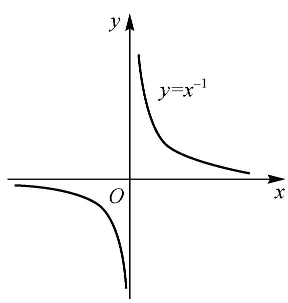
(3) $y=\sin x+\cos\dfrac{x}{2}$.

第二节　初等函数与分段函数

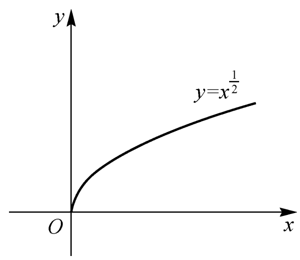
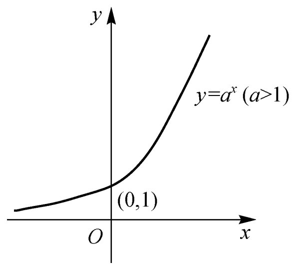
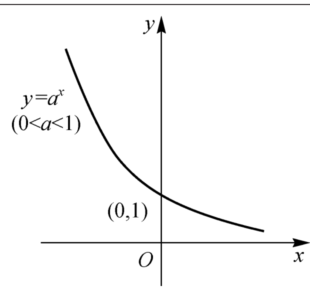
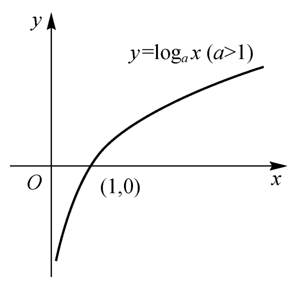
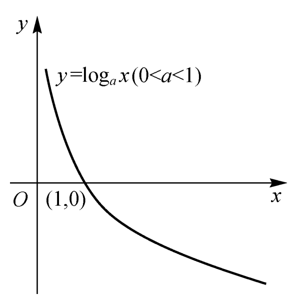
一、基本初等函数与初等函数

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数是六类基本初等函数，它们的定义域、值域、图像和性质如表 1-1 所示.

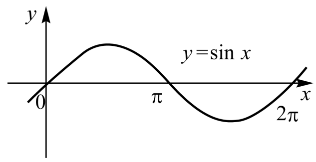
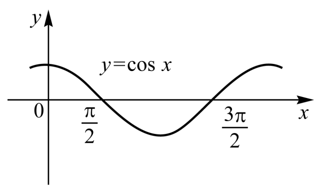
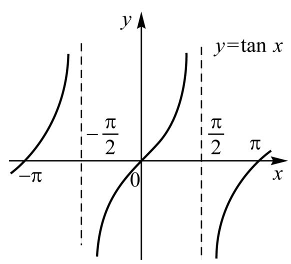
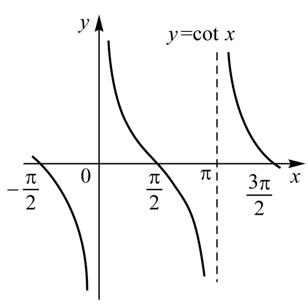
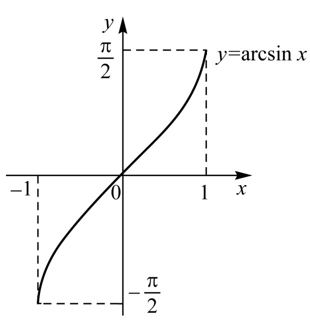
表 1-1

函数		定义域与值域	图像	性质
常量函数	$y=C$	C 为常数		偶函数，不增不减，有界函数
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，增函数
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数，在$(-\infty,0)$ 上是减函数，在$(0,+\infty)$ 上是增函数
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，增函数
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数，在$(-\infty,0)$ 和$(0,+\infty)$ 内是减函数

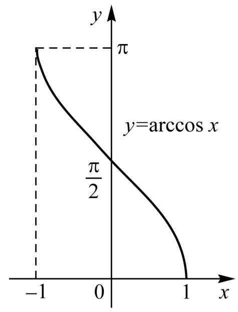
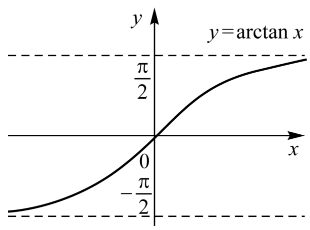
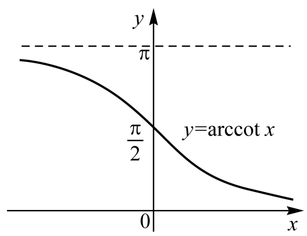
（续表）

函　数		定义域与值域	图　像	性　质
幂函数	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		增函数
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		增函数
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		减函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		增函数
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		减函数

（续表）

函数		定义域与值域	图像	性质
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界函数；在区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 内是增函数，在区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 内是减函数
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界函数；在区间 $[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$ 内是减函数，在区间 $[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi](k\in\mathbf{Z})$ 内是增函数
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，无界函数；在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内是增函数
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，无界函数；在区间 $(k\pi,k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 内是减函数
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，有界函数，增函数

（续表）

函　数		定义域与值域	图　像	性　质
反三角函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界函数，减函数
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，有界函数，增函数
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界函数，减函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

初等函数的基本特征是在函数有定义的区间内，初等函数的图形是不间断的.

二、分段函数

有时一个函数要用几个式子表示，如 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**. 但它仍是一个函数，而不是几个函数，这是因为它符合一个函数的定义，只不过在定义域的不同部分用不同的式子来表示. 在计算分段函数的函数值时，应该对应于定义域的不同部分的不同表达式进行计算.

例 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, & 1<x\leqslant 2,\\ 3x-4, & 2<x\leqslant 3,\\ -\dfrac{5}{2}x+\dfrac{25}{2}, & 3<x\leqslant 5,\end{cases}$ 求 $f(1),f(4)$ 及函数的定义域.

解 $f(1)=2\times1=2, f(4)=-\frac{5}{2}\times4+\frac{25}{2}=\frac{5}{2}$.

函数的定义域为$[0,5]$.

注意：分段函数不一定是初等函数.

习题 1.2

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0,\\ 0, & 0<x<2,\end{cases}$ 求 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. 作出函数 $f(x)=\begin{cases}3x, & |x|>1,\\ x^2, & |x|<1,\\ 3, & |x|=1\end{cases}$ 的图像.

3. 求函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2\end{cases}$ 的定义域.

第三节　反函数与复合函数

一、反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系. 但在研究过程中,哪个量作为自变量,哪个量作为因变量(函数)是由具体问题决定的.

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 R_f. 对于值域 R_f 中的任一数值 y,都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应,且满足关系式

$$f(x)=y,$$

则确定了一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$. 反函数的定义域为 R_f,值域为 D. 相对于反函数,函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由于习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此将反函数中的 x 与 y 互换位置,即记为 $y=f^{-1}(x), x\in R_f$.

在同一直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

什么样的函数才有反函数呢?下面给出反函数存在定理.

定理 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或减少),则函数 $y=f(x)$ 存在反函数,其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_y=\{y\,|\,y=f(x), x\in I_x\}$ 上也单调增加(或减少).

注意:单调性并不是一个函数存在反函数的必要条件,读者可自己举出非单调函数存在反函数的实例.

例 1 求函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解 记 $u=e^x$,则 $y=\frac{u-u^{-1}}{2}$,由此得 $u^2-2yu-1=0$,解得

$$u = y \pm \sqrt{y^2+1},$$

因 $u>0$,故

$$u = y + \sqrt{y^2+1},$$

即

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1},$$

所以 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$,因此函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

二、复合函数

定义 2　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ,若 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的**复合函数**,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,u 称为**中间变量**.

注意:(1) 不是任何两个函数都可以构成复合函数.例如,函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数.因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,而 $u=2+x^2\geqslant 2$,所以对任何的 x 值,y 都得不到确定的对应值.

(2) 复合函数可以有多个中间变量.例如,$y=e^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x+1$ 构成复合函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 1\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

利用复合函数不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数,还可以把一个较复杂的函数分解成几个简单的函数,这对于今后掌握微积分的运算是很重要的.

例 3　指出下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的.

(1) $y=e^{-x}$;　　(2) $y=\sin^2(1+2x)$;　　(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

解　(1) $y=e^{-x}$ 由 $y=e^u$,$u=-x$ 复合而成.

(2) $y=\sin^2(1+2x)$ 由 $y=u^2$,$u=\sin v$,$v=1+2x$ 复合而成.

(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$ 由 $y=\arccos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=\tan w$,$w=a^2+x^2$ 复合而成.

习题 1.3

1. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-3$；　(2) $y=\ln(x-1)+1$；　(3) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

2. 判断下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=2^{\sin x}$；　(2) $y=\ln(\sin 2x)$；

(3) $y=\cos^2(\sqrt{x}+1)$；　(4) $y=\arctan(\ln x)$.

第一章 复习题

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$；　(2) $y=\sqrt{9-x^2}$；

(3) $y=\ln(5x+1)$；　(4) $y=\arcsin(2x-3)$；

(5) $y=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$.

2. 下列各对函数中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^4, g(x)=4\ln x$；

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

3. 求下列函数值.

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ x^2-1, & x>0, \end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(2)$；

(2) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4x-\sqrt{1+x^2}$，求 $f(1)$.

4. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　(2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$；

(3) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；　(4) $f(x)=x^2\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(5) $f(x)=\sin x\cos x+1$；

(6) $F(x)=f(x)-f(-x)$，其中 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数；

(7) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　(8) $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$.

6. 指出下列周期函数的周期.

(1) $f(x)=\sin^2 x$；　　(2) $f(x)=\sin 4x$；

(3) $f(x)=5+\cos 2\pi x$；　　(4) $f(x)=|\cos x|$.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\ln(3x+2)$；　　(2) $y=2^{x-1}$；

(3) $y=\sqrt[3]{5x+1}$；　　(4) $y=x^2$.

8. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=(0,1)$，求下列各函数的定义域.

(1) $f(x^3)$；　　(2) $f(\tan x)$；

(3) $f(x-a)(a>0)$.

思政园地

清朝数学家李善兰

函数(function)的概念最早是由德国数学家莱布尼茨(1646—1716年)提出的."function"最早被译为"函数"，是由我国清朝数学家、天文学家、力学家李善兰(1811—1882年)在翻译《代微积拾级》时提出的，他解释为"凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数"，即函数是指一个量随着另一个量的变化而变化，或者说一个量中包含另一个量.

李善兰，原名李心兰，字竟芳，号秋纫，别号壬叔，浙江海宁人，自幼聪颖好学，偏嗜数学.李善兰在数学研究方面的成就主要有尖锥术、垛积术和素数论三项.

尖锥术理论主要见于《方圆阐幽》《弧矢启秘》《对数探源》三部著作，当时解析几何与微积分学尚未传入中国.李善兰创立的"尖锥"概念是一种处理代数问题的几何模型，他对"尖锥曲线"的描述实质上相当于给出了直线、抛物线、立方抛物线等方程.

垛积术理论主要见于《垛积比类》，该著作写于1859—1867年，是有关高阶等差级数的著作.李善兰从研究中国传统的垛积问题入手，获得了一些相当于现代组合数学中的成果.著名的"李善兰恒等式"也出自该著作.

素数论主要见于《考数根法》，这是中国素数论方面最早的著作.在判别一个自然数是否为素数时，李善兰证明了著名的费马素数定理，并指出了它的逆定理不真.

在19世纪把西方近代物理学知识翻译为中文的传播工作中，李善兰做出了重大贡献.他的译书也对中国近代物理学的发展起到了启蒙作用.同治七年(1868年)，李善兰到北京担任同文馆天文、算学部长，执教达13年之久，为造就中国近代第一代科学人才做出了贡献，为近代科学在中国的传播和发展做出了开创性的贡献.

李善兰一生翻译西方科技书籍甚多，将近代科学最主要的几门知识从天文学到植物细胞学的最新成果介绍传入中国，对促进近代科学的发展做出了卓越贡献.