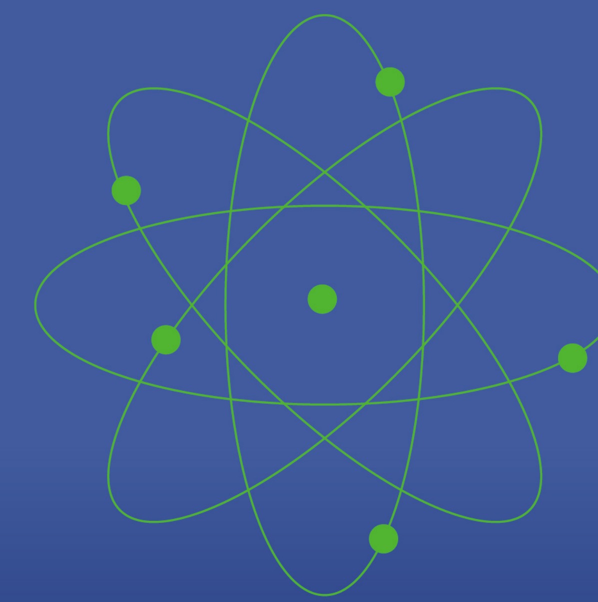


数 学

主编　张良朋　郑向军　白继萍　于春红

（基础模块）上册

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

数学（基础模块）上册

主编 张良朋 郑向军 白继萍 于春红

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

X·A

数 学

（基础模块）上册

策划编辑：金颖杰
责任编辑：张　昕
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-3132-4

定价：35.00元

数 学

主　编　张良朋　郑向军　白继萍　于春红
副主编　王小华　杨　敏

（基础模块）上册

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本教材是根据教育部颁布的《中等职业学校数学课程标准》(2020 年版)中规定的课程目标和课程内容,紧密结合中等职业学校的教学实际编写而成的,主要内容包括集合,不等式,函数,幂函数、指数函数与对数函数,三角函数.

本教材可作为中等职业学校各专业学生的教学用书和学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

数学:基础模块.上册 / 张良朋等主编. — 哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2021.6(2023.7 重印)
ISBN 978-7-5661-3132-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数学课-中等专业学校-教材 Ⅳ.①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 120172 号

数学:基础模块.上册
SHUXUE JICHU MOKUAI SHANGCE

选题策划 金颖杰
责任编辑 张 昕
封面设计 刘文东

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 三河市骏杰印刷有限公司
开　　本 850 mm×1 168 mm 1/16
印　　张 12
字　　数 248 千字
版　　次 2021 年 6 月第 1 版
印　　次 2023 年 7 月第 3 次印刷
定　　价 35.00 元

http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言 PREFACE

本教材是根据教育部颁布的2020年版《中等职业学校数学课程标准》(以下简称《课程标准》)规定的课程目标和课程内容,紧密结合中等职业学校的教学实际编写而成的,旨在帮助学生掌握必要的数学基础知识,提升他们的计算技能、计算工具使用技能和数据处理技能,培养他们的观察能力、空间想象能力、分析与解决问题能力和数学思维能力,为他们学习专业知识、掌握职业技能、继续学习和终身发展奠定基础.

本教材所选取的内容均为《课程标准》中规定的学生必修的基础性内容,符合《课程标准》规定的"教学要求".

本教材的编写特色主要体现在以下几个方面:

1. 突出基础性,着眼于中职数学教学的实际

本教材的编写遵循学生认知的发展规律,在保证科学性的基础上降低知识的起点,由已知到未知,由浅入深,由具体到抽象;从学生的实际出发,既做到了与九年义务教育阶段的衔接,又兼顾了与专业课程的衔接.

2. 体现时代特征,突出数学与现代信息技术的结合

随着现代信息技术的不断更新发展,数学的教学手段和方法也在不断更新.本教材的编写不但落实了《课程标准》对计算器的使用要求,还落实了《课程标准》对计算机软件的使用要求,旨在培养学生的计算能力和数据处理能力,加强学生对数学的理解;同时,本教材利用软件的强大功能,为教师教学提供更直观、高效的教学手段.

3. 注重学生的参与,紧密结合学生生活中的实际问题

本教材在编写过程中最大可能地将课堂变成师生共同活动的场所,强调学生的参与.因此,本教材在讲解知识的过程中不但设计了"想一想""议一议""做一做"等栏目,而且从生活实际问题入手引出数学概念,利用数学知识解决生活中的实际问题,让学生的思维活跃起来,激发他们的学习兴趣,提升他们对数学知识的应用能力.

本教材是“基础模块”的上册，各单元学时分配可以参考下表：

单元内容	学时数
第 1 单元　集合	9
第 2 单元　不等式	11
第 3 单元　函数	12
第 4 单元　幂函数、指数函数与对数函数	13
第 5 单元　三角函数	21

本教材由张良朋（淄博师范高等专科学校）、郑向军（成都机电工程学校）、白继萍（河南省外贸学校）、于春红（河北省故城县职业技术教育中心）任主编，由王小华（青龙满族自治县职业技术教育中心）、杨敏（四川省南充师范学校）任副主编.

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，敬请广大读者提出宝贵的意见和建议，以便我们今后修订完善.

编　者

目录

CONTNETS

基础知识篇

集合

内容要求

1. 集合及其表示：了解集合的概念；理解元素与集合之间的关系；了解空集、有限集和无限集的含义；掌握常用数集的表示符号，初步掌握列举法和描述法等集合的表示方法.

2. 集合之间的关系：理解子集与真子集、集合相等的含义；掌握集合之间基本关系的符号表示方法.

3. 集合的运算：理解两个集合的交集、并集；了解全集和补集的含义.

不等式

内容要求

1. 不等式的基本性质：掌握比较两个实数大小的方法，了解不等式的基本性质.

2. 区间：理解区间的概念.

3. 一元二次不等式：了解一元二次不等式的概念；了解二次函数、一元二次方程与一元二次不等式三者之间的关系；掌握一元二次不等式的解法.

4. 含绝对值的不等式：了解含绝对值的不等式 $|x|<a$ 和 $|x|>a(a>0)$ 的含义；掌握形如 $|ax+b|<c$ 和 $|ax+b|>c(c>0)$ 的不等式的解法.

5. 不等式的应用：初步掌握从实际问题中抽象出一元二次不等式模型解决简单实际问题的方法.

第1单元 集合

1.1 集合及其表示

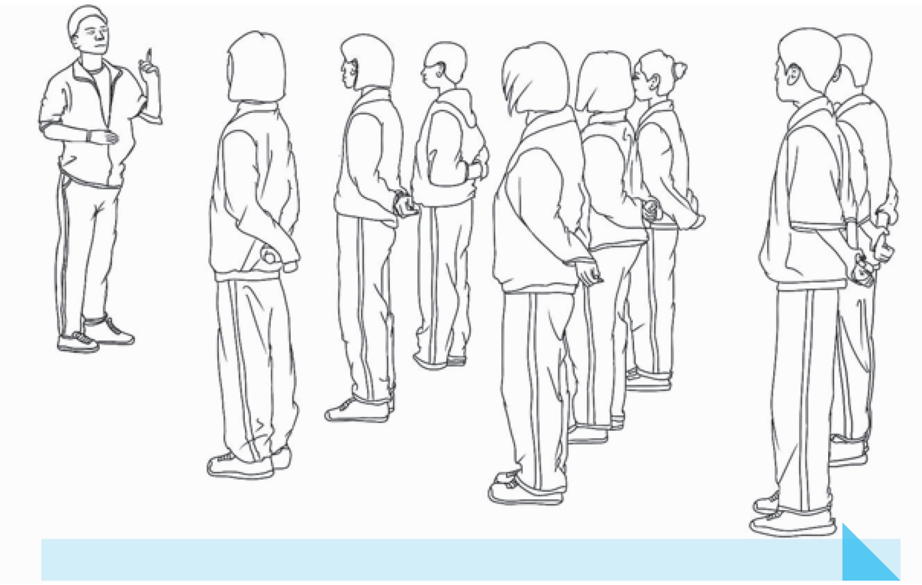
1.2 集合之间的关系

1.3 集合的运算

引言

本单元所讲的“集合”概念并不是大家在上体育课时体育老师所喊的动词意义下的“集合”,而是一个名词性质的概念,是基本的数学语言.集合思想已成为现代数学的理论基础,许多数学问题都可归结为集合问题来解决,用集合语言可以明了地表述数学概念,准确、简捷地进行数学推理.

掌握好集合的有关知识既是数学学习本身的需要,也是全面提高数学素养的一个必不可少的内容.深刻理解集合的概念,明确集合中元素的属性,然后利用集合的有关概念或通过集合的有关计算来研究和解决问题,可以使复杂的关系条理化、清晰化,这对开拓大家的解题思路,提高大家分析、解决问题的能力,都具有十分重要的意义.



引例

在某个城市中有这样一个理发师,他的广告词是这样写的:“本人的技艺十分高超,誉满全城.我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸,我也只给这些人刮脸.我对各位表示热诚欢迎!”来找他刮脸的人络绎不绝,自然都是那些不给自己刮脸的人.可是有一天,这位理发师从镜子里看见自己的胡子长长了,他本能地抓起了剃刀.你认为他会给自己刮脸吗?如果他不给自己刮脸,那么他就属于“不给自己刮脸的人”,他就要给自己刮脸;而如果他给自己刮脸,那么他又属于“给自己刮脸的人”,他就不该给自己刮脸.

1.1　集合及其表示

1.1.1　集合的概念

在数学中，如果把一些能够确定的对象看成一个整体，那么如何对这个整体进行表述和研究呢？

在日常生活中，我们所看到的、听到的、触摸到的、想到的各种各样的实物或一些抽象的符号都可以视作对象，由某些指定的对象汇集在一起所组成的整体就叫作**集合**，简称**集**．例如，引例中那些不给自己刮胡子的人的全体组成集合 A，给自己刮胡子的人的全体组成集合 B. 组成集合的每个对象称为**元素**．

例如　把所有小于 10 的自然数

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

中的各个数都看成对象，所有这些对象汇集在一起就构成了一个集合，其中的每个数即这个集合中的元素．

集合一般采用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示，它们的元素一般采用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示．如果 a 是集合 A 的元素，就说 $\boldsymbol{a}$ **属于** $\boldsymbol{A}$，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 $\boldsymbol{a}$ **不属于** $\boldsymbol{A}$，记作 $a\notin A$.

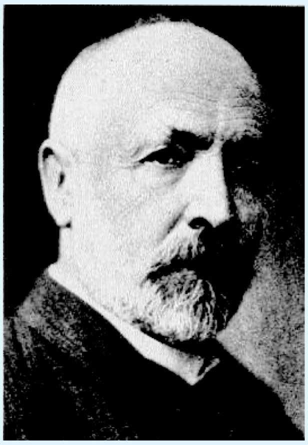
一般地，我们把不含任何元素的集合叫作**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，方程 $x-2=x-3$ 的解所组成的集合为空集，因为这个集合不含任何元素．

关于集合的概念有以下说明：

(1)集合的元素具有确定性，即作为一个集合的元素必须是确定的．也就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素是确定的．

(2)集合的元素具有互异性，即给定一个集合，则集合的元素一定是互不相同的．

(3)集合的元素具有无序性，即集合是由一些事物组成的整体，因此不考虑这些事物的排列次序．



康托尔（Cantor，1845—1918)，德国数学家，集合论的创立者．

想一想

我们日常生活中的哪些事物可以汇集在一起构成一个集合呢？

议一议

$0\in\varnothing$ 吗？

例 1 由下列语句能否确定一个集合?

(1)一切很大的数;

(2)小于 5 的正奇数;

(3)方程 $x^2=4$ 的所有解;

(4)不等式 $x-5>0$ 的所有解.

解 (1)因为很大的数没有具体的标准,“一切很大的数”所指的对象是不确定的,所以不能构成集合.

(2)因为小于 5 的正奇数包括 1,3 两个数,它们是确定的对象,所以可以构成一个集合.

(3)方程 $x^2=4$ 的解为 -2 和 2,是确定的对象,所以可以构成集合.

(4)解不等式 $x-5>0$ 可得 $x>5$,它们是确定的对象,所以可以构成集合.

根据集合所含有的元素个数可以将集合分为有限集和无限集两类. 含有有限个元素的集合叫作**有限集**,含有无限个元素的集合叫作**无限集**. 例如,上述例题中的(2)所构成的集合为有限集,(4)所构成的集合为无限集.

在上述例题的(3)中,集合的元素是 -2 和 2,它们都是方程 $x^2=4$ 的解. 像这样,由方程的所有解组成的集合叫作这个方程的解集;同样,在上述例题的(4)中,由不等式的所有解组成的集合叫作这个**不等式的解集**.

— 小提示 —

从给出的数集可以看到,我们可以用自然语言描述一个集合.

由数组成的集合称作**数集**. 我们用某些特定的大写英文字母表示常用的一些数集:

所有非负整数所组成的集合叫作**自然数集**,记作 **N**;

所有正整数所组成的集合叫作**正整数集**,记作 $\mathbf{N}^*$;

所有整数所组成的集合叫作**整数集**,记作 **Z**;

所有有理数所组成的集合叫作**有理数集**,记作 **Q**;

所有实数所组成的集合叫作**实数集**,记作 **R**.

例 2 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空.

(1)-3 ________ **N**; (2)3.14 ________ **Q**;

(3)π ________ **Q**; (4)0.5 ________ $\mathbf{N}^*$;

(5)1.8 ________ **R**; (6)-5 ________ **Z**.

解 (1)$\notin$; (2)$\in$; (3)$\notin$; (4)$\notin$; (5)$\in$; (6)$\in$.

做一做

1. 判断下列对象是否可以组成集合.

(1)大于 10 小于 20 的偶数；

(2)所有短发的女生；

(3)26 个英文字母；

(4)与 0 接近的实数的全体.

2. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空.

(1)-6 ________ $\mathbf{N}$，0.3 ________ $\mathbf{N}$，1 ________ $\mathbf{N}$；

(2)1.2 ________ $\mathbf{Z}$，-8 ________ $\mathbf{Z}$，3 ________ $\mathbf{Z}$；

(3)-0.2 ________ $\mathbf{Q}$，$\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{Q}$，$\sqrt{4}$ ________ $\mathbf{Q}$；

(4)4.8 ________ $\mathbf{R}$，$\sqrt{6}$ ________ $\mathbf{R}$，π ________ $\mathbf{R}$.

3. 判断下列语句是否正确.

(1)1，2，4，2 可以构成一个集合，这个集合共有 4 个元素；

(2)由方程 $x^2+1=0$ 的所有解组成的集合为空集.

1.1.2 集合的表示方法

如何表示一个集合呢？在具体表示一个集合时常用的方法有列举法和描述法.

1. 列举法

把集合的元素一一列举出来，元素中间用逗号隔开，写在花括号“{ }”中用来表示集合的方法叫作**列举法**. 例如，由小于 5 的自然数组成的集合可表示为

$$\{0,1,2,3,4\};$$

由方程 $x^2=4$ 的所有解组成的集合可表示为

$$\{-2,2\}.$$

当集合为无限集或元素很多的有限集时，可以在花括号内只写出几个元素，其他的用省略号表示即可，但所写出的元素必须能让人明白省略号表示哪些元素. 例如，自然数集 $\mathbf{N}$ 为无限集，可表示为

$$\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

不大于 100 的全体自然数所组成的集合为有限集，可表示为

议一议

集合 $\{\varnothing\}$ 是空集吗？$0,\varnothing,\{0\},\{\varnothing\}$ 之间有什么区别？

$$\{0,1,2,3,\cdots,100\}.$$

例 3 用列举法表示大于 1 小于 10 的所有偶数所组成的集合.

解 大于 1 小于 10 的所有偶数有 2,4,6,8,它们所组成的集合可表示为

$$\{2,4,6,8\}.$$

例 4 用列举法表示方程 $x^2+x-6=0$ 的解集.

解 解方程 $x^2+x-6=0$ 得

$$x_1=-3, x_2=2.$$

所以该方程的解集为

$$\{-3,2\}.$$

2. 描述法

有的集合用列举法表示起来很不方便,如"由大于 2 的所有实数组成的集合",大于 2 的实数有无穷多个,显然无法用列举法将该集合的元素一一列出,此时用描述法来表示该集合比较方便.

把描述集合中元素的特征性质或表示集合中元素的规律写在花括号"{}"内用来表示集合的方法叫作**描述法**. 例如,上述"由大于 2 的所有实数组成的集合",可以看出该集合的元素都具有以下性质:都是实数,都大于 2. 因此,该集合可用描述法表示为

$$\{x \mid x>2, x\in \mathbf{R}\},$$

花括号内竖线左侧的 x 表示这个集合中的任意一个元素,元素 x 从实数集 $\mathbf{R}$ 中取值;竖线右侧写出了该元素的特征性质.

如果从上下文可以明显看出集合的元素为实数,那么 $x\in\mathbf{R}$ 也可以省略不写,如上述的集合也可表示为

$$\{x \mid x>2\}.$$

例 5 用描述法表示下列集合.

(1)$\{-1,1\}$;

(2)大于 3 的全体偶数所构成的集合;

(3)不等式 $x+1\geqslant 0$ 的解集.

解 (1)该集合的一个特征性质可描述为绝对值等于 1 的实数,即

$$|x|=1.$$

— 小提示 —

用列举法表示集合时一般不必考虑元素的排列顺序,如集合{1,2}与集合{2,1}表示的是同一集合;并且集合中的元素必须是互不相同的对象,如不能用{4,6,4,8}表示集合{4,6,8}.

想一想

由第一象限所有的点组成的集合怎么表示?

所以这个集合可表示为

$$\{x \mid |x|=1\}.$$

(2)该集合的一个特征性质可描述为

$$x>3, x=2k, k\in\mathbf{N}.$$

所以这个集合可表示为

$$\{x \mid x>3 \text{ 且 } x=2k, k\in\mathbf{N}\}.$$

(3)解不等式 $x+1\geqslant 0$ 可得 $x\geqslant -1$，所以该不等式的解集为

$$\left\{x \mid x\geqslant -1\right\}.$$

实际上，很多集合既可以用列举法表示，也可以用描述法表示. 用列举法表示集合，可以明确看到集合中的元素；用描述法表示集合，可以清晰地反映出集合中元素的共同属性. 具体可根据实际情况灵活选用.

思考

自己举出几个集合的例子，并分别用自然语言、列举法和描述法表示出来.

做一做

1. 用列举法表示下列集合.

(1)英文单词 good 中字母所组成的集合；

(2)由数字 1，2，1，4 组成的集合；

(3)不大于 8 的非负整数；

(4)方程 $x^2-6x+8=0$ 的解集.

2. 已知集合 $A=\{3,a+2,5\}$，则由 a 的取值组成的集合可表示为________.

3. 用描述法表示下列集合.

(1)小于 100 的所有自然数所组成的集合；

(2)$\{1,3,5,7,9\}$；

(3)绝对值小于 6 的所有实数所组成的集合；

(4)不等式 $x-8\geqslant 0$ 的解集.

习题 1.1

A 组

1. 自然数集、整数集、有理数集、实数集通常各用哪个符号表示？它们分别是有限集还是无限集？

2. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空.

(1)$\frac{1}{4}$ ________ $\mathbf{N}$；　(2)π ________ $\mathbf{Z}$；　(3)1 ________ $\{1\}$；

(4)2 ________ $\varnothing$；　(5)-6 ________ $\mathbf{Q}$；　(6)0 ________ $\mathbf{Z}$.

3. 请指出下列对象的元素.

(1)方程 $x^2-9=0$ 的解集；

(2)由 1,3,5,7,5 构成的集合；

(3)由大于 1 并且不大于 10 的自然数组成的集合；

(4)2020 年中有 31 天的月份.

4. 用列举法表示下列集合.

(1)大于 0 小于 6 的整数的全体；

(2)方程 $4x-1=0$ 的解集；

(3)自然数中 3 的倍数的集合.

5. 用描述法表示下列集合.

(1)自然数中所有偶数的集合；

(2)不等式 $5x+3<0$ 的解集.

B 组

1. 用列举法表示下列集合.

(1)$\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|-\frac{7}{6}<x<3\right\}$；

(2)$\{x\,|\,x=3k-2,-2<k<2,k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 选用适当的方法表示下列集合.

(1)所有正方形所组成的集合；

(2)绝对值等于 5 的全体实数所组成的集合；

(3)除以 3 余 1 的所有整数所组成的集合；

(4)第三、四象限的点所组成的集合.

1.2　集合之间的关系

1.2.1　子集和真子集

思考

实数有相等关系、大小关系，如 $6=6$，$6<9$，$6>3$，等等，类比实数之间的关系，你会想到集合之间的什么关系？

观察下面的例子，你能发现两个集合间的关系吗？

(1)$A=\{2,4,6\}$，$B=\{2,4,6,8\}$；

(2)$A=\{x|x$ 是长方形$\}$，$B=\{x|x$ 是平行四边形$\}$.

可以看出，上述集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素.

一般地，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素，那么集合 A 就叫作集合 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A,$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

由上述子集的定义可知，任意一个集合 A 都是它自身的子集，即 $A\subseteq A$.

我们规定：空集是任意一个集合的子集，即对于任意一个集合 A 都有 $\varnothing\subseteq A$.

如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，那么集合 A 叫作集合 B 的**真子集**，记作

$$A\subsetneqq B \text{ 或 } B\supsetneqq A,$$

读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A".

我们常用平面上一个封闭曲线的内部表示一个集合[图 1-1(a)]. 如果集合 A 是集合 B 的真子集，则把表示 A 的区域画在表示 B 的区域的内部[图 1-1(b)]，这种图形通常叫作**维恩(Venn)图**.

议一议

符号"$\in$"表达的含义与符号"$\subseteq$"相同吗？它们有什么区别？

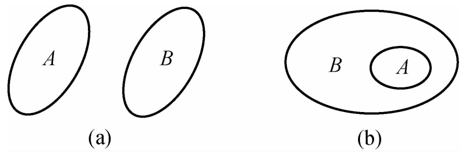


图 1-1

根据子集、真子集的定义可推知：

对于集合 A,B,C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

对于集合 A,B,C，如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

例 1 用适当的符号（$\subseteq$，$\supseteq$，$\in$，$\notin$）填空.

(1)$\varnothing$________$\{1,3,5,7,9\}$；

(2)3 ________$\{1,3,5,7,9\}$；

(3)$\{3\}$________$\{1,3,5,7,9\}$.

解 (1)因为空集是任何集合的子集，所以$\varnothing\subseteq\{1,3,5,7,9\}$.

(2)因为 3 是集合$\{1,3,5,7,9\}$中的一个元素，所以 $3\in\{1,3,5,7,9\}$.

(3)因为集合$\{3\}$中的元素都是集合$\{1,3,5,7,9\}$中的元素，所以$\{3\}\subseteq\{1,3,5,7,9\}$.

例 2 写出集合 $A=\{1,2,3\}$的所有子集和真子集.

分析 集合 A 中共有三个元素，要想不遗漏地写出其所有的子集，可按以下步骤来写：

(1)因为空集是所有集合的子集，所以首先写出$\varnothing$；

(2)写出由一个元素组成的子集，即$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$；

(3)写出由两个元素组成的子集，即$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{1,3\}$；

(4)写出由三个元素组成的子集，即$\{1,2,3\}$.

解 集合 A 的所有子集为

$$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}.$$

在上述子集中，除了集合 A 本身，即$\{1,2,3\}$外，其余的全为集合 A 的真子集.

做一做

1. 指出下列各组集合之间的关系.

(1)$A=\{x|x\geqslant 1\}$，$B=\{x|x=1\}$；

(2)$A=\{x|x$ 是正方形$\}$，$B=\{x|x$ 是四边形$\}$；

(3)$A=\{x|x=2k,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x=4m,m\in\mathbf{N}\}$；

(4)$A=\{x||x|=2\}$，$B=\{-2,1,2\}$.

2. 写出集合{红色，蓝色，绿色，黄色}的所有非空真子集.

1.2.2 集合相等

观察集合

$$A=\{1,2,3\}, B=\{x|0<x<4, x\in \mathbf{N}\}$$

可以看出，集合 A 中的元素和集合 B 中的元素完全相同，只是两个集合的表达方式不同.

一般地，如果集合 A 中的每个元素都是集合 B 中的元素，并且集合 B 中的每个元素都是集合 A 中的元素，那么就说**集合 A 等于集合 B**，记作 $A=B$. 这就是**集合相等**的定义.

议一议

集合 $A=\{x|x\in B\}$ 与集合 B 相等吗?

例 3 判断下列各组集合的关系.

(1) $A=\{2,3\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$；

(2) $M=\{-3,3\}$，$N=\{x|x^2-9=0\}$.

解 (1) $A\subsetneqq B$.

(2) 由 $x^2-9=0$ 解得 $x_1=3$，$x_2=-3$，所以集合 N 用列举法表示为 $\{-3,3\}$，则可看出这两个集合相等，即 $M=N$.

由集合相等的定义，可得：

如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；反之，如果 $A=B$，那么 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

知识延伸

当集合 A 不是集合 B 的子集时，记作

$$A\not\subseteq B \text{ 或 } B\not\supseteq A$$

读作"A 不包含于 B"或"B 不包含 A".

如果 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3,5\}$，则 $A\not\subseteq B$.

做一做

1. 指出下列各组集合之间的关系.

(1) $A=\varnothing$，$B=\{x|x^2+1=0\}$；

(2) $A=\{x|0<x\leqslant 3, x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{0,1,2,3\}$.

2. 判断集合 $\{x||x|=2\}$ 与集合 $\{x|x^2-4=0\}$ 的关系.

习题 1.2

A 组

1. 用适当的符号($\in$,$\notin$,$\subsetneqq$,$\supsetneqq$,$=$)填空.

(1)0 ________ $\varnothing$；　(2)$\varnothing$ ________ $\{\varnothing\}$；

(3)3 ________ $\{1,2\}$；　(4)$\{1,2\}$ ________ $\{1,2\}$；

(5)$\{x|1<x<7,x\in\mathbf{N}\}$ ________ $\{4,6\}$；

(6)$\{a,c\}$ ________ $\{a,b,c,d\}$.

2. 指出下列各组集合之间的关系.

(1)$P=\{x|x$ 是等腰三角形$\}$,$Q=\{x|x$ 是等边三角形$\}$；

(2)$M=\{x|x>1\}$,$N=\{x|x\geqslant 2\}$；

(3)$A=\{x|x-1=0\}$,$B=\{1,2\}$；

(4)集合 $A=\{x|x^2-3x-10=0\}$,$B=\{-2,5\}$.

3. 写出集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集和真子集.

B 组

1. 已知$\{x|x^2+bx+c=0\}=\{1\}$,求 b,c 的值.

2. 集合 U,S,T,F 如图 1-2 所示,下列关系中哪些是正确的？哪些是错误的？

(1)$S\subsetneqq U$；　(2)$F\subsetneqq T$；　(3)$S\subsetneqq T$；

(4)$S\supsetneqq F$；　(5)$S\subsetneqq F$；　(6)$F\subsetneqq U$.

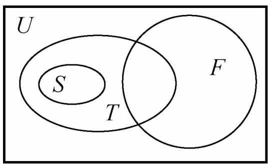


图 1-2

1.3　集合的运算

思考

过去我们只对数或式子进行算术运算或代数运算，那么集合与集合之间可以进行运算吗？

由两个或多个已知的集合按照某种指定的法则构造出一个新的集合即为集合的运算．为此我们引入集合的三个重要运算：交、并、补．

1.3.1　交集

观察集合

$$A=\{0,1,2,3,4,5\},B=\{1,2,3,6,7,8\},C=\{1,2,3\}$$

可以看出，集合 C 中的元素恰好是集合 A 与集合 B 所共有的元素．

一般地，像上述那样，给定两个集合 A,B，由既属于 A 又属于 B 的所有共同元素构成的集合叫作集合 A 与 B 的**交集**，记作

$$A\cap B,$$

读作“A 交 B”，可用图 1-3 所示的阴影部分来形象地表示．

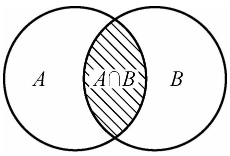


图 1-3

想一想

两个非空集合的交集可能是空集吗？试举例说明．

由交集的定义可知，对于任意两个集合 A,B 都有

$$A\cap B=B\cap A;$$
$$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing;$$
$$A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B.$$

例 1　已知 $A=\{-1,0,1,2,3\},B=\{1,3,5,7\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{1,3\}$，可用图 1-4 来表示．

动画
交集

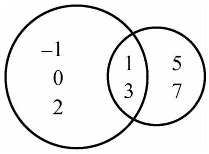


图 1-4

例 2 已知 $A=\{x \mid x$ 是等腰三角形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是直角三角形$\}$，求 $A \cap B$.

解 $A \cap B=\{x \mid x$ 是等腰三角形$\} \cap \{x \mid x$ 是直角三角形$\}$

$=\{x \mid x$ 是等腰直角三角形$\}$.

例 3 已知 $A=\{x \mid -1<x \leqslant 1\}$，$B=\{x \mid 0<x<4\}$，求 $A \cap B$.

分析 集合 A，B 是用描述法表示的集合，并且集合中的元素没法一一列举出来，因此可以结合数轴来解题.

解 在数轴上表示集合 A，B，如图 1-5 所示.

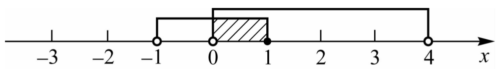


图 1-5

从图中容易看出，阴影部分为集合 A，B 的交集，即

$A \cap B=\{x \mid -1<x \leqslant 1\} \cap \{x \mid 0<x<4\}=\{x \mid 0<x \leqslant 1\}$.

例 4 已知 $A=\{(x,y) \mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y) \mid x+y=3\}$，求 $A \cap B$.

分析 集合 A，B 的元素是有序实数对 (x,y)，A，B 的交集就是二元一次方程组 $\begin{cases}4x+y=6\\x+y=3\end{cases}$ 的解集.

解 解方程组 $\begin{cases}4x+y=6\\x+y=3\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 所以

$$A \cap B=\{(x,y) \mid 4x+y=6\} \cap \{(x,y) \mid x+y=3\}$$
$$=\left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{cases}4x+y=6\\x+y=3\end{cases}\right\}$$
$$=\{(1,2)\}.$$

议一议

例 4 中集合 A，B 的交集 $\{(1,2)\}$ 能否写成 $\{1,2\}$？两者有什么区别呢？

做一做

求下列每组集合的交集.

(1) $A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$；

(2) $P=\{1,3,5\}$，$Q=\{2,4,6\}$；

(3) $A=\{x \mid x>-2\}$，$B=\{x \mid x \geqslant 1\}$；

(4) $A=\{(x,y) \mid x+2y=6\}$，$B=\{(x,y) \mid 5x-y=3\}$.

1.3.2 并集

观察下面三个集合

$M=\{-2,-1,0\}, N=\{1,2,3,4\}, P=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

可以看出，集合 P 是由集合 M 与集合 N 中的所有元素组成的.

一般地，像上述那样，对于给定的两个集合 A 和集合 B，由集合 A 和集合 B 中的所有元素组成的集合叫作集合 A 和集合 B 的**并集**，记作

$$A\cup B,$$

读作"A 并 B".

例如，集合

$$A=\{-2,0,2\}, B=\{0,3,5\}$$

的并集为

$$A\cup B=\{-2,0,2\}\cup\{0,3,5\}=\{-2,0,2,3,5\}.$$

由并集的定义可知，对于任意两个集合 A，B 都有

$$A\cup B=B\cup A;$$

$$A\cup A=A, A\cup\varnothing=A;$$

$$A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B.$$

集合 A 和集合 B 的并集可以用图 1-6 中的阴影部分来表示.

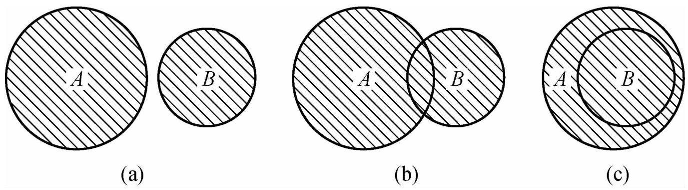


图 1-6

小提示

在求并集时，两个集合中相同的元素只列举一次，不能重复列举.

例 5　已知 $A=\{3,4,5,6\}, B=\{5,6,7,8\}$，求 $A\cup B$.

解　$A\cup B=\{3,4,5,6\}\cup\{5,6,7,8\}=\{3,4,5,6,7,8\}$.

例 6　已知 $A=\{x|-1<x\leqslant 2\}, B=\{x|0<x\leqslant 3\}$，求$A\cup B$.

分析　本题结合数轴进行解答比较直观.

解　将集合 A 和集合 B 在数轴上表示出来，如图 1-7 所示.

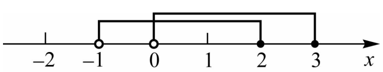


图 1-7

可以看出

$$\begin{aligned} A\cup B &=\{x|-1<x\leqslant 2\}\cup\{x|0<x\leqslant 3\} \\ &=\{x|-1<x\leqslant 3\}. \end{aligned}$$

例 7 某班同学参加数学、英语两个兴趣小组，规定每名同学必须至少参加其中的一个兴趣小组，有 19 名同学参加了数学兴趣小组，有 23 名同学参加了英语兴趣小组，其中 5 名同学既参加了数学兴趣小组又参加了英语兴趣小组，试问该班总人数是多少？

解 用 A，B 分别表示参加数学兴趣小组和英语兴趣小组的同学所组成的集合，由班上所有人组成的集合为 $A\cup B$. 由于有 5 名同学既属于 A 又属于 B，因此 $A\cup B$ 的元素数目等于

$$19+23-5=37,$$

即班上总共有 37 人.

做一做

求下列每组集合的并集.

(1) $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{f,g\}$；

(2) $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{5,6,7,8,9,10\}$；

(3) $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 9\}$；

(4) $A=\{x\mid 2x-3y+1=0\}$，$B=\{x\mid x+2y=0\}$.

1.3.3 全集和补集

动画

补集

在研究集合与集合的关系时，如果所要研究的集合都是某一给定集合的子集，则称这个给定的集合为**全集**，一般用 U 表示. 例如，在研究数集时，常常把实数集 **R** 作为全集.

如果给定的某一集合 A 是全集 U 的一个子集，则 U 中不属于 A 的所有元素所组成的集合叫作 A 在全集 U 中的**补集**，记作

$$\complement_U A,$$

读作"A 在 U 中的补集"，即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

用图形表示集合时，通常用矩形区域表示全集. 全集 U 与它的任意一个真子集 A 之间的关系可用图 1-8 来表示，其中阴影部分表示 A 在 U 中的补集.

小提示

如果全集 U 为实数集 **R**，则集合 A 在 U 中的补集也可写成 $\complement A$.

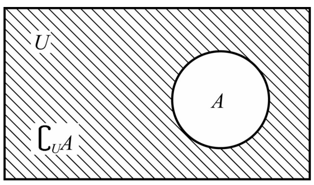


图 1-8

由补集的定义可知，对于任意集合 A 都有

$$A\cup \complement_U A=U, A\cap \complement_U A=\varnothing, \complement_U(\complement_U A)=A.$$

例 8　已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，集合 $A=\{3,4,5,6\}$，求 $\complement_U A$，$A\cap \complement_U A$，$A\cup \complement_U A$.

解　$\complement_U A=\{1,2,7\}$，$A\cap \complement_U A=\varnothing$，$A\cup \complement_U A=U$.

例 9　已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x>1\}$，求 $\complement_U A$.

解　$\complement_U A=\{x|x\leqslant 1\}$.

做一做

求下列每组集合的补集.

(1) $U=\{x|x$ 是小李所在班的所有学生$\}$，
$A=\{x|x$ 是小李所在班这次参加运动会的学生$\}$；

(2) $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{2,4,6,8\}$；

(3) $U=\{x|-3\leqslant x\leqslant 7\}$，$A=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$；

(4) U 是自然数集，A 是正整数集.

习题 1.3

A 组

1. 已知 $A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
2. 已知 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,c,d,f\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
3. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|-1<x<1\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U A\cap U$，$\complement_U A\cup U$，$A\cap \complement_U A$，$A\cup \complement_U A$.
4. 设全集 $U=\mathbf{Z}$，$A=\{x|x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in \mathbf{Z}\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

B 组

1. 已知 $A=\{(x,y)|2x+3y=1\}$，$B=\{(x,y)|3x-2y=3\}$，求 $A\cap B$(用列举法表示).
2. 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,5,7\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$\complement_U A\cap \complement_U B$，$\complement_U A\cup \complement_U B$.
3. 用集合语言表示图 1-9 中的阴影部分.

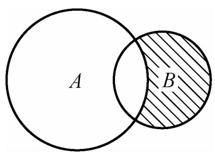
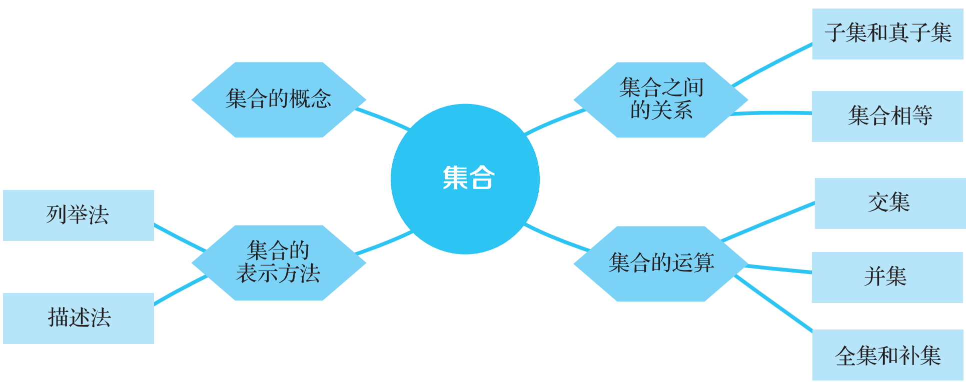


图 1-9

整理与复习

知识脉络图



主要知识点

1. 集合及其表示

集合是由某些指定的对象汇集在一起所组成的整体,而组成集合的每个对象称为这个集合的元素,如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;否则就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.

不含任何元素的集合叫作空集,用符号$\varnothing$表示.

集合中的元素有确定性、互异性和无序性.

常见的数集有自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}^*$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$.

表示集合的方法通常有两种:列举法和描述法.

2. 集合之间的关系

有的集合之间有包含关系,即 $A\subseteq B$(或者说 $B\supseteq A$),这时称 A 是 B 的子集,其中包含有两种情况:

(1)如果 B 中至少有一个元素不属于它的子集 A,则称 A 是 B 的真子集;

(2)A 与 B 的元素完全相同,则称 $A=B$.

注:$\varnothing$是任意集合的子集.

3. 集合的运算

(1)交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(2)并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(3)补集：$\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$. 其中，U 是全集，A 是 U 的子集.

本单元练习题

A 组

1. 选择题.

(1)设全集为 $\mathbf{Z}$，$A=\{$奇数$\}$，$B=\{$偶数$\}$，则(　　).

A. $A\subseteq B$　　　　B. $A=B$

C. $A\supseteq B$　　　　D. $A\cup B=\mathbf{Z}$

(2)集合$\{2,4,6\}$的子集有(　　)个，其中含有元素 2 的子集有(　　)个.

A. 6，2　　　　B. 7，3

C. 8，4　　　　D. 9，4

(3)集合 $A=\{x\mid 1<x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid 3<x<9\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{x\mid 1<x\leqslant 7\}$　　　　B. $\{x\mid 3<x\leqslant 7\}$

C. $\{x\mid 3<x<9\}$　　　　D. $\{x\mid 1<x<9\}$

2. 用适当的符号($\in$，$\notin$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，$=$)填空.

(1)a ________ $\{a,b,c,d\}$；

(2)$\{a\}$ ________ $\{a,b,c,d\}$；

(3)0 ________ $\{a,b,c,d\}$；

(4)$\{1\}$ ________ $\{x\mid x^2=1\}$；

(5)$\{-5,5\}$ ________ $\{x\mid x^2-25=0\}$；

(6)$\{x\mid x>1\}$ ________ $\mathbf{R}$.

3. 用适当的方法表示下列集合.

(1)绝对值不大于 5 的所有实数；

(2)由小于 6 的所有正整数组成的集合；

(3)方程组$\begin{cases}x-y=3,\\x+y=5\end{cases}$的解集.

4. 已知集合 $A=\{-2,-1,0\}$，$B=\{0,1,2\}$，写出 $A\cup B$ 的所有子集和真子集.

5. 设全集 $U=\{-7,-5,-3,-1,0,1,3,5,7\}$，集合 $A=\{-5,-3,-1,0\}$，$B=\{0,1,3\}$，求：

(1)$A\cap B$，$A\cup B$；

(2)$\complement_U A$，$\complement_U B$.

6. 已知集合 $A=\{a,b,2\}$，$B=\{2a,2,b^2\}$，且满足 $A=B$，求 a，b 的值.

B 组

1. 图 1-10 中的全集为 U，集合 A 和集合 B 都是 U 的子集，试用集合语言表示图中的阴影部分.

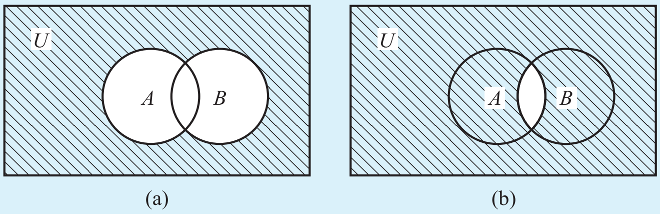


图 1-10

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$，求：

(1) $A\cap B$，$A\cup B$；

(2) $\complement_U A$，$\complement_U B$；

(3) $\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$；

(4) $\complement_U(A\cap B)$，$\complement_U(A\cup B)$.

3. 某学校经管专业共有 50 人同时参加计算机和英语考核，其中，计算机考核合格的人数为 33 人，英语考核合格的人数为 27 人，两科考核都合格的人数为 20 人，求两科考核均不合格的人数.

信息技术应用

利用公式编辑器在 Word 文档中录入公式并保存

在 Word 文档中编辑数学公式比较麻烦，因为里面涉及很多的符号，而这些符号不能直接在文档中编辑出来，因此要想在 Word 文档中编辑数学公式，就一定要借助 MathType 公式编辑器，那么如何在 Word 文档中录入数学公式呢？又该如何将公式保存到 Word 中呢？在这里我们以公式编辑器 6.0 版本为例，简单介绍在 Word 中利用公式编辑器录入数学公式并保存的方法. 同学们可提前从网上下载软件并安装好.

具体操作步骤如下：

1. 启动公式编辑器

（1）在 Word 中打开 MathType 的方法有两种：一是单击“MathType”下面的“Insert Display Equation（插入显示公式）”按钮，二是单击“插入”选项卡下的“对象”按钮，在打开的“对象”对话框中选择“MathType 6.0 Equation”选项，单击“确定”按钮，如图 1-11 所示.

图 1-11

（2）打开 MathType 后，直接在 MathType 的工作区域中，利用工具栏中的各种符号与模板进行相应的编辑，如图 1-12 所示.

2. 利用公式编辑器录入公式

在这里我们通过录入“$\frac{4}{5}$”“$x_1=\sqrt{a+b}$”和方程组“$\begin{cases} x+2y=1, \\ 3x-5y=1. \end{cases}$”，介绍录入公式的方法.

（1）录入“$\frac{4}{5}$”.

①在公式编辑器的工具栏界面中单击第 2 行左起第 2 个按钮，在下拉框中单击“分数”按钮，在输入区中出现分数模板.

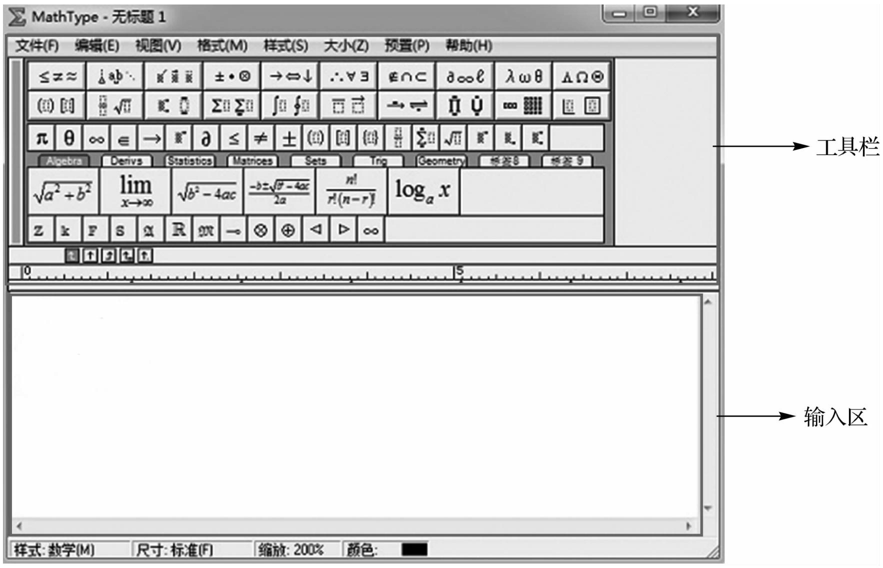


图 1-12

②分别在分母处输入“5”，在分子处输入“4”.

③输入完成后退出公式编辑器，即可在 Word 文档中看到录入的“$\frac{4}{5}$”.

(2)录入“$x_1=\sqrt{a+b}$”.

①在公式编辑器的输入区中录入 x，在工具栏界面中单击第 2 行左起第 3 个按钮，在下拉框中单击第 1 行第 2 个按钮(“下标”按钮)，在活动单元中输入下标 1，然后单击(或按“→”键)，在光标闪烁处输入等号.

②在工具栏界面中单击第 2 行左起第 2 个图标，在下拉框中单击“根式”按钮，在活动单元中输入“$a+b$”.

③输入完成后退出公式编辑器，即可在 Word 文档中看到录入的“$x_1=\sqrt{a+b}$”.

(3)录入方程组“$\begin{cases}x+2y=1,\\3x-5y=1.\end{cases}$”.

①在公式编辑器的工具栏界面中单击第 2 行左起第 1 个按钮，在下拉框中单击倒数第 4 行左起第 1 个按钮.

②在工具栏界面中单击第 2 行右起第 2 个按钮，在下拉框中单击第 1 行中间的按钮. 输入区中出现由两个方程组成的方程组模板.

③分别在两个活动单元中输入两个方程，退出公式编辑器，即可在 Word 文档中看到录入的方程组“$\begin{cases}x+2y=1,\\3x-5y=1.\end{cases}$”.

除了以上例子，同学们还可以在软件中探索其他模板的功能，录入各种不同的公式，如我们以后会学习的圆锥曲线方程，如图 1-13 所示.

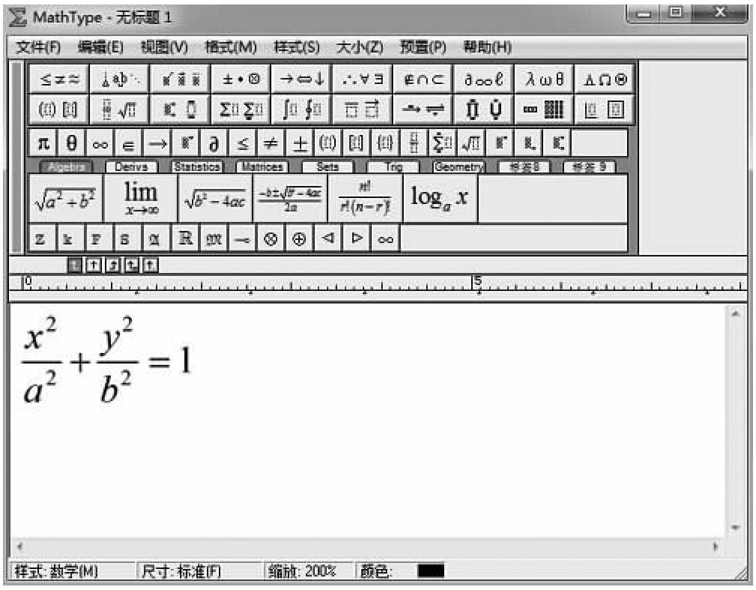


图 1-13

3. 将 MathType 公式保存到 Word 文档中

编辑好公式以后，直接关闭 MathType 窗口，会弹出一个提示框，提示是否进行保存，单击“是”按钮，公式就被保存到 Word 文档中，与 Word 文档中的内容成为一体，字号字体等也都一致；也可以直接在公式编辑器中对已经编辑好的公式进行复制，然后粘贴到 Word 文档中.

提示：如果公式编辑器窗口是通过双击桌面上的 MathType 图标来打开的，那就不能直接关闭窗口，只能将公式复制粘贴到 Word 文档中. 其实不管采用哪种打开方式，采用复制粘贴的方法都可以将公式保存到 Word 文档中.

做一做

在 Word 文档中利用公式编辑器录入以下公式.

(1) $2x^2-4x+2=0$； (2) $x=\sqrt{(a+b)^2}$；

(3) $4\notin\{x|x>4\}$； (4) $\begin{cases}2x+2y<7,\\3x-y\leqslant 5.\end{cases}$

— 小提示 —

若要输入符号“$\leqslant$”和“$\geqslant$”，应先在公式编辑器中输入“$\leq$”和“$\geq$”，然后选中要改变字体的符号，再选择“样式”→“其他”命令，在打开的对话框中选择“Euclid Math Two”即可.

阅读与拓展

康托尔和集合论

康托尔是 19 世纪末 20 世纪初德国伟大的数学家，集合论的创立者，数学史上最富有想象力和最有争议的人物之一. 19 世纪末，他所从事的关于连续性和无穷的研究从根本上背离了数学中关于无穷的使用与解释的传统，从而引起了激烈的争论乃至严厉的谴责. 然而数学的发展最终证明康托尔是正确的. 他所创立的集合论被誉为 20 世纪最伟大的数学创造. 集合概念大大扩充了数学的研究领域，给数学结构提供了一个基础. 集合论不仅影响了现代数学，而且深深影响了现代哲学和逻辑.

1. 集合论的背景

集合论在 19 世纪诞生的基本原因来自数学分析基础的批判运动. 数学分析的发展必然涉及无穷过程、无穷小和无穷大这些无穷概念. 在 18 世纪，无穷概念没有精确的定义，这使微积分理论不仅遇到严重的逻辑困难，而且使无穷概念在数学中信誉扫地. 19 世纪上半叶，柯西给出了极限概念的精确描述，并在此基础上建立起连续、导数、微分、积分及无穷级数的理论. 正是这 19 世纪发展起来的极限理论相当完美地解决了微积分理论所遇到的逻辑困难. 但是，柯西并没有彻底完成微积分的严密化. 柯西思想有一定的模糊性，甚至产生逻辑矛盾. 19 世纪后期的数学家们发现使柯西产生逻辑矛盾的原因在于奠定微积分基础的极限概念. 严格地说，柯西的极限概念并没有真正地摆脱几何直观，并没有确实地建立在纯粹严密的算术的基础上. 于是，许多受分析基础危机影响的数学家致力于分析的严格化. 在这一过程中，他们都发现一定要涉及对微积分的基本研究对象——连续函数的描述，因为数与连续性的定义，必须涉及无限集合这个概念. 因此，无限集合在数学上的存在问题又被提出来. 这自然也就导致数学家开展寻求无限集合理论基础的工作. 总之，为寻求微积分纯粹严密的算术化，必须解决无限集合的性质问题，这成了集合论产生的一个重要原因.

2. 集合论的建立

康托尔在柏林大学的导师是库曼、克罗内克和外尔斯托拉斯. 库曼教授是数论专家，他以引进理想数并大大推动费马大定理的研究而举世闻名. 克罗内克是一位大数学家，当时许多人都以得到他的赞许为荣. 外尔斯托拉斯既是一位优秀教师又是一位大数学家，他的演讲为数学分析奠定了一个精确而稳定的基础. 例如，微积分中著名的观念就是由他首先引进的. 正是受这些人的影响，康托尔对数论产生兴趣，并集中精力对高斯留下的问题做了深入的研究. 他的毕业论文就是关于素数问题的. 这是高斯在《算术研究》中提出而未解决的问题. 这篇论文写得相当出色，它足以证明康托尔具有深刻的洞察力和对优秀思想的继承能力. 然而，他的超穷集合论的创立并没有受惠于早期对数论的研究. 相反，他很快接受了数学家海涅的建议而转向了其他领域. 海涅鼓励康托尔研究一个十分有趣，也较困难的问题：任意函数的三角级数的表达式是否唯一？ 对康托尔来说，这个问题是促使他建立集合论的最直接原因. 函数可用三角级数表示，最早是 1822 年傅

里叶提出来的. 此后，对于间断点的研究逐渐成为分析领域中引人注目的问题，从19世纪30年代起，不少杰出的数学家从事着对不连续函数的研究，并且都在一定程度上与集合这一概念挂起了钩. 这就为康托尔最终建立集合论创造了条件. 1870年，海涅证明，如果表示一个函数的三角级数在区间$[-\pi,\pi]$中去掉函数间断点的任意小邻域后剩下的部分是一致收敛的，那么级数是唯一的. 至于间断点的函数情况如何，海涅没有解决. 康托尔开始着手解决这个以如此简洁的方式表达的唯一性问题. 于是，他跨出了集合论的第一步.

康托尔一下子就表现出比海涅更强的研究能力. 他决定尽可能多地取消限制，当然这会使问题本身增加难度. 为了给出最有普遍性的解，康托尔引进了一些新的概念. 在其后的三年中，康托尔先后发表了五篇有关这一题目的文章. 1872年，当康托尔将海涅提出的一致收敛的条件减弱为函数具有无穷个间断点的情况时，他已经将唯一性结果推广到允许例外值是无穷集的情况. 康托尔1872年的论文是从间断点问题过渡到点集论的极为重要的环节，使无穷点集成为明确的研究对象.

集合论里的中心难点是无穷集合这个概念本身. 从希腊时代以来，无穷集合很自然地引起数学家和哲学家的注意. 而这种集合的本质以及看来是矛盾的性质，很难让人像有穷集合那样来把握它. 所以对这种集合的理解没有任何进展. 早在中世纪，人们就已经注意到这样的事实：如果从两个同心圆出发画射线，那么射线就会在这两个圆的点与点之间建立一一对应关系，然而两圆的周长是不一样的. 16世纪，伽利略举例说，可以在两个不同长的线段ab与cd之间建立一一对应关系，从而想象出它们具有同样的点.

伽利略又注意到正整数可以和它们的平方构成一一对应关系，只要使每个正整数同它们的平方对应起来就行了：

$$\begin{array}{cccccccc}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & \cdots\end{array}$$

但这导致无穷大的不同的“数量级”，伽利略以为这是不可能的. 因为所有无穷大都一样大.

不仅是伽利略，在康托尔之前的数学家大多不赞成在无穷集之间使用一一对应的比较方法，因为它将出现“部分等于全体”的矛盾. 高斯明确表态：“我反对把一个无穷量当作实体，这在数学中是从来不允许的. 无穷只是一种说话的方式……”柯西也不承认无穷集合的存在. 他不赞成“部分同整体构成一一对应关系”这个观点. 当然，潜无穷在一定条件下是便于使用的，但若把它作为无穷观则是片面的. 数学的发展表明，只承认潜无穷，否认实无穷是不行的. 康托尔把时间用到对研究对象的思考中. 他要用事实来说明问题，说服大家. 康托尔认为，一个无穷集合能够和它的部分构成一一对应关系不是什么坏事，它恰恰反映了无穷集合的一个本质特征. 对康托尔来说，如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应关系，它就是无穷的. 它定义了基数、可数集合等概念，并且证明了实数集是不可数的，代数集是可数的. 康托尔最初的证明发表在1874年的一篇题为《关于全体实代数数的特征》的文章中，这标志着集合论的诞生.

随着实数不可数性质的确立，康托尔又提出一个新的、更大胆的问题. 1874年，他考虑能否建立平面上的点和直线上的点之间的一一对应关系. 从直观上说，平面上的点显然要比线上的点多得多. 康托尔起初也是这样认为的. 但三年后，康托尔宣布：不仅平面和直线之间可以建立一一对应关系，而且与一般的n维连续空间也可以建立一一对应关系！这一结果是出人意料的. 就连康托尔本人也觉得“简直不能相信”. 然而这又是明摆着的事实，它说明直观是靠不住的，只有靠理性才能发现真理，避免谬误.

n维连续空间与一维连续统具有相同的基数这一发现，促使康托尔在1879—1884年集中于

线性连续统的研究，相继发表了六篇系列文章，汇集成《关于无穷的线性点集》. 前四篇直接给出了集合论的一些重要结果，包括集合论在函数论等方面的应用. 第五篇发表于 1883 年，它的篇幅最长，内容也最丰富. 它不仅超出了线性点集的研究范围，而且给出了超穷数的一个完全一般的理论，其中借助良序集的序型引进了超穷序数的整个谱系；同时还专门讨论了由集合论产生的哲学问题，包括回答反对者们对康托尔所采取的实无穷立场的非难. 这篇文章对康托尔是极为重要的. 1883 年，康托尔将它以《一般集合论基础》为题作为专著单独出版.

3. 集合论的意义

集合论是现代数学中重要的基础理论. 它的概念和方法已经渗透到代数、拓扑和分析等许多数学分支及物理学和质点力学等一些自然科学部门，为这些学科提供了奠基的方法，改变了这些学科的面貌. 几乎可以说，如果没有集合论的观点，人们就很难对现代数学有一个深刻的理解. 所以，集合论的创立不仅对数学基础的研究有重要意义，而且对现代数学的发展有深远的影响.

康托尔一生受过很多磨难. 他及其集合论受到粗暴攻击长达十年. 康托尔虽曾一度对数学失去兴趣而转向哲学、文学，但始终未放弃集合论. 康托尔能不顾众多数学家、哲学家甚至神学家的反对，坚定地捍卫超穷集合论，与他的科学家气质和性格是分不开的. 康托尔个性的形成在很大程度上受到他父亲的影响. 他的父亲是在福音派新教的影响下成长起来的一位精明的商人，明智且有天分. 他父亲的那种深笃的宗教信仰和强烈的使命感始终带给康托尔勇气和信心. 正是这种坚定、乐观的信念使康托尔义无反顾地走向数学家之路并真正取得了成功.

今天，集合论已成为整个数学大厦的基础，康托尔也因此成为世纪之交的最伟大的数学家之一.

（摘自卢介景. 无穷统帅：康托尔[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 有删改）