巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑 王晓军
责任编辑 胡思佳
封面设计 蒋碧君

• 福建省普通高校专升本考试 •

复习教程	大学语文
	高等数学
	大学英语
	信息技术基础
	思想政治理论

扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-30812-2
定价: 69.80元

福建省普通高校专升本考试复习教程·高等数学
华腾新思专升本考试研究中心 编
上海交通大学出版社

华腾新思

依据福建省普通高校专升本考试大纲编写

福建省

华腾新思专升本考试研究中心 编

普通高校专升本考试复习教程

高等数学

赠册 参考答案及解析

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

依据福建省普通高校专升本考试大纲编写

福建省

华腾新思专升本考试研究中心　编

普通高校专升本考试复习教程

高等数学

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书分为“函数、极限与连续”“导数与微分”“微分中值定理与导数的应用”“不定积分”“定积分及应用”“向量代数与空间解析几何”“常微分方程”七章内容.根据知识间的关系，每章又细分为不同的小节，每一节设置了“知识导图”“精讲精析”“真题链接”“巩固练习”四个栏目.“知识导图”栏目罗列了本节主要的知识内容以及知识间的结构，可帮助考生梳理和记忆各知识间的逻辑顺序；“精讲精析”栏目细致讲解了每一个考生应熟悉或掌握的知识内容，并设置“小贴士”栏目，能够帮助考生理解知识内容，夯实基础；“真题链接”栏目对真题进行解析，可使考生准确把握考点；“巩固练习”栏目根据本节知识内容，结合考试要求和考试真题中的高频考点，设置了有针对性的练习题，可帮助考生趁热打铁，巩固本节所学知识.章后还设置了本章总结与训练，其中的“题型荟萃”展示了重要知识点的常见题型及解决方法，帮助学生快速找到应对策略，“综合训练”提供了章节复习题，帮助学生强化对知识的掌握.本书另附有“巩固练习”与“综合训练”的参考答案及解析.

本书既可作为参加福建省普通高校专升本考试的考生的复习资料，也可作为广大专科学校学生的学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

福建省普通高校专升本考试复习教程. 高等数学 / 华腾新思专升本考试研究中心编. — 上海 ：上海交通大学出版社，2024.6

ISBN 978-7-313-30812-2

Ⅰ. ①福… Ⅱ. ①华… Ⅲ. ①高等数学—成人高等教育—升学参考资料 Ⅳ. ①G724.4

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 108719 号

福建省 普通高校专升本考试复习教程 · 高等数学

FUJIAN SHENG PUTONG GAOXIAO ZHUANSHENGBEN KAOSHI FUXI JIAOCHENG · GAODENG SHUXUE

华腾新思专升本考试研究中心　编

出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号

邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208

印　　制：三河市骏杰印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16　　印　　张：14.75

字　　数：415 千字

版　　次：2024 年 6 月第 1 版　　印　　次：2024 年 6 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-313-30812-2　　电子书号：ISBN 978-7-89424-705-6

定　　价：69.80 元

PREFACE 前言

通过多年的摸索与实践，福建省普通高等学校专升本考试（以下简称福建省专升本考试）已日渐成熟. 从考试内容和考试形式上来看，参加福建省专升本考试的考生将面临更大的挑战，多数考生为如何在短期内熟悉考试形式、了解考试内容、把握考试重难点、弥补“短板”备受困扰，急需通过高效的学习来快速提升应试能力，在考试中脱颖而出.

为了帮助广大考生在较短的时间内高效、便捷、准确地把握考试的脉络，我们特组织相关专家学者根据福建省专升本考试各科目的大纲要求，深入研究了近几年福建省专升本考试的命题情况和历年真题，针对命题中出现的最新变化，精心编写了这套福建省普通高校专升本考试复习用书，供广大考生备考使用.

本书是该套图书中的《福建省普通高校专升本考试复习教程 · 高等数学》. 高等数学是福建省专升本考试的公共科目之一，其地位非常重要，涉及的知识面非常广泛. 学好高等数学课程，不仅能为广大考生今后学习其他课程打下良好的基础，也可以为考生以后走上工作岗位提供必要的指导.

本书在编写时紧扣最新考试大纲，根据高等数学科目历年考试规律和命题方向，精心梳理了考试大纲所要求的知识点，内容充实、结构严谨、重点突出、指导性强，是广大考生进行考试复习和知识储备的重要参考资料.

本书具有以下鲜明特色：

1. 依据最新大纲，体现命题趋势

本书在编写时紧扣福建省专升本考试高等数学科目的考试大纲，深入、细致地研究了大纲中的考试目标、考核要求、试卷结构和题型示例，凝聚了知名专家学者的经验和智慧，旨在帮助考生切中考试重点，少走弯路，缩短备考时间，提高备考效率.

2. 体例科学，结构合理

本书根据知识间的关系，每章又细分为不同的小节，每一节设置了“知识导图”“精讲精析”“真题链接”“巩固练习”四个栏目.

“知识导图”罗列了本节主要的知识点及知识点之间的关系，帮助考生梳理和记忆各知识点的逻辑关系；“精讲精析”细致讲解了考生应熟悉或掌握的每一个知识点，并设置“备考提示”小栏目，使考生深刻理解知识点，正确把握难点，拓展解题思路；“真题链接”对真题进行解析，使考生准确把握考点；“巩固练习”根据本节知识点，结合考试要求和考试真题中的高频考点，设置了针对性的练习题，帮助考生趁热打铁，巩固本节所学知识. 章后还设置了本章总结与训练，其中的“题型荟萃”展示了重要知识点的常见题型及解决方法，帮助学生快速找到应对策略，“综合训练”提供了章

节复习题，帮助学生强化对知识的掌握. 本书另附有“巩固练习”与“综合训练”的参考答案及解析.

3. 知识点翔实，讲解深入浅出

本书涵盖考纲要求的所有考点，全书知识讲解深入浅出，既全面透彻，又通俗易懂，方便考生迅速理清头绪，准确把握考试脉络，有针对性地进行复习.

衷心希望本套图书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助. 对书中的不足之处，敬请各位专家、同仁及读者不吝指正.

最后，预祝广大考生在福建省专升本考试中取得好成绩，进入心仪的大学！

华腾新思专升本考试研究中心

CONTENTS 目录

第一章 函数、极限与连续

函数、极限与连续

第一节 函数

知识导图

- 函数
  - 函数的概念
    - 函数的定义
    - 分段函数
    - 复合函数
    - 反函数
    - 隐函数
  - 函数的基本性质
    - 函数的有界性
    - 函数的奇偶性
    - 函数的单调性
    - 函数的周期性
  - 基本初等函数
    - 幂函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 三角函数
    - 反三角函数

精讲精析

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1 设 D 是一个实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对 D 中的每一个数 x，在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的数 y 与之对应，那么称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数，记为

$$y=f(x),x\in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域.

函数的定义中，对 D 中的每一个数 x，按照对应法则，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在 x 处的函数值，记作 $f(x)$. 当自变量 x 取遍 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

注: 函数的定义域通常由问题的实际背景确定，如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数的集合.

例 1 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{x+3}$；　(2)$y=\dfrac{1}{x+2}$；　(3)$y=\ln(x-1)$.

【解析】 (1)因为二次根式的被开方数不小于 0，所以

$$x+3\geqslant 0,$$

解得

$$x\geqslant -3.$$

故 $y=\sqrt{x+3}$的定义域为$[-3,+\infty)$.

(2)因为分式的分母不能为 0，所以

$$x+2\neq 0,$$

即

$$x\neq -2.$$

故 $y=\dfrac{1}{x+2}$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(3)因为对数的真数大于 0，所以

$$x-1>0,$$

解得

$$x>1.$$

故 $y=\ln(x-1)$的定义域为$(1,+\infty)$.

例 2　函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[1,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

函数例 2 讲解

【答案】 D

【解析】 使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid x-3\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 3\}$，使 $\arcsin\dfrac{1}{x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1\right\}=\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\geqslant 3\}\cap\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}=\{x\mid x\geqslant 3\}$，即 $[3,+\infty)$. 故选 D.

2. 分段函数

定义 2　在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

例如，分段函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 它的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，对应的函数值 $f(x)=-x$；当 $x\in[0,+\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=x$.

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(1-x), & x<1,\\ 2^{x-2}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(-1)+f(\log_2 4)=$ ________.

【答案】 3

【解析】 由题意，得 $f(-1)=1+\log_2 2=2$，$f(\log_2 4)=f(2)=2^{2-2}=1$，所以 $f(-1)+f(\log_2 4)=3$.

3. 复合函数

定义 3　设 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 是两个函数. 如果 $y=f(u)$ 的定义域包含函数 $u=g(x)$ 的值域，那么定义在 $u=g(x)$ 定义域上的函数 $y=f[g(x)]$ 称为由 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 构成的复合函数，u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数，即按“先 g 后 f”的次序复合的函数，通常记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

例如，取 $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$，则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 构成的复合函数为 $f[g(x)]=\sin x^2$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 构成的复合函数为 $g[f(x)]=\sin^2 x$.

注：(1) 不是任何两个函数都可以构成复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数. 因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，而 $u=2+x^2\geqslant 2$，所以两函数不满足复合函数的条件.

(2) 复合函数可以有多个中间变量，如 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$ 复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$，这里 u，v 都是中间变量.

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

【解析】 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 1,\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

例 5　下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1)$y=e^{-x}$;　(2)$y=\sin^2(1+2x)$;　(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

【解析】 (1)$y=e^{-x}$是由 $y=e^u$ 与 $u=-x$ 复合而成的.

(2)$y=\sin^2(1+2x)$是由 $y=u^2$,$u=\sin v$,与 $v=1+2x$ 复合而成的.

(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$是由 $y=\arccos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=\tan w$,$w=a^2+x^2$ 复合而成的.

4. 反函数

定义 4　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 $f(D)$. 如果对任一 $y\in f(D)$,都存在唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,即确定了一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,那么称这个新确定的函数为 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$. 由于习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以将反函数中的 x 与 y 互换位置,即记为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

注:从函数图像上来看,两个互为反函数的函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 6　求函数 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$的反函数.

【解析】 在 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$两边同时乘 $2x+1$,移项整理得

$$x(3-2y)=5+y,$$

等号两边同时除以 $3-2y$,得

$$x=\frac{5+y}{3-2y}.$$

故函数 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$的反函数为 $y=\frac{5+x}{3-2x}$.

小贴士

求函数 $y=f(x)$的反函数,通常是把解析式 $y=f(x)$变形为 x 关于 y 的等式 $x=g(y)$,然后互换 x 与 y 的位置,得到 $y=g(x)$,函数 $y=g(x)$即为函数 $y=f(x)$的反函数.

例 7　求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数.

【解析】 分别以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的两边为指数,e 为底数,得

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1},$$

移项整理得

$$\sqrt{x^2+1}=e^y-x,$$

等号两边同时平方,整理得

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数为 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

5. 隐函数

定义 5　如果变量 x,y 满足方程 $F(x,y)=0$,且在一定条件下,当 x 取某区间内的任一值时,相应地总

有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间确定了一个隐函数 $y=f(x)$.

例如，方程 $x^2+y^2=1$ 在 $[-1,1]$ 上确定了两个隐函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

二、函数的基本性质

1. 函数的有界性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，或称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数. 若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在 $[1,+\infty)$ 上有界.

例 8 判断下列函数在给定区间上是否有界.

(1) $y=x, x\in(-\infty,+\infty)$；　　(2) $y=\frac{1}{x^2+1}, x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) $y=\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,0)$；　　(4) $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$.

【解析】 (1) 显然，函数 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

(2) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，

$$\left|\frac{1}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{1}=1,$$

所以函数 $y=\frac{1}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(3) 因为当 $x\in(-\infty,0)$ 时，

$$|\mathrm{e}^x|<\mathrm{e}^0=1,$$

所以函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上有界.

(4) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，

$$|\arctan x|<\frac{\pi}{2},$$

所以函数 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的奇偶性

定义 7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且 D 关于原点对称，即对任一 $x\in D$，都有 $-x\in D$. 若

$$f(-x)=f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；若

$$f(-x)=-f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

注：从函数图像上看，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例 9 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2(1+x^2)$；　　(2) $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

【解析】 (1)因为函数 $f(x)=x^2(1+x^2)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=(-x)^2[1+(-x)^2]=x^2(1+x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2(1+x^2)$ 是偶函数.

(2)因为函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=(-x)[(-x)+1][(-x)-1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x(x+1)(x-1)$ 是奇函数.

小贴士

在判断函数的奇偶性时,一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称,再判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

3. 函数的单调性

定义 8 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的;若对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.

例 10 判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x},x\in(-\infty,1)$; (2) $f(x)=x^2-2x,x\in(-\infty,1)$.

【解析】 (1)任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$,且 $x_1<x_2$,则

$$1-x_1>1-x_2>0,$$

从而

$$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2},$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调增加.

(2)任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$,且 $x_1<x_2$,则

$$x_1+x_2<2,x_2-x_1>0,$$

从而

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)=(x_2+x_1-2)(x_2-x_1)<0,$$

即得

$$f(x_1)>f(x_2).$$

故 $f(x)=x^2-2x$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调减少.

小贴士

作差法与作商法是判断函数单调性过程中常用的比较大小的方法，需要注意的是，使用作商法时，要考虑函数值的正负.

4. 函数的周期性

定义 9　设函数 $f(x)$的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对任一 $x\in D$，有$(x+T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，称 T 为 $f(x)$的一个周期. 如果函数 $f(x)$的所有周期中，存在一个最小的周期 T_0，那么称 T_0 为 $f(x)$的最小正周期.

注：并非每个周期函数都有最小正周期. 例如，狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期，由于不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

例 11　判断下列函数的周期性，如果是周期函数，写出它们的最小正周期.

(1) $f(x)=\tan 2x$；　(2) $f(x)=x\tan x$；　(3) $f(x)=|\sin 2x|$.

【解析】　(1)函数 $f(x)=\tan 2x$ 是周期函数，它的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$.

(2)函数 $f(x)=x\tan x$ 不是周期函数.

(3)函数 $f(x)=|\sin 2x|$是周期函数，它的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$.

小贴士

如果函数 $f(x)$的周期是 T，那么函数 $f(\omega x)(\omega>0)$的周期是$\frac{T}{\omega}$.

三、基本初等函数

1. 幂函数

形如 $y=x^\alpha$($\alpha\in\mathbf{R}$ 为常数)的函数称为幂函数. 当 $\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 的图像如图 1-1 所示.

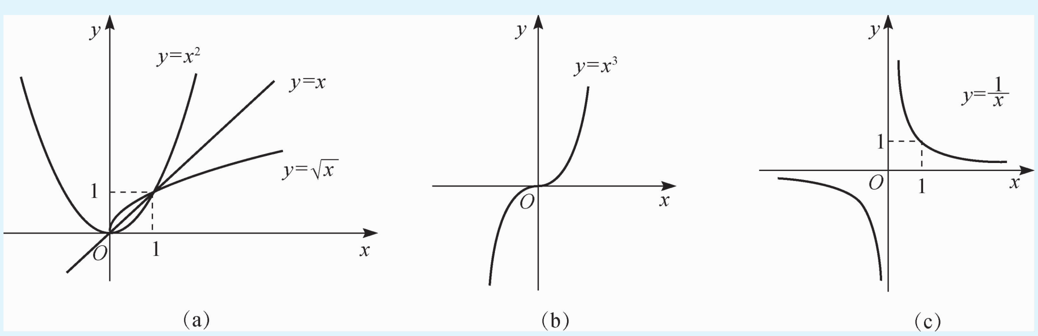


图 1-1

幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图像恒过点(1,1). 当 $\alpha>0$ 时,幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加;当 $\alpha<0$ 时,幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

备考提示

指数幂及其运算性质:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\ a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}};\ a^m a^n=a^{m+n};\ (a^m)^n=a^{mn};\ (ab)^m=a^m b^m.$$

其中 $a>0,b>0,m\in\mathbf{R},n\in\mathbf{R}$.

2. 指数函数

形如 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)的函数称为指数函数. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $(0,+\infty)$,它的图像如图 1-2 所示.

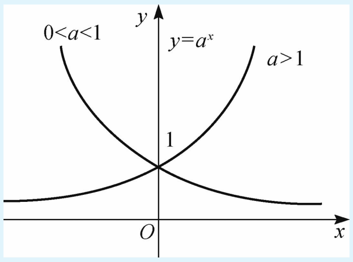


图 1-2

指数函数 $y=a^x$ 的图像恒过点(0,1). 当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少.

3. 对数函数

形如 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$)的函数称为对数函数. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$,值域为 $\mathbf{R}$,它的图像如图 1-3 所示.

特别地,以 10 为底的对数函数称为常用对数函数,简记为 $y=\lg x$;以 e(e=2.718 28…是一个无理数)为底的对数函数称为自然对数函数,简记为 $y=\ln x$.

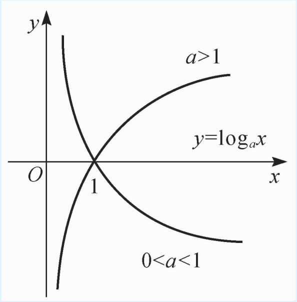


图 1-3

对数函数 $y=\log_a x$ 的图像恒过点(1,0). 当 $a>1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加;当 $0<$

$a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

对于确定的实数 $a(a>0$ 且 $a\neq1)$，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

对数的运算性质：

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$；　　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

$\log_a M^n=n\log_a M$；　　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（换底公式）.

其中 $a>0$ 且 $a\neq1$；$b>0$；$c>0$ 且 $c\neq1$；$M>0$，$N>0$；$n\in\mathbf{R}$.

4. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$ 统称为三角函数，它们的图像如图 1-4 所示.

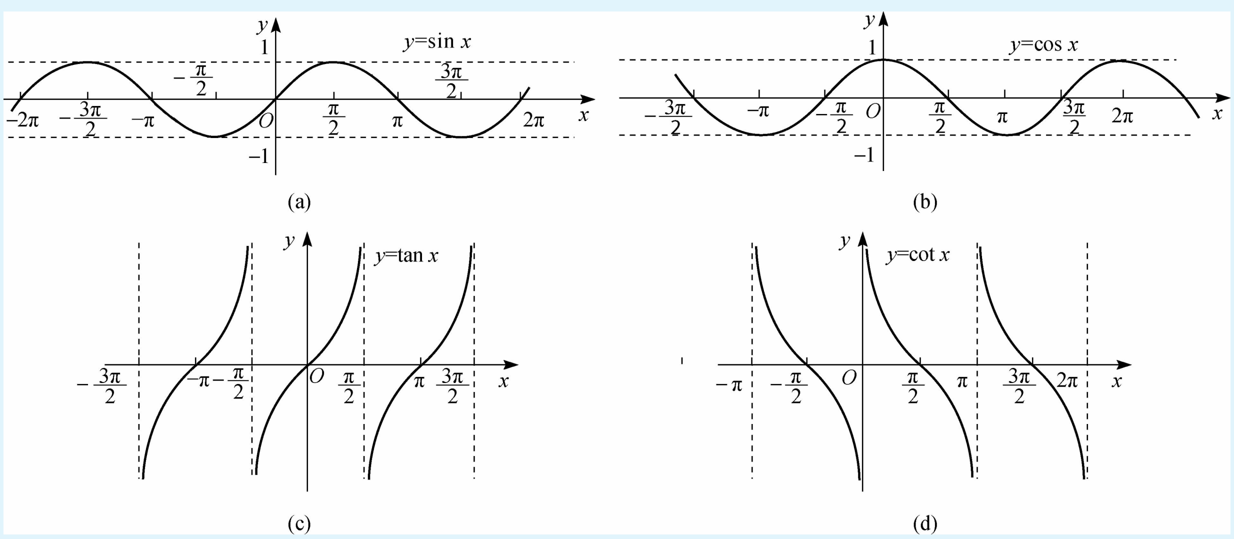


图 1-4

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$；正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$；余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $\mathbf{R}$.

备考提示

三角函数的常用公式：

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$；　　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；　　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；　　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

5. 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，图像如图 1-5(a)所示.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数，称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，图像如图 1-5(b)所示.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数，称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，图像如图 1-5(c)所示.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数，称为反余切函数，记作 $y=\text{arccot}\, x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,\pi)$，图像如图 1-5(d)所示.

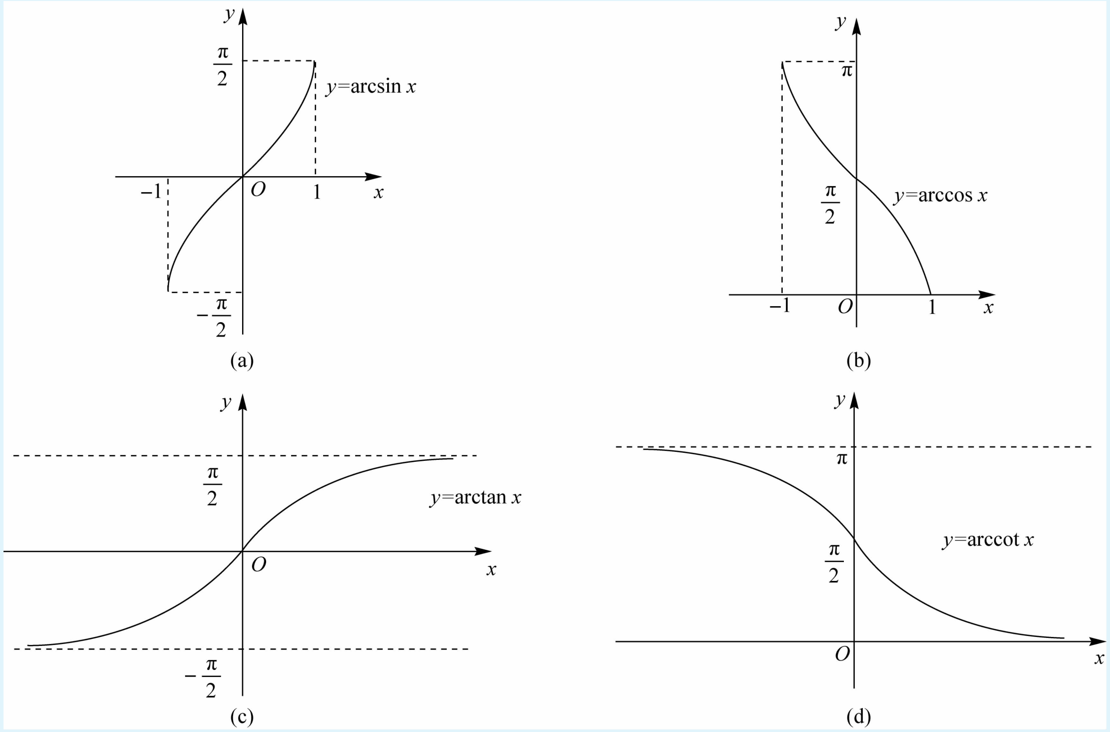


图 1-5

定义 10 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数，称为初等函数.

真题链接

1. (2024 年福建)以下函数为偶函数的是(　　).

A. $y=x^3-x^2$　　B. $y=5\sin 2x$

C. $y=\frac{x}{1+x}$　　D. $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

【答案】 D

【解析】 令 $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，故 $f(x)=f(-x)$，且定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，故 $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 为偶函数.

2.（2024年福建）函数 $f(x)=\frac{\ln|x-1|}{\sqrt{2x-x^2}}$ 的定义域为（　　）.

A. $(0,2)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(0,1)\cup(1.2)$　　D. $(2,+\infty)$

【答案】 C

【解析】 $\begin{cases}|x-1|>0,\\2x-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq1,\\0<x<2,\end{cases}$ 故定义域为 $(0,1)\cup(1,2)$.

3.（2023年福建）函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$ 的定义域是（　　）.

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,1]$

C. $[-1,1)$　　D. $[-1,1]$

【答案】 B

【解析】 要使函数 $f(x)$ 有意义，须满足 $\begin{cases}1-x^2\geqslant0,\\x+1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant1,\\x\neq-1,\end{cases}$ 解得 $-1<x\leqslant1$，故函数的定义域为 $(-1,1]$.

4.（2023年福建）下列函数在 $(0,+\infty)$ 内有界的是（　　）.

A. $y=\ln x$　　B. $y=\frac{1}{x}$

C. $y=x^3$　　D. $y=\arctan x$

【答案】 D

【解析】 A 项，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$，$\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内为无界函数；

B 项，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$，$\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为无界函数；

C 项，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$，$x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 内为无界函数；

D 项，当 $x>0$ 时，$0<\arctan x<\frac{\pi}{2}$，$\arctan x$ 为有界函数.

故选 D.

5.（2022年福建）函数 $y=\frac{\ln(x+3)}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域是（　　）.

A. $[-3,2]$　　B. $[-3,2)$

C. $(-3,2]$　　D. $(-3,2)$

【答案】 D

【解析】 要使函数 y 有意义，须满足 $\begin{cases}x+3>0,\\2-x>0,\end{cases}$ 解得 $-3<x<2$，即函数 y 的定义域为 $(-3,2)$.

6.(2022 年福建)设函数 $f(x)=\sqrt{1+x}$,则 $f[f(0)]=$________.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 由题意可得 $f(0)=\sqrt{1+0}=1$,则 $f[f(0)]=f(1)=\sqrt{2}$.

7.(2021 年福建)函数 $y=\sin x$ 存在反函数的区间是(　　).

A. $[0,\pi]$　　B. $[-\pi,\pi]$

C. $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$　　D. $(-\infty,+\infty)$

【答案】 C

【解析】 由于 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是单调的,故 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上有反函数.

8.(2021 年福建)函数 $y=|x|+x$ 的值域为________.

【答案】 $[0,+\infty)$

【解析】 当 $x>0$ 时,$y=|x|+x=x+x=2x>0$;当 $x\leqslant 0$ 时,$y=|x|+x=-x+x=0$,故 y 的值域为$[0,+\infty)$.

9.(2020 年福建)下列函数对中互为反函数的是(　　).

A. $y=\sin x,y=\cos x$　　B. $y=3^x,y=3^{-x}$

C. $y=\tan x,y=\cot x$　　D. $y=x^3,y=\sqrt[3]{x}$

【答案】 D

【解析】 A 选项中函数不互为反函数;B,C 选项中函数互为倒数;D 选项中,$y=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}\Rightarrow y=\sqrt[3]{x}$,互为反函数.

10.(2020 年福建)函数 $y=\ln\sqrt{4-x^2}$的定义域为________.

【答案】 $(-2,2)$

【解析】 由题意可得 $4-x^2>0$,解得$-2<x<2$.

巩固练习

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$的定义域为(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(0,1)\cup(1,4)$

C. $(0,4)$　　D. $(0,1)\cup(1,4]$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ x+\dfrac{6}{x}-6, & x>1,\end{cases}$ 则 $f[f(-3)]=$(　　).

A. $\frac{11}{3}$　　B. 9

C. $\frac{2}{3}$　　D. 6

3. 设函数 $y=2+\ln(x+3)$，则此函数的反函数是(　　).

A. $y=e^{2x+3}-3$　　　　B. $y=e^{x-2}-3$

C. $x=\ln(y-2)-3$　　　　D. $y=\ln(x-2)-3$

4. 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$的最小正周期为 4，且 $f(1)>0$，$f(3)=\dfrac{m-3}{m+1}$，则 m 的取值范围是(　　).

A. $-3<m<1$　　　　B. $m>1$ 或 $m<-3$

C. $-1<m<3$　　　　D. $m>3$ 或 $m<-1$

5. 函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是(　　).

A. 奇函数　　　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　　　D. 既奇又偶函数

6. 下列函数中，图形关于 y 轴对称的有(　　).

A. $y=x\cos x$　　　　B. $y=x+x^3+1$

C. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　　　D. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

7. 函数 $y=\cos 3x$ 的最小正周期 $T=$________.

8. 设 $f(x)=x+1$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f[\varphi(x)+1]=$________.

9. 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，则 $f(x)=$________________.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求函数 $f(x+3)$的定义域.

11. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

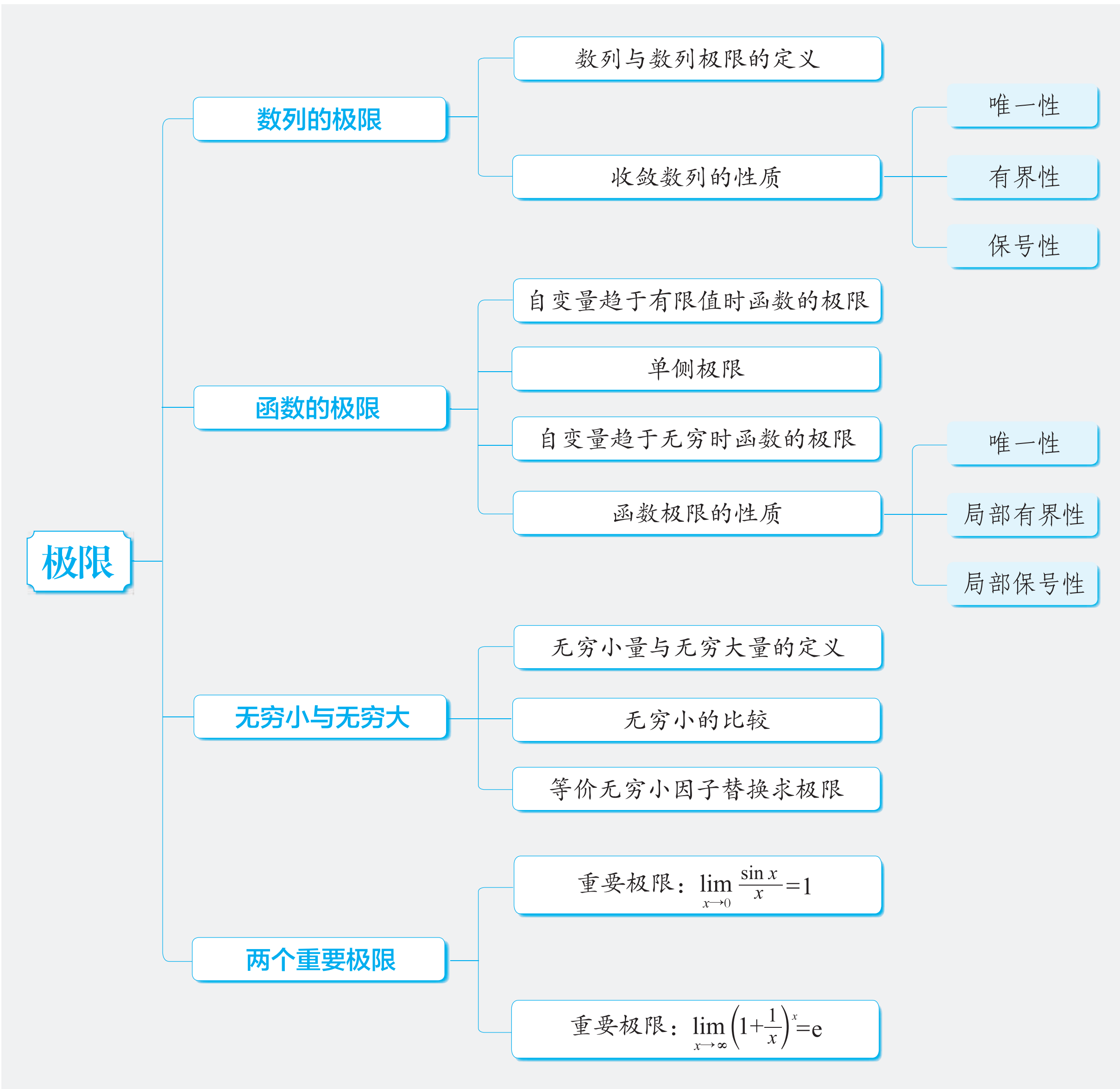
12. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\ln(x+2)$;

(2) $y=3^{2x+5}$.

第二节　极　　限

知识导图



精讲精析

一、数列的极限

1. 数列与数列极限的定义

按照一定顺序排列的一列数

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

称为数列，简记为$\{x_n\}$，其中 x_n 称为通项. 例如，

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots,$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots,$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots,$$

它们的通项分别是 $n,\frac{1}{n},\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$.

> **注:** 数列$\{x_n\}$可以看成定义在正整数集上的函数 $x_n=f(n)$,数列的通项就是这个函数的表达式.需要注意的是,并不是所有数列都能写出它的通项.

定义 1 给定一个数列$\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时(即 $n\to\infty$时),x_n 能无限接近于某个确定的实数 a,那么称数列$\{x_n\}$是收敛的,并称 a 为数列$\{x_n\}$的极限(或者说数列$\{x_n\}$收敛于 a),记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n\to a(n\to\infty).$$

如果不存在实数 a,使得数列$\{x_n\}$收敛于 a,那么称$\{x_n\}$是发散的,习惯上也称$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

例如,数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$,当 n 无限增大时,$\frac{1}{n}$无限地接近于 0,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 又如,数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$,当 n 无限增大时,$\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$无限地接近于 1,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

例 1 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$; (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

【解析】 (1)当 n 无限增大时,$1+\frac{1}{n}$无限地接近于 1,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

(2)当 n 无限增大时,$\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 无限地接近于 0,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$.

2. 收敛数列的性质

定理 1(数列极限的唯一性) 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么它的极限唯一.

定理 2(收敛数列的有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么它是有界的,即存在正数 M,对一切正整数 n,有$|x_n|\leqslant M$.

定理 3(数列极限的四则运算) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,则

①$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$;②$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$;③$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}(b\neq 0)$.

推论 1 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}cx_n=ca(c\in\mathbf{R})$,$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n=a^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

> **注:** 定理 3 可以推广至有限多个收敛数列的情形.利用定理 3 和推论 1 可以计算一些稍复杂的数列的极限.

例 2 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2}$；　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

【解析】 (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\dfrac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\dfrac{3}{2}$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

小贴士

定理 3 和推论 1 的应用前提是数列的极限存在，如果数列的极限不存在，那么就要寻找其他方法计算极限. 通常，如果分子、分母都是关于 n 的多项式，那么可以同时除以分子和分母的最高次幂项. 此外，对于无穷项相加的情形不能直接使用定理 3.

例 3　计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^n)$，其中$|q|<1$；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right]$.

【解析】 (1)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^{n+1})=\dfrac{1}{1-q}$.

(2)由于$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=1$.

二、函数的极限

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

定义 2　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果当 x 无限接近 x_0 时(即 $x\to x_0$ 时)，对应的函数值 $f(x)$无限接近于常数 A，那么称当 x 趋于x_0 时，函数 $f(x)$以 A 为极限(或者说函数$f(x)$在点 x_0 处的极限存在，其极限为 A)，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

上述定义中，只要求 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与函数 $f(x)$在点 x_0 处的取值没有关系，$f(x_0)$是否改变，甚至是否存在都不影响$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 下述定义 5 是自变量趋于有限值时函数的极限的精确定义.

定义 3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A,对任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例 4 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}(x+2)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

【解析】 (1) 当 $x\to1$ 时,$x+2$ 无限接近于 3,

所以 $\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3$.

(2) 当 $x\to1$ 时,$\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$,

所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$.

2. 单侧极限

在 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限定义中,x 既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0. 如果当 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0(记作 $x\to x_0^-$)时,$f(x)$ 趋于常数 A,那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限存在,并称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$

当 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0(记作 $x\to x_0^+$)时,$f(x)$ 趋于常数 A,那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限存在,并称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A.$$

定理 4 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在并且相等.

例 5 判断下列函数在 $x=1$ 处的极限是否存在,如果存在请写出极限值.

(1) $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\leqslant1,\\ x+1, & x>1;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\leqslant1,\\ x^2-2, & x>1.\end{cases}$

【解析】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(3x-1)=2$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$,

所以 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2$,

从而 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-2)=-1$,

所以 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$,

从而 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

例 6 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -1<x<0,\\ 1, & x=0,\\ -x, & 0<x<1,\\ x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 下列陈述中,正确的是( ).

极限例 6 讲解

A. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在　　B. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

C. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

【答案】 B

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$,从而 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在. 故本题选 B.

3. 自变量趋于无穷时函数的极限

定义 4 设函数 $f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义. 如果当$|x|$无限增大时(即 $x\to\infty$时),对应的函数值 $f(x)$无限接近于常数 A,那么称当 $x\to\infty$时,函数 $f(x)$以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

特别地,如果 x 取正值且无限增大时,对应的函数值 $f(x)$无限接近于常数 A,那么称当$x\to+\infty$时,函数 $f(x)$以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

如果 x 取负值且$|x|$无限增大时,对应的函数值 $f(x)$无限接近于常数 A,那么称当 $x\to-\infty$时,函数 $f(x)$以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

需要注意的是,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 包含了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$. 因此,如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$中至少有一个不存在,或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在,但不相等,那么$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在.

注:由于数列是特殊的函数,所以给定一个函数 $f(x)$,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,则数列$\{f(n)\}$的极限也存在,并且$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 需要注意,$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在不一定能推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$也存在,如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{N},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例 7 判断极限$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

【解析】 由反正切函数的图像可知,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$,

从而$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

例 8 判断极限$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 是否存在.

【解析】 由指数函数 $y=e^x$ 的图像可知,$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$ 不存在,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在.

4. 函数极限的性质

这里以自变量趋于有限值时函数的极限为代表说明函数极限的性质,至于其他形式的函数极限的性质,只要相应地做一些修改即可得到.

定理 5(函数极限的唯一性) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,那么该极限唯一.

定理 6(函数极限的四则运算) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

①$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

②$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

③$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

推论 2 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}cf(x)=cA(c\in\mathbf{R})$,$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=A^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

例 9 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)$; (2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2-1}$; (3)$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$.

【解析】 (1)$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x=4+6=10$.

(2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-1)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}2x^2+\lim\limits_{x\to 1}x+1}{\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}2x^2-1}=\dfrac{2+1+1}{1+2-1}=2$.

(3)需要注意,当$x\to 4$时,分母$x-4$的极限为0,不能直接使用极限的运算,这里可以先将分子和分母约去公因式$x-4$,再计算函数的极限.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=\lim_{x\to 4}x+4=8.$$

三、无穷小与无穷大

1. 无穷小与无穷大的定义

定义 5 如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时,函数$f(x)$的极限为零,那么称$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小.特别地,以零为极限的数列$\{x_n\}$是当$n\to\infty$时的无穷小.

备考提示

(1)无穷小并不是一个“非常小的数”(如10^{-100}),而是一个极限为零的变量,它的绝对值可以小于任一给定的数的绝对值.常数列$\{0\}$是一个特殊的无穷小.

(2)由无穷小的定义和函数极限的四则运算可知,无穷小与有界量的乘积仍为无穷小,有限个无穷小的和仍为无穷小.

定义 6 如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时,函数$f(x)$的绝对值$|f(x)|$可以大于预先指定的任何正数M,那么称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\left(\text{或}\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\right).$$

定理 7　在 x 的同一变化过程中，无穷大的倒数为无穷小；不恒为零的无穷小的倒数为无穷大.

例 10　判断下列变量是无穷小还是无穷大.

(1)3^x-1，当 $x\to0^+$ 时；　　(2)$\dfrac{\arctan x}{x}$，当 $x\to\infty$ 时；

(3)$e^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to0^+$ 时；　　(4)$e^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to0^-$ 时.

【解析】　(1)因为 $\lim\limits_{x\to0^+}(3^x-1)=0$，

所以当 $x\to0^+$ 时，3^x-1 是无穷小.

(2)当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，$\arctan x$ 是有界量，因为无穷小与有界量的乘积仍为无穷小，

所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{\arctan x}{x}$ 是无穷小.

(3)令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$，

所以当 $x\to0^+$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷大.

(4)令 $t=-x$，则当 $x\to0^-$ 时，$t\to0^+$，因为当 $t\to0^+$ 时，$e^{\frac{1}{t}}$ 是无穷大，

所以此时 $e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{-t}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{t}}}$ 是无穷小.

2. 无穷小的比较

设 $f(x)$，$g(x)$ 都是 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小，且 $g(x)\neq0$.

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\left(\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\right)$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记作 $f(x)=o[g(x)]$；

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty\left(\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty\right)$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小，记作 $g(x)=o[f(x)]$；

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c(c\neq0)\left(\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c(c\neq0)\right)$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小，特别地，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1\left(\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1\right)$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记作 $f(x)\sim g(x)$.

备考提示

常用的 $x\to0$ 时的等价无穷小：

$\sin x\sim x$；　　$\tan x\sim x$；　　$\arcsin x\sim x$；

$\arctan x\sim x$；　　$e^x-1\sim x$；　　$\ln(1+x)\sim x$；

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；　　$a^x-1\sim x\ln a$；　　$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq0)$.

利用变量替换可以将上述等价无穷小中的 x 换成任一趋于 0 的变量，如 $\sin x^3\sim x^3$，$(1+2x)^\alpha-1\sim2\alpha x$.

例 11　当 $x\to 1$ 时，与 $1-x$ 等价的是(　　).

A. $\frac{1}{2}(1-x^3)$　　B. $\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})$

C. $\frac{1}{2}(1-x^2)$　　D. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})$

【答案】 C

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{2}(1-x^3)}{1-x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)=\dfrac{3}{2}\neq 1$，所以 $\frac{1}{2}(1-x^3)$ 与 $1-x$ 是 $x\to 1$ 时的同阶无穷小，但不是等价无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})}{1-x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{4}$，所以 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})$ 与 $1-x$ 是 $x\to 1$ 时的同阶无穷小，但不是等价无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)(1-x)}{1-x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}(1+x)=1$，所以 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 与 $1-x$ 是 $x\to 1$ 时的等价无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{x})=1\neq 0$，所以 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})$ 不是无穷小. 故本题选 C.

例 12　下列说法中错误的是(　　).

A. 有限个无穷小的和仍为无穷小

B. 当 $x\to 1$ 时，$1-x^3$ 是 $1-x$ 的同阶无穷小

C. 若 $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$ 是同一极限过程的无穷小，且 $\alpha(x)\sim\beta(x),\beta(x)\sim\gamma(x)$，则 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$

D. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1-x}=1$，由此断言，当 $x\to 0$ 时，$\cos x$ 与 $1-x$ 是等价无穷小

【答案】 D

【解析】 根据极限的四则运算，有限个无穷小的和仍为无穷小，A 项说法正确；因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=3$，所以当 $x\to 1$ 时，$1-x^3$ 是 $1-x$ 的同阶无穷小，B 项说法正确；因为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，$\beta(x)\sim\gamma(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1$，即 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$，C 项说法正确；当 $x\to 0$ 时，$\cos x$ 与 $1-x$ 都不是无穷小，D 项说法错误. 故本题选 D.

例 13　当 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^k-1$ 与 $1-\cos x$ 为等价无穷小，则 k 的值为(　　).

A. 1　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. -1

【答案】 C

【解析】 当 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^k-1\sim kx^2$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，因为 $(1+x^2)^k-1$ 与 $1-\cos x$ 为等价无穷

小，所以 $k=\frac{1}{2}$. 故本题选 C.

3.等价无穷小因子替换求极限

设当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时 $f(x)\sim h(x)$，根据等价无穷小的定义及极限的乘法运算，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{h(x)}{f(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}.$$

因此，在包含无穷小的乘除式中可以直接将作乘法因子或除法因子的无穷小用与其等价的无穷小替换.

例 14　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-e^x}$.

【解析】 (1) 因为当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$.

(2) 因为当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\ln(1+x)\sim x$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$.

(3) 因为当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$，$e^x-1\sim x$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}$.

小贴士

等价无穷小因子替换的原理是极限的乘法运算，所以替换的是作乘、除因子的无穷小，对于作加、减因子的无穷小，不能随意替换. 如极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$，如果直接用 $\sin x$ 替换 x，就会得到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$，但实际上这个结果是错误的.

例 15　当 $x\to 0$ 时，与 x 等价的无穷小是(　　).

A. $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　B. $2\sin x$

C. $\ln(1+x)$　　D. $\ln(1+x^2)$

【答案】 C

【解析】 当 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\sim\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$，所以 $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 是 x 的低阶无穷小；当 $x\to 0$ 时，$2\sin x\sim 2x$，所以 $2\sin x$ 是 x 的同阶无穷小，但不是等价无穷小；当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，所以 $\ln(1+x)$ 是 x 的等价无穷小；当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，所以 $\ln(1+x^2)$ 是 x 的高阶无穷小. 故本题选 C.

四、两个重要极限

两个重要极限是$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$和$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，这两个极限需要考生熟记. 与两个重要极限相关的题目，通常利用变量替换法进行求解.

例 16　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$的值为(　　).

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. ∞

【答案】　A

【解析】　当$x\to\infty$时，$\sin 2x$是有界量，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$. 故本题选 A.

例 17　计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$；　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$；　(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

【解析】　(1)令$t=3x$，则当$x\to 0$时，$t\to 0$，从而$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=3$.

(2)令$t=\frac{1}{x}$，则当$x\to\infty$时，$t\to 0$，从而$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$，令$t=\frac{x}{2}$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin^2 t}{4t^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}$.

小贴士

关于两个重要极限一定要注意自变量的变化趋势，特别注意的是$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=1$.

例 18　计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}$；　(2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；　(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

【解析】　(1)令$t=-2x$，则当$x\to\infty$时，$t\to\infty$，从而$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{t}{2}}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(2)令$t=\frac{1}{2x}$，则当$x\to 0$时，$t\to\infty$，从而$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}=\mathrm{e}^2$.

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}$. 令$t=-\frac{x+1}{2}$，则当$x\to\infty$时，$t\to\infty$，从而$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-2}\cdot\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{-2}\cdot 1=\mathrm{e}^{-2}$.

小贴士

对类似于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 的“1^{∞}”型极限 $\lim\limits_{x\to\square}(1+u)^{v}$（$x\to\square$ 时，$u\to0$，$v\to\infty$），除上述变量替换法外还有一个简单的计算公式 $\lim\limits_{x\to\square}(1+u)^{v}=e^{\lim\limits_{x\to\square}uv}$. 例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{2x}\right)\cdot x\right]}=e^{-\frac{1}{2}}$.

真题链接

1.（2024 年福建）当 $x\to0$ 时，$e^{kx}-1$ 和 $\dfrac{1}{2}x$ 是等价无穷小量，则 $k=$（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

【答案】 B

【解析】 当 $x\to0$ 时，$e^{kx}-1\sim kx$，故 $k=\dfrac{1}{2}$.

2.（2024 年福建）已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)^{2}\ (x-2)^{3}}{(x-1)^{k}}=9$，则 $k=$（　　）.

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

【答案】 D

【解析】 “$\dfrac{\infty}{\infty}$”型抓大头，分子次数最高为 5 次，故分母次数最高也应为 5 次，此时极限计算恰好为 9.

3.（2024 年福建）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x^{2}}\right)^{x^{2}}=$________.

【答案】 $e^{-\frac{1}{2}}$

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x^{2}}\right)^{x^{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2x^{2}}\right)^{-2x^{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

4.（2024 年福建）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{4}-2x^{3}}{(\sqrt{1+x^{2}}-1)\sin x}$.

【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{4}-2x^{3}}{\frac{1}{2}x^{2}\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{3}(x-2)}{\frac{1}{2}x^{3}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-2}{\frac{1}{2}}=-4$.

5.（2023 年福建）下列极限运算正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{5}-4}{x^{5}+2x^{4}+x^{3}+1}=3$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}-1}{x^{2}+2x+3}=1$

C. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin3x=3$

【答案】 A

【解析】 A 项，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-4}{x^5+2x^4+x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{4}{x^5}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^5}}=3$；

B 项，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+3}=-\dfrac{1}{3}$；

C 项，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$；

D 项，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin3x=0$.

6.（2023 年福建）若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\tan\dfrac{3}{x}=$________.

【答案】 3

【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\cdot\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\cdot3=3$.

7.（2022 年福建）当 $x\to0$ 时，下列函数是无穷小量的是（　　）

A. 2^x

B. $x\sin\dfrac{1}{x}$

C. $\sin\dfrac{1}{x}$

D. $\dfrac{\sin x}{x}$

【答案】 B

【解析】 A 项，$\lim\limits_{x\to0}2^x=1$；B 项，$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$；C 项，$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在；D 项，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 故选 B.

8.（2022 年福建）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{4x^2+x-2}=$（　　）.

A. 0

B. $\dfrac{1}{2}$

C. 2

D. ∞

【答案】 B

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{4x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

9.（2022 年福建）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{2x}=$________.

【答案】 e^{-10}

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{-\frac{x}{5}\cdot(-10)}=e^{-10}$.

10.（2022 年福建）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x\sin x}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$.

11.(2021年福建)当 $x\to0$ 时,$1-\cos x$ 是 $\sin x^2$ 的( ).

A. 高阶无穷小

B. 低阶无穷小

C. 等价无穷小

D. 同阶非等价无穷小

【答案】 D

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$,故当 $x\to0$ 时,$1-\cos x$ 与 $\sin x^2$ 是同阶非等价无穷小.

12.(2021年福建)$\lim\limits_{x\to0}(1-6x)^{\frac{1}{2x}}=$( )

A. e^{-2}

B. e^2

C. e^{-3}

D. e^3

【答案】 C

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}(1-6x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-6x)^{-\frac{1}{6x}\cdot-3}=e^{-3}$.

13.(2021年福建)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^5}\sin x=$________.

【答案】 0

【解析】 当 $x\to\infty$ 时,$\sin x$ 为有界变量,$\dfrac{x^3+1}{x^5}\to0$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^5}\sin x=0$.

14.(2021年福建)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

15.(2020年福建)当 $x\to0$ 时,下列函数为无穷小量的是( ).

A. $\dfrac{\sin x}{x}$

B. $x\sin x$

C. $\dfrac{\cos x}{x}$

D. $1-\sin x$

【答案】 B

【解析】 选项A中 $x\to0$ 时,$\dfrac{\sin x}{x}\sim1$;选项C中 $x\to0$ 时,$\dfrac{\cos x}{x}\sim\infty$;选项D中 $x\to0$ 时,$1-\sin x\sim1-x$;选项B中 $x\to0$ 时,$x\sin x\sim x^2$,是比 x 高阶的无穷小量,故选B.

16.(2020年福建)极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=$( ).

A. 0

B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】 D

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}=2$.

17.（2020 年福建）若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=e^2$，则 $k=$______________.

【答案】 2

【解析】 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{k}=e^k=e^2$，故 $k=2$.

18.（2020 年福建）求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{x^3+x^2+1}$.

【解析】 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=1$.

巩固练习

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$（　　）.

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=$（　　）.

A. -1

B. 0

C. 1

D. $\dfrac{1}{2}$

3. 当 $x\to0$ 时，与 $\tan x$ 等价的无穷小是（　　）.

A. x^2-x

B. $1-\cos x$

C. $x^2+\sin x$

D. $\sqrt{1+x}-1$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{x\cos x}=$（　　）.

A. 0

B. 1

C. 3

D. ∞

5. 下列等式正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to0}x\sin x=1$

B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{3x^2-x-1}=1$

C. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

D. $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$

6. 下列结论正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=e$

B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{1-x}=e$

D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x}=e$

7. 下列说法正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=1$

B. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=1$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{x^2}=$____________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$____________.

10. 函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ x^2+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$____________.

11. 求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+1}{n^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n}{n^2}\right)$.

12. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{1+x^2}-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$；

(6) $\lim\limits_{x\to \infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

13. 已知 $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}-an-b\right)=1$，求实数 a,b 的值.