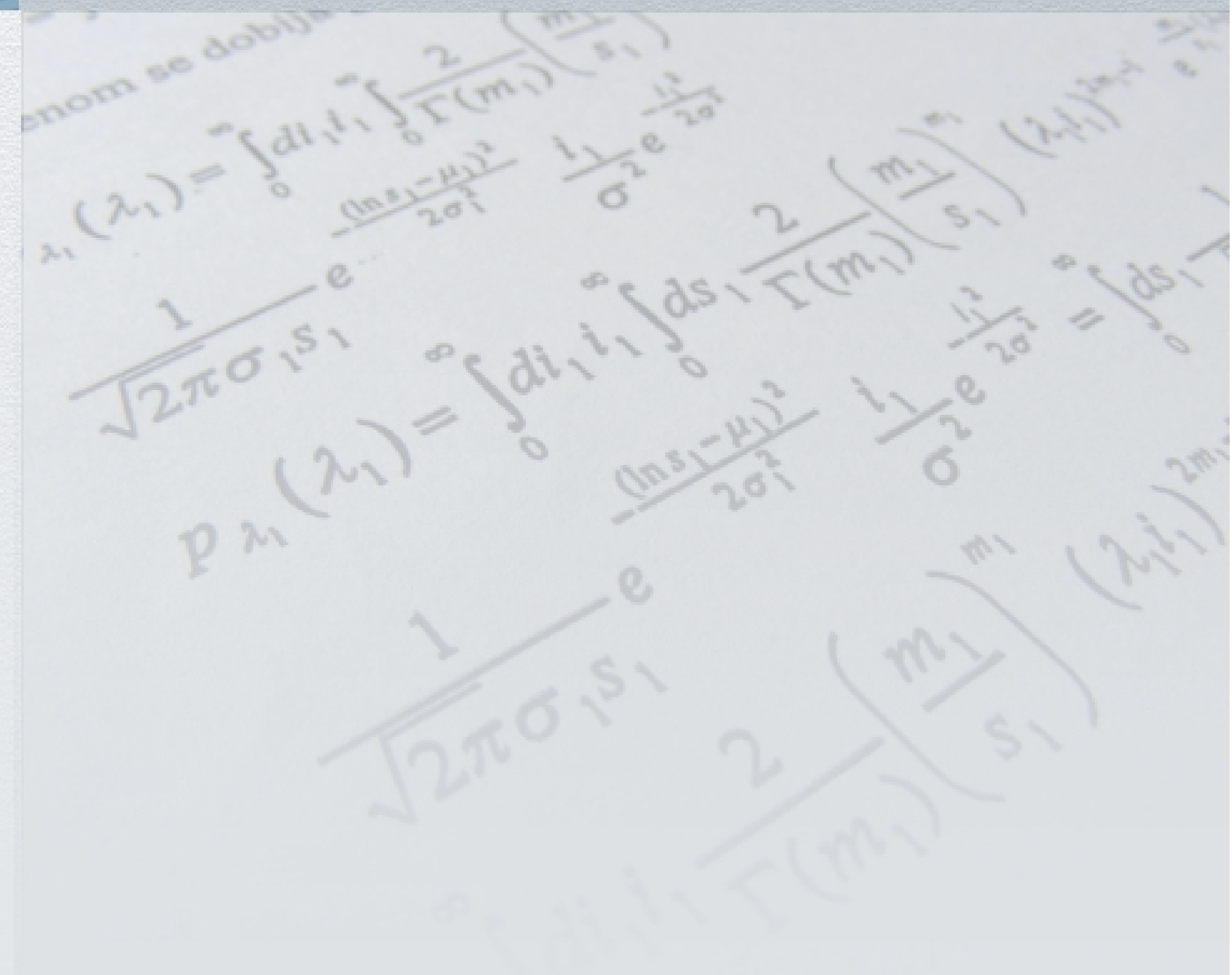
"十四五"职业教育国家规划教材

高等数学（第2版）

GAODENG SHUXUE

（上册）

郑兆顺　常瑞玲　主编



中原出版传媒集团
中原传媒股份公司
河南科学技术出版社

• 教学课件
• 电子教案
• 考试题库

"十四五"职业教育国家规划教材

高等数学（第2版）（上册）

郑兆顺　常瑞玲　主编

河南科学技术出版社

策划编辑　马国宝
责任编辑　张春龙
责任校对　李　军
封面设计　张　伟
责任印制　张艳芳

ISBN 978-7-5725-0077-0

定价：68.00元（上、下册）

"十四五"职业教育国家规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（第2版）

（上册）

郑兆顺　常瑞玲　主　编

任艳梅　周学勤　单凤娟
黄美霞　石玉敏　李　杨　副主编

河南科学技术出版社
· 郑州 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/郑兆顺,常瑞玲主编.—2 版.—郑州:河南科学技术出版社, 2020.9(2023.7 重印)

ISBN 978-7-5725-0077-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郑… ②常… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 146716 号

出版发行:河南科学技术出版社

地址:郑州市郑东新区祥盛街 27 号　　邮政编码:450016

电话:(0371)65788641　65788859

网址:www.hnstp.cn

策划编辑:马国宝

责任编辑:张春龙

责任校对:李　军

封面设计:张　伟

责任印制:张艳芳

印　　刷:郑州豫兴印刷有限公司

经　　销:全国新华书店

开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16　　**印张**:26.25　　**字数**:630 千字

版　　次:2020 年 9 月第 2 版　　2023 年 7 月第 8 次印刷

定　　价:68.00 元(上、下册)

序

郑兆顺、常瑞玲等编写的《高等数学》是结合多年职业院校高等数学教育研究成果及精品课建设、在线课建设和一线教学实践经验精心编写而成的,令人耳目一新,其特色主要体现在如下几个方面。

1. 充分发挥高等数学技术教育功能和文化教育功能,突出高等数学教育教学的本质。

2. 注重教学方法论的指导地位,把提高学生的一般科学素养、文化修养及形成和发展数学品质作为高等数学的教育目标。

3. 高等数学要为学习相关专业课程和后继课程服务,为培养学生的思维能力服务,为学生处理和解决相关实际问题服务,为学生的可持续发展服务。

4. 注重概念方法的教学,强化基本概念脱胎于实际的过程和主要方法,在适度注意数学的理论性、严密性、系统性的基础上返璞归真,尽量使数学知识生活化、通俗化、简单化。

5. 注重培养学生用数学思想和方法分析、解决问题的能力,特别是用数学的思想、概念、方法,消化吸收“工程”概念和“工程”原理的能力,把实际问题转化为数学模型的能力,以及求解数学模型的能力。

6. 在例题的处理上,层次分明、衔接得当、前后贯通,特别是穿插的思考问题,对打破学生的思维定式很有益处。

7. 增加数学实验模块,提升学生应用能力。数学实验模块主要是每章所学计算方法在数学软件中的实现,目的是结合专业特点,更好地提高数学建模能力及用数学软件解决实际问题的能力。

8. 本着教材建设是树人立魂的大事之理念,高等数学教材承载着文化传承的使命,在每一章的后面增加了阅读材料——数学史话。该模块让学生了解所学知识的来源、发展及相应的数学家的故事,以提高学生的数学素养和人文素养。

显而易见,作者对《高等数学》的编写下了功夫,做了努力,期望本书在使用过程中能日臻完善。

杨世明

全国数学科学方法论研究交流中心副主任

前言

PREFACE

本书是编者根据职业院校对高等数学课程教学基本要求,结合20多年“MM教育方式”的研究成果和近30年的一线教学实践经验,经过认真研究、集思广益,通力合作,精心编写而成的。编者将精品课程建设、精品资源共享课程建设、精品在线课程建设与教材建设有机结合,精心锤炼。本书的所有创新点体现在每个细节里,体现在处理每个知识点的“匠心”上。本书力求在概念中提倡返璞归真,在定理引入时合情合理,在方法中重视策略应变,在应用中强调广泛应用。因此,本教材内容的很多地方在同类教材中独树一帜,新颖易学。

本书分上下两册,上册共七章,内容包括预备知识、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分和常微分方程;下册共七章,内容包括级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、线性代数、概率论与数理统计初步理论。标有“*”的内容可根据不同专业选学。

我们编写的《高等数学》教材在整个使用进程中,是紧跟我校人才培养模式的变革、专业调整和学科建设的发展而逐渐完善、成熟的。本书自2008年出版至今,根据教学研究目标和师生反馈意见,已经五改其稿,每次都做了大量的修改、补充和完善,目前是第五稿。

囿于编者水平,错误和疏漏恐在所难免,还请广大读者多提宝贵意见,以便精益求精,使本书日臻完善。

编者

2020年9月

目录

第一章　预备知识

第一节　函数的概念 …… 1
第二节　函数的几种特性 …… 5
第三节　反函数与复合函数 …… 7
第四节　初等函数 …… 9
第五节　极坐标系 …… 13
第六节　一些常用公式 …… 15
第七节　一些常见函数的图形 …… 15

第二章　极限与连续

第一节　数列及其极限 …… 19
第二节　函数的极限 …… 24
第三节　极限的性质与运算 …… 29
第四节　两个重要极限 …… 34
第五节　无穷小量与无穷大量 …… 39
第六节　函数的连续性 …… 42

第三章　导数与微分

第一节　导数的概念 …… 52
第二节　导数公式与求导法则 …… 56
第三节　函数的微分及其应用 …… 66
第四节　高阶导数与高阶微分 …… 72
第五节　隐函数及参数方程所确定的函数微分法 …… 74

第四章　导数的应用

第一节　微分中值定理 …… 82
第二节　洛必达法则 …… 85
第三节　函数的单调性及其极值 …… 89
第四节　函数的最大值与最小值 …… 95
第五节　曲线的凹凸性与拐点 …… 98
第六节　函数作图 …… 101
*第七节　曲率 …… 103
*第八节　导数在经济分析中的应用 …… 107

第五章　不定积分

第一节　不定积分的概念与性质 …… 114
第二节　换元积分法 …… 119
第三节　分部积分法 …… 126

第六章　定积分

第一节　定积分的概念与性质 …… 131
第二节　微积分基本公式 …… 137
第三节　定积分的换元与分部积分法 …… 141
第四节　广义积分 …… 146
第五节　定积分的微元法 …… 150

第七章　常微分方程

第一节　微分方程的基本概念 …… 164
第二节　一阶微分方程 …… 167
第三节　一阶微分方程应用举例 …… 175
第四节　可降阶的二阶微分方程 …… 178
第五节　二阶常系数线性微分方程 …… 181

参考答案 …… 194

第一章　预备知识

微积分是高等数学的核心，函数是微积分的研究对象，极限是微积分的研究工具. 微积分就是通过极限方法来研究函数的分析性质（连续性、可导性、可积性等）和分析运算（极限运算、微分运算、积分运算等），因此极限概念是微积分的重要概念，是微积分的精华，也是高等数学的灵魂. 在学习高等数学之前，本章先介绍一些预备知识.

第一节　函数的概念

函数是自然科学中普遍使用的数学概念之一，是数学的基础概念. 我们对函数概念已经有所认识，因为贯穿于中学数学的一条主线就是函数. 近年来，在社会科学方面，由于有一些学科向定量化的方向发展，函数概念也广泛地应用到这些学科之中，因此函数在应用上已超出了数学的范畴. 高等数学是以函数为主要研究对象的一门数学课程，本章一方面要复习中学已学过的函数概念和性质，另一方面也对函数的有关知识做些必要的补充.

一、常用符号

高等数学的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的. 一些专用符号在下文中将依次引入，另外还需要引入一些数理逻辑符号和常用的数学符号. 数学语言的符号化是现代数学发展的必然趋势，它既能使定义、定理的叙述和定理的证明过程简洁、明确，易于读者理解、记忆，又能使高等数学的语言与现代数学的语言衔接贯通.

1. 蕴涵符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“若……则……”. 符号“$\Leftrightarrow$”表示“充分必要条件”或“等价”.

说明：（1）设 P 与 Q 表示两个命题，则用“$\Rightarrow$”的符号连接起来就是

$$P\Rightarrow Q,$$

它表示 P 蕴涵 Q，或若有 P 则有 Q.

用“$\Leftrightarrow$”的符号连接起来，就是

$$P\Leftrightarrow Q,$$

它表示 P 与 Q 等价，或 P 蕴涵 $Q(P\Rightarrow Q)$ 且 Q 蕴涵 $P(Q\Rightarrow P)$.

例如，等腰直角三角形$\Rightarrow$直角三角形，等腰直角三角形$\Leftrightarrow$三角形有两个角都等于 $45°$.

（2）命题 $P\Rightarrow Q$ 与非 $Q\Rightarrow$非 P 是等价的. 如果要证明命题 $P\Rightarrow Q$ 为真，那么证明命题非 $Q\Rightarrow$非 P 为真即可.

2. 量词符号

（1）全称量词的符号是“$\forall$”，表示“对任意的”或“对任一个”.

（2）存在量词的符号是“$\exists$”，表示“存在”或“能找到”.

例如，$A\subset B$，即集合 A 是集合 B 的子集，也就是集合 A 的任意元素 x 都是集合 B 的元素，用符号表示为

$$\forall x\in A\Rightarrow x\in B.$$

$A=B$ 用符号表示为

$$\forall x\in A\Rightarrow x\in B \text{ 且 } \forall x\in B\Rightarrow x\in A.$$

3. 某些常用数学符号

(1)阶乘符号. 设 n 是自然数，符号"$n!$"读作"n 的阶乘"，表示不超过 n 的所有自然数的连乘积. 如：$3!=3\times2\times1$，$5!=5\times4\times3\times2\times1$. 为了运算方便，规定 $0!=1$.

(2)双阶乘符号. 设 n 是自然数，符号"$n!!$"读作"n 的双阶乘"，表示不超过 n 且与 n 有相同奇偶性的所有自然数的连乘积. 如：$6!!=6\times4\times2$，$7!!=7\times5\times3\times1$.

说明：$n!!$ 不是 $(n!)!$.

(3)最大(小)数的符号. 符号 max 是英文 maximum 的缩写，读作"最大". $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数中的最大数.

符号 min 是英文 minimum 的缩写，读作"最小". $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数中的最小数.

如：$\max\{5,7,3,2\}=7$，$\min\{5,7,3,2\}=2$.

二、常量、变量与常用数集

在我们观察各种现象或过程的时候，经常会遇到两种不同的量：一种是在过程中保持不变，或取一个固定数值的量，这种量称为常量；另一种是在过程中发生变化，或可在一定的范围内取不同数值的量，这种量称为变量. 通常用 a,b,c 等表示常量，用 x,y,z,t 等表示变量. 如一架飞机在飞行过程中，乘客人数是一个常量，而飞机飞行的高度是一个变量.

讨论变量间的数量关系时，必须明确变量的取值范围，数集是表示变量取值范围的常用方法.

在本书中，变量总是在实数范围内讨论. 常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}^*$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外，还有各种类型的区间. 设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，则

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

左开右闭区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

左闭右开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；

无穷区间 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$；

同理 $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$；

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$.

此外，为了讨论函数在一点邻近区间的某些性质，这里引入点的邻域的概念.

定义 1.1　设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，数集 $\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$，即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体，称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$.

如图 1－1(a) 所示，点 a 与数 δ 分别称为邻域的中心与半径. 有时用 $U(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集 $\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，如图 1－1(b) 所示. 显然，$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

(a)　　(b)

图 1－1

三、函数的概念

定义 1.2　设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 上的非空子集，对于任意 $x\in D$，变量 y 按照某个对应关系（如 f）有唯一确定的实数与之对应（记作 $f(x)$），则称 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，数集 $\{f(x)\,|\,x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

对于具有实际意义的函数来说，函数的定义域要根据题意来确定；对于抽象地用公式表达的函数来说，函数的定义域是使公式有意义的自变量的一切取值.

例 1　某城市一年内各月毛线的零售量（单位：百千克）如表 1－1 所示.

表 1－1　各月毛线零售量表

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 s	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

表 1－1 表示了某城市毛线零售量 s 随月份 t 变化的函数关系. 它的定义域 $D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

例 2　某河道的一个断面图形如图 1－2 所示. 其深度 y 与岸边一点 O 到测量点的距离 x 之间的对应关系如图 1－2 中曲线所示. 它的定义域为 $D=[0,b]$.

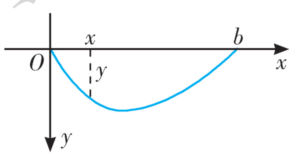


图 1－2

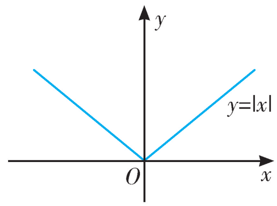


图 1－3

例 3　设函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

它的图像如图 1－3 所示. 则它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$.

例 4 函数

$$y=\begin{cases}x-1, x>0,\\0, x=0,\\x+1, x<0,\end{cases}$$

它的图像如图 1-4 所示,则它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$.

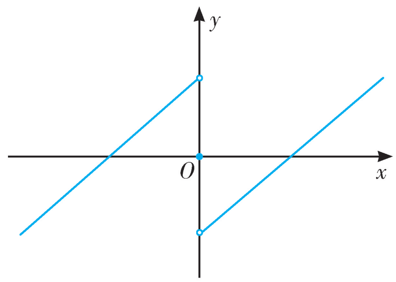


图 1-4

例 5 确定函数 $y=\frac{\lg(1+x)}{x}$的定义域.

解 该函数的定义域 D 为满足不等式组

$$\begin{cases}1+x>0,\\x\neq 0\end{cases}$$

的 x 的集合,即 $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

四、函数的表示方法

表示函数时,要把函数的定义域和对应关系表述清楚,一般可根据函数自身的特点选择适当的表示方法. 常用的表示方法有表格表示法、图示表示法和公式表示法(解析法).

(1)以表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示法,如例 1 中的函数就是用表格表示的.

(2)用图形表示函数的方法称为函数的图示表示法,如例 2 的函数就是用图示法表示的.

(3)用数学公式表示函数的方法称为函数的公式表示法,也称为解析法. 如例 3、例 4、例 5 的函数都是用公式法表示的. 在高等数学中,讨论的函数一般都用公式法表示.

例 3、例 4、例 5 的函数虽然都是用公式法表示的,但它们又代表了不同的情形. 例 5 中的函数,定义域中任何一个 x 相对应的 y 都用同一个解析式表示;而例 3、例 4 中的函数,定义域中某些不同部分的 x,相对应的 y 的表达式不同.

如果一个函数在定义域的不同区间上(个别的区间也可退化为一点),对应关系分别用不同的解析式表示,则称这个函数为分段函数. 例 3、例 4 的函数都是分段函数,不过例 3 中的分段函数(又叫绝对值函数)可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$,即对应关系可化为一个式子.

注意:①分段函数是几个式子合起来表示一个函数,而不是表示几个函数,在科技、工程等实际应用中经常用到分段函数;②在求分段函数的函数值时,应先确定自变量的取值范围,再按相应的式子计算. 如例 4 中的函数,分别计算 $f(2),f(0),f(-2)$. 因为 $2\in(0,+\infty),0\in\{0\},-2\in(-\infty,0)$,所以 $f(2)=1,f(0)=0,f(-2)=-1$.

下面再给出几个常见的分段函数.

(1)取整函数 $y=[x]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,即若 $n\leqslant x<n+1$,则$[x]=n$(n 为整数). 因此其数学表达式可写为

$$[x]=\begin{cases}\cdots \\ -2,-2\leqslant x<-1, \\ -1,-1\leqslant x<0, \\ 0,0\leqslant x<1, \\ 1,1\leqslant x<2, \\ 2,2\leqslant x<3, \\ \cdots\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数，图像如图1－5所示.

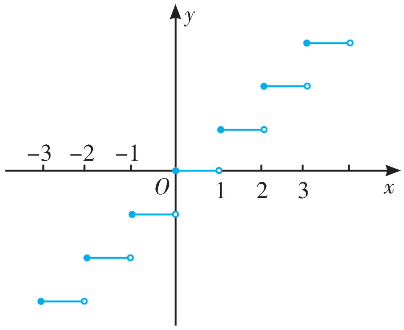


图1－5

(2)符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0, \\ 0,x=0, \\ -1,x<0.\end{cases}$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，图像如图1－6所示.

我们有时可以运用它将某些分段函数写得简洁一些.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2},x\leqslant 0, \\ x\sqrt{1+x^2},x>0\end{cases}$$

可以记为$f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{sgn}x$.

又如，$|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$.

这里 $\operatorname{sgn}x$ 起了符号的作用，因此称之为符号函数.

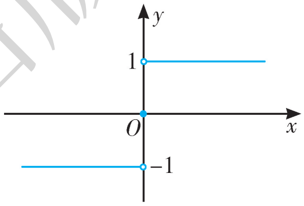


图1－6

第二节　函数的几种特性

一、有界性

设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$，如果函数$f(x)$在I上的值域A有上界(或有下界、有界)，则称函数$f(x)$在区间I上有上界(或有下界、有界)，否则称函数$f(x)$在区间I上无上界(或无下界、无界).

函数$f(x)$在区间I上有上界和无上界，有下界和无下界，有界和无界，我们用逻辑符号列表对比如下，如表1－2所示.

表1－2　函数有界性的符号表示

有界性	符号表示
函数$f(x)$在I上有上界	$\exists A\in\mathbf{R},\forall x\in I\Rightarrow f(x)\leqslant A$(或$<A$)
函数$f(x)$在I上无上界	$\forall A\in\mathbf{R},\exists x_0\in I\Rightarrow f(x_0)>A$
函数$f(x)$在I上有下界	$\exists B\in\mathbf{R},\forall x\in I\Rightarrow f(x)\geqslant B$(或$>B$)
函数$f(x)$在I上无下界	$\forall B\in\mathbf{R},\exists x_0\in I\Rightarrow f(x_0)<B$
函数$f(x)$在I上有界	$\exists M>0,\forall x\in I\Rightarrow \lvert f(x)\rvert\leqslant M$
函数$f(x)$在I上无界	$\forall M>0,\exists x_0\in I\Rightarrow \lvert f(x_0)\rvert>M$

显然，函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界又有下界 $\Leftrightarrow$ 存在闭区间 $[-M,M]$ $(M>0)$，使

$$\{f(x)\mid x\in I\}\subset[-M,M].$$

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界的几何意义是：存在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$，函数 $y=f(x)$ 的图像位于以这两条直线为边界的带形区域之内. 如图 1－7 所示.

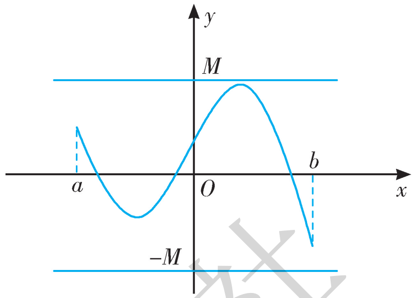


图 1－7

如果 $f(x)$ 在定义域 D 上有界，则称 $f(x)$ 为有界函数. 例如函数 $\sin x$ 是有界函数. 函数 $\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是无界的，但它在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上是有界的.

二、单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ (\text{或}\ f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少），此时 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增（或减）区间（有时简称为增（或减）区间）.

如果将上述不等式改为

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或}\ f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格增加（或严格减少）.

严格增加和严格减少统称为严格单调. 严格增加、严格减少、单调增加、单调减少统称为单调. 增区间和减区间统称为单调区间. 在区间 I 上（严格）单调增加或（严格）单调减少的函数统称为区间 I 上的单调函数. 从几何直观上看，区间 I 上单调增加（减少）的函数，其图像自左向右是上升（下降）的. 在定义域上（严格）单调增加或（严格）单调减少的函数统称为（严格）单调函数.

三、奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果对 $\forall x\in D$，都有 $-x\in D$，且 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；如果对 $\forall x\in D$，都有 $-x\in D$，且 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

显然，奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

四、周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对 $\forall x\in D$，如果存在一个正数 T，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们所说的周期函数的周期指的是最小正周期.

显然，周期函数若以 $T(T>0)$ 为周期，则在每个长度为 T 的区间 $[nT,(n+1)T]$ $(n\in\mathbf{Z})$ 上函数的图像都是相同的.

例 1 讨论函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的特性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|=\left|\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|<\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$；

(2) $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$;

(3) $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1<x_2$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}=\frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0.$$

因此函数$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是有界的、单调增加的奇函数,并由单调性得到$f(x)$不具有周期性.

第三节　反函数与复合函数

一、反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 A,则对 $\forall x \in D$,按照对应关系 f,存在唯一一个 $y \in A$. 反之,对 $\forall y \in A$,能否存在唯一一个 $x \in D$,使 $y=f(x)$成立呢? 这就是我们接下来要讨论的问题.

若对 $\forall x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 \neq x_2$,有 $f(x_1) \neq f(x_2)$($\Leftrightarrow$当 $f(x_1)=f(x_2)$时,有 $x_1=x_2$),则称函数 $y=f(x)$是 D 与 A 间的一一对应.

一一对应与非一一对应列表对比如表 1－3 所示.

表 1－3　函数对应关系及其符号表示

函数对应关系	符号表示
$y=f(x)$是 D 与 A 间的一一对应	$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
$y=f(x)$是 D 与 A 间的非一一对应	$\exists x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

一般来说,函数 $y=f(x)$在定义域 D 与其值域间是非一一对应的. 但也存在这样的函数 $y=f(x)$,它在定义域的某个子集 I 与其对应的值域$f(I)$间是一一对应的.

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D, I \subset D$. 当 $x \in I$ 时,$y \in f(I)$. 如果 $y=f(x)$是 I 与 $f(I)$间的一一对应,则对 $\forall y \in f(I)$,对应唯一一个 $x \in I$,使 $f(x)=y$,即在$f(I)$上定义了一个函数,称此函数是函数 $y=f(x)$的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y), y \in f(I).$$

如函数 $y=x^2$ 的定义域是 $D=\mathbf{R}$,值域是 $A=[0,+\infty)$,它在整个定义域上没有反函数. 但当 $x \in I=[0,+\infty) \subset D$ 或 $x \in I=(-\infty, 0] \subset D$ 时,$y=x^2$($y \in f(I)=[0,+\infty)$)分别有反函数 $x=\sqrt{y}$和 $x=-\sqrt{y}$,它们的定义域都是 $f(I)=[0,+\infty)$,而值域分别是 $I=[0,+\infty)$和 $I=(-\infty, 0]$.

显然,如果 $x=f^{-1}(y)$是 $y=f(x)$的反函数,则 $y=f(x)$也是 $x=f^{-1}(y)$的反函数,即它们互为反函数. 并且,如果函数 $y=f(x)$在定义域 D 上存在反函数 $x=f^{-1}(y)$,则反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域和值域分别是 $y=f(x)$的值域 A 和定义域 D. 于是有

$$f^{-1}[f(x)] \equiv x, x \in D,$$
$$f[f^{-1}(y)] \equiv y, y \in A.$$

如函数 $y=x^3$ 在它的定义域 $\mathbf{R}$ 上存在反函数 $x=\sqrt[3]{y}$，$x=\sqrt[3]{y}$的定义域是 $y=x^3$ 的值域 $\mathbf{R}$，而值域是 $y=x^3$ 的定义域 $\mathbf{R}$.

我们不加证明地给出反函数存在的充分条件：严格单调函数必存在反函数.

函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$，y 是自变量. 但习惯上我们使用 x 表示自变量，因此将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调，改写为 $y=f^{-1}(x)$. 例如函数 $y=3x-2$ 的反函数是 $x=\dfrac{y+2}{3}$，我们要改写为 $y=\dfrac{x+2}{3}$. 一般我们所说的反函数都是指改写后的函数.

说明：函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像在坐标平面上是同一点集. 当把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调后，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像就不同了，而是关于直线 $y=x$ 对称.

二、复合函数

先看一个例子. 设 $y=u^2$，$u=\sin x$，则对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $u=\sin x\in[-1,1]$；又由 $y=u^2$，得 $y=\sin^2 x\in[0,1]$，即通过中间媒介 u，y 是 x 的函数，称 $y=\sin^2 x$ 是 $y=u^2$，$u=\sin x$ 的复合函数. 必须注意，并不是任意两个函数都可以复合，如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 在实数范围内就不能复合. 因为对任何实数 x，都没有按给定的对应关系与之对应的 y 值.

定义 1.4 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，$D=\{x\in X\mid\varphi(x)\in U\}$，则对任意的 $x\in D$，通过 $u=\varphi(x)$，变量 y 有确定的值 $f(u)$ 与之对应，得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，该函数称为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数. 记作 $y=f[\varphi(x)]$，D 是它的定义域，u 称为中间变量.

如自由落体运动的物体，其动能 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$，速度 $v=gt$，它们的复合函数是 $E=\dfrac{1}{2}mg^2t^2$.

复合函数还可以有多个中间变量. 复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成，而更多的是由基本初等函数经过四则运算形成的简单函数构成的. 函数的复合和函数的四则运算是简单函数构造复杂函数的重要方法. 反之，许多复杂函数又可以把它们分解成简单函数的复合或四则运算的结果. 以后我们常用这种分解的方法简化对函数的讨论. 因此，能够熟练地分析复杂函数的构造并化成简单函数的复合或四则运算是非常重要的.

例 1 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0,\\ 2-x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f[f(3)]$.

解 $f[f(3)]=f[1-3]=f(-2)=2-(-2)=4$.

例 2 设函数 $f(x)=x^3$，$\varphi(x)=\sin\sqrt{x}$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

解 由 $f(x)$，$\varphi(x)$ 的表达式，有

$$f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^3=\sin^3\sqrt{x},\ \varphi[f(x)]=\sin\sqrt{f(x)}=\sin x^{\frac{3}{2}}.$$

例 3 已知 $y=\ln u$，$u=4-v^2$，$v=\cos x$，将 y 表示成 x 的函数.

解 $y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$.

例 4 分别指出函数 $y=\sin 5x$，$y=\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由哪些简单函数复合而成的.

解 $y=\sin 5x$ 是由 $y=\sin u$，$u=5x$ 复合而成的；

$y=\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\cos v$，$v=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ 复合而成的.

第四节　初等函数

一、基本初等函数及其图像

1. 幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域及其性质与 α 的取值有关，但 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$，$x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 内都有意义. 为了便于比较，我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形，而 $x<0$ 时的情形可根据函数的奇偶性确定.

当 $\alpha>0$ 时，函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界；当 $\alpha<0$ 时，函数的图像不过原点，但仍过点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少且无界，曲线以坐标轴为渐近线. 图 1－8 中画出了 $\alpha=\pm1$，$\alpha=2$，$\alpha=\frac{1}{3}$ 时的情形.

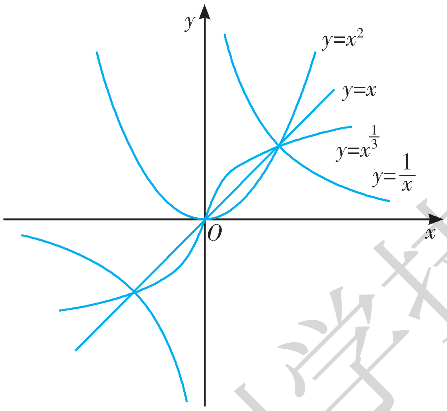


图 1－8

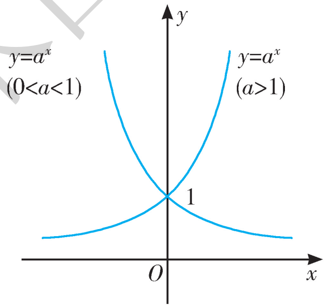


图 1－9

2. 指数函数

指数函数 $y=a^{x}(a>0$，且 $a\neq1)$，其定义域为 $\mathbf{R}$，由于无论 x 取何值，总有 $a^{x}>0$ 且 $a^{0}=1$，所以它的图像全部在 x 轴上方，且通过点 $(0,1)$，也就是说它的值域是 $(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 x 轴负半轴为渐近线；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 x 轴正半轴为渐近线. 如图 1－9 所示.

3. 对数函数

对数函数 $y=\log_{a}x(a>0$，且 $a\neq1)$，其定义域为 $(0,+\infty)$，图像全部在 y 轴右方，值域是 $\mathbf{R}$. 无论 a 取何值，曲线都通过点 $(1,0)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 y 轴负半轴为渐近线；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 y 轴正半轴为渐近线. 如图 1－10 所示.

对数函数 $y=\log_{a}x(a>0$，且 $a\neq1)$ 与指数函数 $y=a^{x}(a>0$，且 $a\neq1)$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

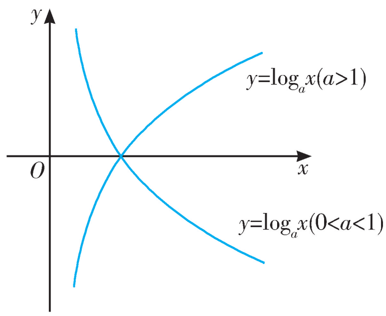


图 1－10

4. 三角函数

三角函数包括下面 6 个函数:

(1)正弦函数 $y=\sin x$. 其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $[-1,1]$,奇函数,以 2π 为周期,有界. 如图 1-11 所示.

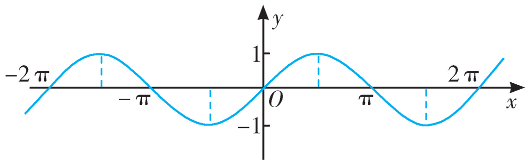


图 1-11

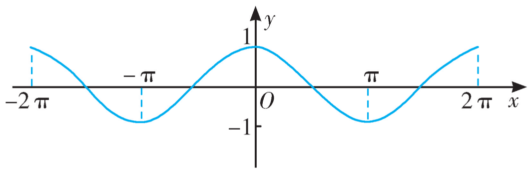


图 1-12

(2)余弦函数 $y=\cos x$. 其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $[-1,1]$,偶函数,以 2π 为周期,有界. 如图 1-12 所示.

(3)正切函数 $y=\tan x$. 其定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,值域为 $\mathbf{R}$,奇函数,以 π 为周期,在每一个周期内单调增加,以直线 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线. 如图 1-13 所示.

(4)余切函数 $y=\cot x$. 其定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,值域为 $\mathbf{R}$,奇函数,以 π 为周期,在每一个周期内单调减少,以直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线. 如图 1-14 所示.

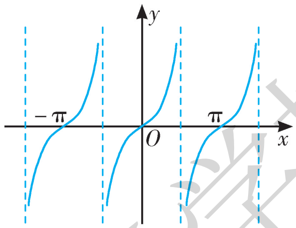


图 1-13

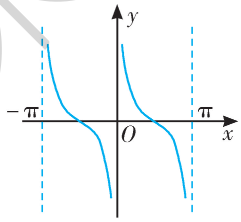


图 1-14

(5)正割函数 $y=\sec x$. 其定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,值域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,偶函数,以 2π 为周期,在区间 $\left(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)$ 内单调增加,在区间 $\left(2k\pi-\pi,2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi\right)$ 内单调减少,以直线 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线. 如图 1-15 所示.

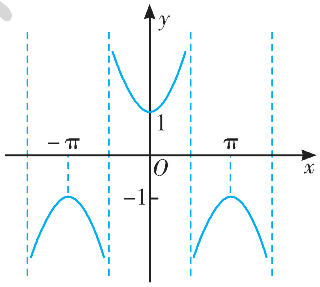


图 1-15

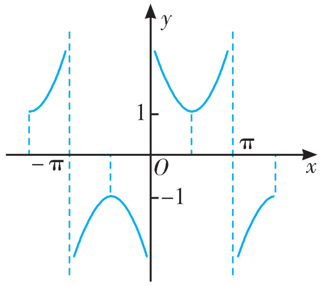


图 1-16

(6)余割函数 $y=\csc x$. 其定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,值域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,

奇函数，以 2π 为周期，在区间 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)$ 和 $\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在区间 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)$ 和 $\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调减少，以直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线. 如图 1－16所示.

5. 反三角函数

常用的反三角函数有 4 个：

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$. 它是正弦函数 $y=\sin x$ 在单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，因此称作反正弦函数，其定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，奇函数，单调增加，有界. 如图 1－17 所示.

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$. 它是余弦函数 $y=\cos x$ 在单调区间 $[0,\pi]$ 上的反函数，因此称作反余弦函数，其定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$，单调减少，有界. 如图 1－18 所示.

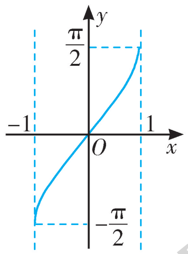


图 1－17

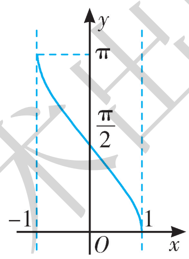


图 1－18

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$. 它是正切函数 $y=\tan x$ 在单调区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数，因此称作反正切函数，其定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，奇函数，单调增加，有界. 如图 1－19 所示.

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$. 它是余切函数 $y=\cot x$ 在单调区间 $(0,\pi)$ 内的反函数，因此称作反余切函数，其定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $(0,\pi)$，单调减少，有界. 如图 1－20 所示.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数五类函数统称为基本初等函数.

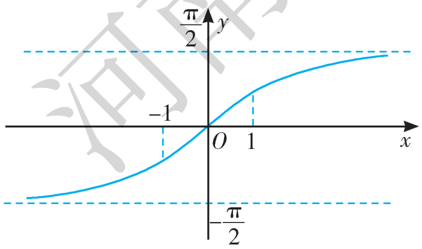


图 1－19

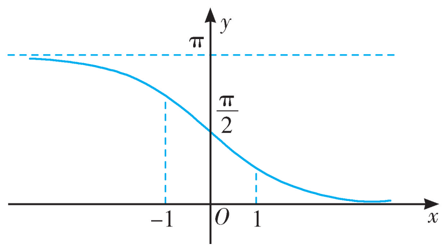


图 1－20

二、初等函数

定义 1.5　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合构成的、可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=2x^2-1$，$y=\sin\frac{1}{x}$，$y=|x|=\sqrt{x^2}$等都是初等函数. 高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数.

习题1-1

1. 判断下列各组函数是否是同一个函数.

(1)$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+3}$与$y(x)=x-1$；

(2)$f(x)=\lg x^3$ 与 $g(x)=3\lg x$；

(3)$f(x)=\lg x^{10}$与$g(x)=10\lg x$；

(4)$f(x)=(1-\cos^2x)^{\frac{1}{2}}$与$g(x)=\sin x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\frac{x^2}{1+x}$；　(2)$y=\sqrt{3x-x^2}$；　(3)$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；

(4)$y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+\lg(5-x)$；

(5)$y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2;\end{cases}$

(6)$f(\lg x)$，其中$f(u)$的定义域为$(0,1)$.

3. 确定下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=\sin x+\cos x$；　(2)$f(x)=a^x-a^{-x}(a>0)$；

(3)$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$；　(4)$f(x)=x^3+4$.

4. 求下列函数的反函数.

(1)$f(x)=x^2(0\leqslant x<+\infty)$；　(2)$f(x)=2^x+1$.

5. 设$f(x)=2x^2+2x-4$，求$f(1)$，$f(x^2)$，$f(a)+f(b)$.

6. 设$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{f(x)}$.

7. 设$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$求$f(\Delta x)-f(0)$($\Delta x$ 表示一个数).

8. 已知$f(x)$是二次多项式，且$f(x+1)-f(x)=8x+3$，$f(0)=0$，求$f(x)$的表达式.

9. 已知$f(\sin x)=\cos 2x+1$，求$f(\cos x)$.

10. 指出下列复合函数的复合过程.

(1)$y=\cos 5x$；　(2)$y=\sin x^8$；　(3)$y=(2-3x)^{\frac{1}{2}}$；

(4)$y=A\sin^2(\omega x+\varphi)$，其中$A,\omega,\varphi$为常数；

(5)$y=e^{\sin 3x}$.

11. 在半径为r的球内嵌入一个内接圆柱，试将圆柱的体积V表示为其高h的函数.

12. 设火车从甲站出发，以0.5 km/min^2 的匀加速度前进，经过2 min后开始匀速行驶，再经过7 min后以0.5 km/min^2 匀减速停在乙站，试将火车在这段时间内所行驶的路程s表示为时间t的函数，并作出其图形.

第五节　极坐标系

一、极坐标系

在解析几何中，直角坐标系虽是常用的一种坐标系，但用数对来表示点的位置并不是唯一方法. 例如，在直角坐标系中，要精确地描出点 $A(\sqrt{4.5},\sqrt{4.5})$ 是不容易的，但如果画出 $OA=\sqrt{(\sqrt{4.5})^2+(\sqrt{4.5})^2}=3$，$\angle xOA=45°$，这样，只要以 O 为顶点、Ox 为一边作 $\angle xOA=45°$，截取 $OA=3$，就可精确地描出 A 点. 此外，对于解决某些问题，使用直角坐标系有时也不够方便，例如，炮兵射击目标时，最好是知道目标的方位角和距离，这种在一个平面内用长度和角度来表示点的位置的坐标系就叫作极坐标系.

一般地，在平面内取一个定点 O，引一条射线 Ox，再选定一个长度单位和角度的正方向（通常取逆时针方向），这样就建立了一个极坐标系，O 点叫作极点，射线 Ox 叫作极轴，如图 1－21 所示.

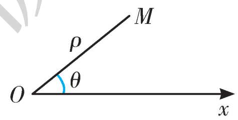


图 1－21

极坐标系和直角坐标系的主要区别有以下两点：

（1）在直角坐标系中，点的坐标 (x,y) 是一对有序实数，在极坐标系中，点的坐标 (ρ,θ) 仍是一对有序实数，但 ρ 是长度的量数（称为极径），θ 是角的量数（称为极角）.

（2）在直角坐标系中，坐标 (x,y) 与平面上的点是一一对应的，而在极坐标系里，如果极坐标给定了，平面上就有唯一的一个点与之对应. 反过来，如果在极坐标系中给定了一个点，它的极坐标却不是唯一的，它可以有各种不同的形式，一般说来，同一个点的坐标可以表示成 $(\rho,2k\pi+\theta)$，也可表示成 $(-\rho,2k\pi+\pi+\theta)$，其中，$k\in\mathbf{Z}$. 例如，点 $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ 可以表示成 $\left(3,2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(3,4\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，…，$\left(3,2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(-3,\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(-3,2\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，…，$\left(-3,2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

如果限定 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$ 或 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，那么除极点 $O(0,0)$ 外，平面内的点和极坐标就可以一一对应了. 此时，点 $P(\rho,\theta)$ 的位置可按下列规则来确定：作射线 OM 使 $\angle xOM=\theta$，在 OM 上取 P 点，使 $|OP|=\rho$，那么，P 点的极坐标就是 (ρ,θ).

为了研究方便，允许 ρ 取负值，当 $\rho<0$ 时，点 $P(\rho,\theta)$ 的位置可按下列规则来确定：作射线 OM，如图 1－22 所示，使 $\angle xOM=\theta$，在 OM 的反向延长线上取 P 点，使 $|OP|=|\rho|$，那么，P 点的极坐标就是 (ρ,θ).

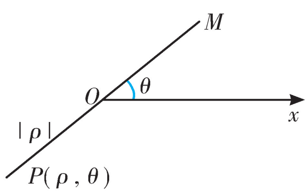


图 1－22

二、曲线的极坐标方程

在极坐标系中，曲线可以用含有 ρ,θ 这两个变数的方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 来表示，这种方程叫作曲线的极坐标方程. 这时，以这个方程的每一个解为坐标的点都是曲线上的点. 由于在极坐标平面中，曲线上每一个点的

坐标都有无穷多个,它们可能不会满足方程,但其中应至少有一个坐标能够满足这个方程.这一点是曲线的极坐标方程和直角坐标方程的不同之处.

求曲线的极坐标方程的方法和步骤与求直角坐标方程类似,就是把曲线看作适合某种条件的点的集合或轨迹,将已知条件用曲线上点的极坐标(ρ,θ)的关系式$\varphi(\rho,\theta)=0$表示出来,就得到曲线的极坐标方程.

例 1 求从极点出发,倾斜角是$\frac{\pi}{4}$的射线的极坐标方程.

解 设$M(\rho,\theta)$为射线上任意一点,参照图 1-21,设$\angle xOM=\frac{\pi}{4}$,则所求射线的方程为$\theta=\frac{\pi}{4}$.

注意:方程中不含ρ,说明射线上点的极坐标中的ρ无论取任何正值,θ的对应值都是$\frac{\pi}{4}$. 如果允许ρ取负值,方程$\theta=\frac{\pi}{4}$所表示的是倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的一条直线. 如果ρ不允许取负值,这条直线就要用两个方程$\theta=\frac{\pi}{4}$和$\theta=\frac{5\pi}{4}$来表示.

三、极坐标与直角坐标的互化

在以直角坐标的原点为极点,x轴的正方向为极轴,且两种坐标采取相同的长度单位的条件下,同一点的直角坐标(x,y)和极坐标(ρ,θ)有如下关系,如图 1-23 所示.

(1)$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta; \end{cases}$

(2)$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,$\tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0)$.

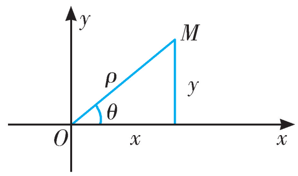


图 1-23

但要特别注意:①一般情况下ρ取正值,θ取最小正角;②由$\tan\theta=\frac{y}{x}$求θ时,因在$[0,2\pi]$中满足条件的θ值有两个,这就要由原来的点所在的象限来确定θ的值.

例 2 化等轴双曲线的直角坐标方程$x^2-y^2=a^2$为极坐标方程.

解 因为$x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,

代入直角坐标方程得$\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=a^2$,

即$\rho^2\cos 2\theta=a^2$,这就是等轴双曲线的极坐标方程.

例 3 把圆锥曲线的极坐标方程$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$化为直角坐标方程.

解 原方程变形为$\rho-ep\cos\theta=ep$,

因为$\rho\cos\theta=x$,代入得$\rho-ex=ep$,即$\rho=e(x+p)$.

两边平方得$\rho^2=e^2(x+p)^2$,

又因为$\rho^2=x^2+y^2$,代入$\rho^2=e^2(x+p)^2$,得$x^2+y^2=e^2(x+p)^2$,

即$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$.

由方程可看出,当$e>1$,$e=1$,$0<e<1$时方程分别表示的曲线为双曲线、抛物线和椭圆.

第六节　一些常用公式

除了我们在中学学过的常用公式外,在微积分学中还经常用到以下一些公式.

(1)二倍角公式:

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$

(2)三倍角公式:

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

(3)和差化积公式:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(4)积化和差公式:

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].$$

(5)对数恒等式:$N^{\log_N a}=a,\mathrm{e}^{\ln x}=x.$

第七节　一些常见函数的图形

前面我们讨论了基本初等函数的图形. 在微积分学中,还有一些常见函数的图形,我们列在下面,以备查用.

一、心形线

1. $\rho=a(1+\cos\theta)$. 如图 1－24 所示,其图形关于极轴对称. 当 θ 由 0 变到 π 时,图形由点 A 经第一、第二象限到原点;当 θ 由 π 变到 2π 时,图形又由原点经第三、第四象限回到 A 点.

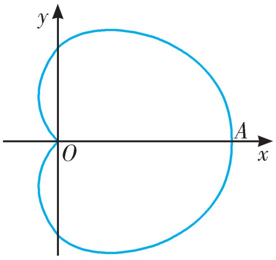


图 1－24

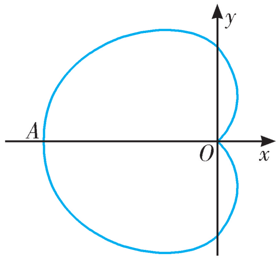


图 1－25

2. $\rho=a(1-\cos\theta)$. 如图 1－25 所示，其图形关于极轴对称. 当 θ 由 0 变到 π 时，图形由原点经第一、第二象限到点 A；当 θ 由 π 变到 2π 时，图形又由 A 点经第三、第四象限回到原点.

3. $\rho=a(1+\sin\theta)$. 如图 1－26 所示，其图形对称轴为 $\theta=\frac{\pi}{2}$. 当 θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，图形由原点经第四、第一象限到点 A；当 θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，图形又由点 A 经第二、第三象限回到原点.

4. $\rho=a(1-\sin\theta)$. 如图 1－27 所示，其图形对称轴为 $\theta=\frac{\pi}{2}$. 当 θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，图形由点 A 经第四、第一象限到原点；当 θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，图形又由原点经第二、第三象限回到点 A.

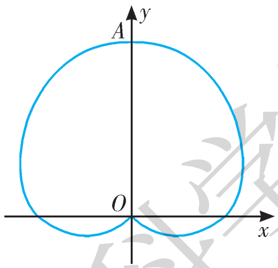


图 1－26

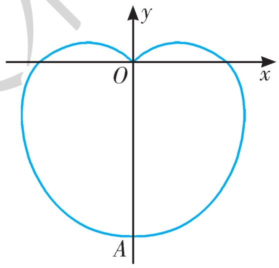


图 1－27

二、玫瑰线

1. $\rho=a\sin3\theta(a>0$, 三叶). 如图 1－28 所示，其图形关于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 对称. 以一片叶子为例，当 θ 由 0 变到 $\frac{\pi}{6}$，再由 $\frac{\pi}{6}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$ 时，图形由原点经第一象限到点 A，再回到原点.

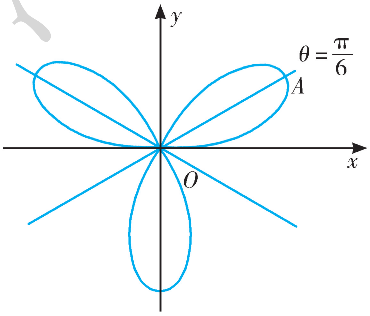


图 1－28

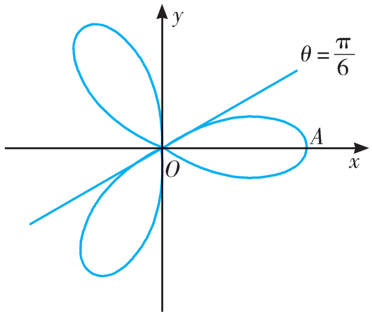


图 1－29

2. $\rho=a\cos3\theta(a>0$, 三叶). 如图 1－29 所示，其图形关于极轴对称. 以一片叶子为例，当

θ 由 $-\frac{\pi}{6}$变到 0，再由 0 变到$\frac{\pi}{6}$时，图形由原点经点 A，再逆时针回到原点.

3. $\rho = a\sin 2\theta(a>0$，四叶). 如图 1－30 所示，其图形关于极轴和 $\theta=\frac{\pi}{2}$对称. 以一片叶子为例，当 θ 由 0 变到$\frac{\pi}{4}$，再由$\frac{\pi}{4}$变到$\frac{\pi}{2}$时，图形由原点经第一象限到点 A，再回到原点.

4. $\rho = a\cos 2\theta(a>0$，四叶). 如图 1－31 所示，其图形关于极轴和 $\theta=\frac{\pi}{2}$对称. 以一片叶子为例，当 θ 由 $-\frac{\pi}{4}$变到 0，再由 0 变到$\frac{\pi}{4}$时，图形由原点经点 A，再逆时针回到原点.

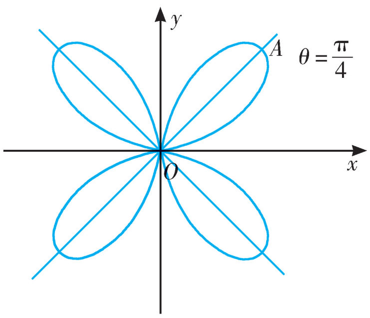


图 1－30

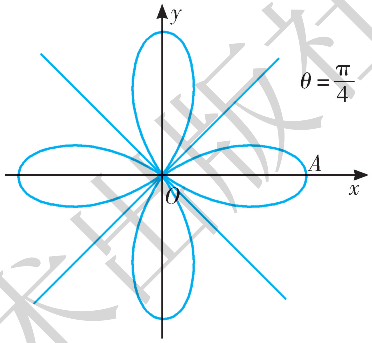


图 1－31

三、参数方程中摆线与星形线的图形

1. 摆线方程$\begin{cases} x=a(1-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$ 如图 1－32 所示，当 t 由 0 变到 π 再变到 2π 时，图形由原点经第一象限到最高点 A 再到点 B.

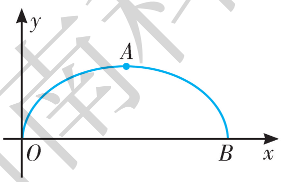


图 1－32

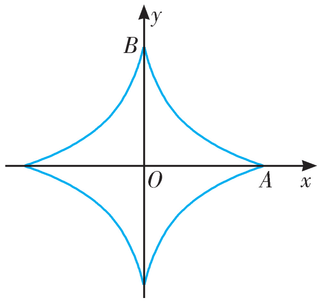


图 1－33

2. 星形线方程$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(a>0)$. 如图 1－33 所示，图形关于 x 轴、y 轴和原点对称. 当 t 由 0 变到$\frac{\pi}{2}$时，图形由点 A 经第一象限变到点 B.

综合测试题一

一、判断题

1. $y=\sqrt{x^2}$与 $y=x$ 相同. (　　)

2. $y=(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数. (　　)

3. 凡是分段表示的函数都不是初等函数.　（　　）
4. $y=x^2(x>0)$是偶函数.　（　　）
5. 两个单调增函数之和仍为单调增函数.　（　　）
6. 实数域上的周期函数的周期有无穷多个.　（　　）
7. 复合函数$g[g(x)]$的定义域即$g(x)$的定义域.　（　　）
8. $y=f(x)$在(a,b)内处处有定义,则$f(x)$在(a,b)内一定有界.　（　　）

二、填空题

1. 函数$y=f(x)$与其反函数$y=\varphi(x)$的图形关于________对称.
2. 若$f(x)$的定义域是$[0,1]$,则$f(x^2+1)$的定义域是________.
3. $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数为________.
4. 若$f(x)$是以2为周期的周期函数,且在闭区间$[0,2]$上函数$f(x)=x^2-2x$,则在闭区间$[2,4]$上,$f(x)=$________.
5. $f(x)=x+1,\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,则$f[\varphi(x)+1]=$________,$\varphi[f(x)+1]=$________.
6. $f(x)=\log_2(\sin x+2)$是由简单函数________和________复合而成的.
7. $y=x^x$是由简单函数________和________复合而成的.

三、选择题

1. 下列函数中既是奇函数又是单调增加的函数是（　　）.

A. $\sin^3 x$　　B. x^3+1　　C. x^3+x　　D. x^3-1

2. 设$f(x)=4x^2+bx+5$,若$f(x+1)-f(x)=8x+3$,则b应为（　　）.

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

3. $f(x)=\sin(x^2-x)$是（　　）.

A. 有界函数　　B. 周期函数　　C. 奇函数　　D. 偶函数

四、计算题

1. 求$y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$的定义域.
2. 已知$f[\varphi(x)]=1+\cos x,\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$,求$f(x)$.
3. 设$f(x)=x^2,g(x)=e^x$,求$f[g(x)],g[f(x)],f[f(x)],g[g(x)]$.
4. 设$\varphi(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$求$\varphi\left(\dfrac{1}{5}\right),\varphi\left(-\dfrac{1}{2}\right),\varphi(-2)$并作出函数$y=\varphi(x)$的图形.
5. 某运输公司规定吨千米(每吨货物每千米)运价在a千米内为k元,超过a千米部分八折优惠.试求每吨货物运价m元和路程s千米之间的函数关系.

第二章　极限与连续

微积分是以函数为研究对象的一门学科.那么,它是用什么方法研究函数呢?这个方法就是极限.极限概念是微积分的重要概念,极限理论是微积分的基础理论.从方法论角度来说,极限是微积分区别于初等数学的显著标志.微积分中几乎所有的概念(如导数、微分、积分、级数等)都离不开极限.也可以说,极限概念贯穿于微积分的始与终.从本章开始我们将系统地学习极限的概念、运算和性质.与极限概念有着紧密联系的是函数的连续性.在这一章中,我们将从几何直观入手,给出连续的定义.作为极限的直接应用,在本章的后几节中,我们将进一步研究函数连续的有关性质及初等函数的连续性问题.

极限概念是为计算某些问题的精确结果而提出的.早在公元263年,我国杰出的数学家刘徽就创立并使用了极限方法"割圆术".他为了计算圆的周长,设想用正多边形(正六边形、正十二边形、正二十四边形……正一百九十二边形($3\cdot 2^n$))去逼近.他指出"割之弥细,所失弥少",即边数越多,近似程度越高.但是无论边数怎样多,只要是有限数,所得多边形的周长就永远是所求圆周长的近似值.而我们需要的是圆周长的精确值,因此,当"割之又割,以至于不可割"时,即让边数 n 无限增多($n\to\infty$)时,则"与圆合体,而无所失矣".近似值向精确值进行了转化,从而求得圆的周长.

刘徽的"割圆术"给了我们一个重要启示:当边数有限时,只是解决了圆周长近似值的计算问题,而当边数趋于无穷时,则周长近似值向精确值转化.因此,未知与已知,直与曲,近似与精确,既有差别又有联系,在无限的过程中,可以由此达彼.但很遗憾,虽然我们的数学极限思想建立较早,但形成严密理论体系的却是19世纪的柯西(法国数学家)等人.

第一节　数列及其极限

一、数列的概念

按照一定规律排成的一列数:$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$或简记为$\{a_n\}$称为数列.其中每一个数称为数列的项,第 n 项 a_n 称为数列的通项.

数列$\{a_n\}$也可以看成是定义在全体正整数集上的函数,即 $a_n=f(n)$,$n=1,2,3,\cdots$或 $n\in\mathbf{N}_+$.

例 1　$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}:1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots,a_n=\dfrac{1}{n}$.

例 2　$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}:\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots,a_n=\dfrac{1}{2^n}$.

例 3　$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}:-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{(-1)^n}{n},\cdots,a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$.

例 4 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}n\right\}$:$0,2,0,4,\cdots,\frac{1+(-1)^n}{2}n,\cdots,a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}n$.

例 5 $\{2n\}$:$2,4,6,\cdots,2n,\cdots,a_n=2n$.

例 6 $\{(-1)^n\}$:$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots,a_n=(-1)^n$.

例 7 $\{-n^2\}$:$-1,-4,-9,\cdots,-n^2,\cdots,a_n=-n^2$.

把数列$\{a_n\}$的每一项a_n在数轴上表示出来,是一列点,称为点列.

二、数列的性质

既然数列是一种特殊的函数,当然也具有函数的某些性质.

1. 数列的有界性

定义 2.1 对于数列$\{a_n\}$,若存在正数M,使得对一切n,都有$|a_n|\leqslant M$,则称数列$\{a_n\}$有界,M称为$\{a_n\}$的一个界.若这样的正数M不存在,则称数列$\{a_n\}$无界.

逻辑语言表述:数列$\{a_n\}$有界$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbf{N}_+$,$\exists M>0$,有$|a_n|\leqslant M$.

如例1、例2、例3和例6都是有界数列,例4、例5、例7是无界数列.对数列$\{a_n\}$,若存在数M,使得对一切n都有$a_n\leqslant M$(或$a_n\geqslant M$),则称数列$\{a_n\}$有上界(或有下界),M为$\{a_n\}$的一个上界(或下界).用逻辑语言表述为:数列$\{a_n\}$有上(下)界$\Leftrightarrow\exists M$,$\forall n\in\mathbf{N}_+$,有$a_n\leqslant M$(或$a_n\geqslant M$),如例4、例5是有下界而无上界,例7是有上界而无下界.

从上面的分析得知,一个数列$\{a_n\}$有界的充要条件是$\{a_n\}$既有上界又有下界.即在数轴上,存在正数M,使有界数列所对应的点列全部落在闭区间$[-M,M]$上.

2. 数列的单调性

定义 2.2 设有数列$\{a_n\}$,若对于任意n有$a_n\leqslant a_{n+1}$(或$a_n\geqslant a_{n+1}$),则称数列$\{a_n\}$单调递增(或单调递减),单调递增或单调递减数列统称为单调数列.

如例1、例2、例7是单调递减数列;例5是单调递增数列;例3、例4、例6不是单调数列.

单调数列$\{a_n\}$在数轴上所对应的点列随着n的增加都朝一个方向增加.

三、数列的极限

在初等数学里,研究数列不外乎求通项与前n项和.而在高等数学中,是从另一个角度研究数列的,即当自变量n无限增大时,数列$\{a_n\}$的变化趋势,并给出其精确定义.

1. 考察 数列$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$,当$n$无限增大时,$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的变化趋势.

观察 当n无限增大时(记$n\to\infty$),$\left\{\frac{1}{n}\right\}$无限趋近于0$\left(\text{记}\frac{1}{n}\to 0\right)$.如图2－1所示.

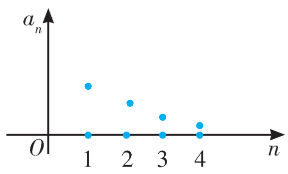


图 2－1

实验 n:$1,\cdots,10,\cdots,100,\cdots,10\ 000,\cdots$

$\frac{1}{n}$:$1,\cdots,\frac{1}{10},\cdots,\frac{1}{100},\cdots,\frac{1}{10\ 000},\cdots$

结论　数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$有一个稳定的变化趋势，即当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\to 0$，则数0就是数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限.

下面把这种定性的描述上升为精确定义.

首先必须明确下列问题.

问题1：何谓"$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\to 0$"？

中学里比较两个数a,b的接近程度是用$|a-b|$来刻画的. 同理$a_n\to 0$，也用第n项$\frac{1}{n}$与0的距离$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$来说明，即$\left|\frac{1}{n}-0\right|$的距离能任意小，并保持任意小.

问题2：何谓"$\left|\frac{1}{n}-0\right|$的距离能任意小，并保持任意小"？

例如，①对$\frac{1}{10}$，欲使$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$，只需$n>10$即可(取$N=10$)，第10项以后所有项$\left(a_{11}=\frac{1}{11},a_{12}=\frac{1}{12},\cdots\right)$都满足这个不等式.

②对$\frac{1}{10^4}$，欲使$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10^4}$，只需$n>10^4$即可(取$N=10^4$)，第$10^4$项以后的所有项$\left(a_{10\,001}=\frac{1}{10\,001},a_{10\,002}=\frac{1}{10\,002},\cdots\right)$都满足这个不等式.

③对$\frac{1}{10^6}$，欲使$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10^6}$，只需$n>10^6$即可(取$N=10^6$)，第$10^6$项以后的所有项$\left(a_{1\,000\,001}=\frac{1}{1\,000\,001},a_{1\,000\,002}=\frac{1}{1\,000\,002},\cdots\right)$都满足这个不等式.

问题3：尽管对$\frac{1}{10},\frac{1}{10^4},\frac{1}{10^6}$分别能做到：$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\frac{1}{10}$，$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\frac{1}{10^4}$，$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\frac{1}{10^6}$，能否说明$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$能任意小，并保持任意小？当然这是不行的，这是因为尽管$\frac{1}{10},\frac{1}{10^4},\frac{1}{10^6}$都是比较小的正数，甚至$\frac{1}{10^6}$也可以认为是非常小的数，但它们毕竟是确定的数. 而描述$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$任意小，并保持任意小，上述确定的数是不能满足要求的，因此必须用一个任意的、无论多么小的正数ε才行，即$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$.

事实上，这也是能够做到的，显然，只需$n>\frac{1}{\varepsilon}$即可，而从数列的第$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$项以后的所有项$a_{N+1},a_{N+2},\cdots$都满足这个不等式.

综上分析，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限是0的定量定义为：对任意$\varepsilon>0$，总存在正整数$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，对任意的正整数$n>N$，有$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$. 事实上，用$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$量化了$\frac{1}{n}\to 0$，用$\forall n>N=$

$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$量化了 $n\to\infty$,这里的 ε 是任意给定的,N 是通过解不等式找到的.

2. 数列极限的概念

上面给出了一个具体的数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限是 0 的定量定义. 根据同样的分析方法和数学语言,不难给出一般的数列$\{a_n\}$的极限是 a 的定量定义.

> **定义 2.3($\varepsilon-N$ 定义)**　设有数列$\{a_n\}$,a 是常数,若对于任意 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,对任意的正整数 $n>N$,有$|a_n-a|<\varepsilon$,则称数列$\{a_n\}$的极限是 a,或称数列$\{a_n\}$收敛于 a,称数列$\{a_n\}$是收敛数列,记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $a_n\to a(n\to\infty)$,即
>
> $$\lim_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\forall n>N,有|a_n-a|<\varepsilon.$$

若数列$\{a_n\}$不存在极限,则称数列$\{a_n\}$发散.

几何解释:

对任意 $\varepsilon>0$,就有一个以 a 为中心,以 ε 为半径的邻域 $U(a,\varepsilon)$,或开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$,数列$\{a_n\}$中总存在一项 a_N,在此项后面的所有项 $a_{N+1},a_{N+2},\cdots$在数轴上所对应的点,都落在 $U(a,\varepsilon)$或区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$之中,而至多有 N 个点 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 在此邻域之外. 因为 ε 可以任意小,所以数列$\{a_n\}$各项所对应的点 a_n 都无限聚集在点 a 的附近,如图 2-2 所示.

图 2-2

关于数列极限概念的几点说明:

(1) 关于 ε

①一方面 ε 是任意给出的,它具有绝对的任意性,只有这样,才能保证 $a_n\to a$ 的无限性;另一方面 ε 又具有相对的固定性,一旦给出,便相对固定,而这种相对固定性是通过不等式$|a_n-a|<\varepsilon$ 来体现的,从而也可估算 a_n 与 a 的近似程度. 显然,ε 的任意性是通过无限多个相对固定性表现出来的,ε 的这种两面性使数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义能从近似到精确,又能从精确转化到近似,因此,它是极限定量定义的精髓.

②ε 是任意给出的正数,则 $c\varepsilon$(c 为正常数),ε^2,$\sqrt{\varepsilon}$,$\cdots$也都是任意给出的正数. 显然,它们在形式上与 ε 不同,但在本质是一样的.

(2)关于 N

①在数列极限定义中,第二句“$\exists N\in\mathbf{N}_+$”在于说明正整数 N 的存在性,N 与 ε 有关,一般来说 ε 越小,N 就越大.

②若 $\exists N_1>N$,当 $n>N_1$ 时,有$|a_n-a|<\varepsilon$,也能说明 $a_n\to a$.

四、收敛数列与其性质

研究例 1 ~ 例 7,我们可以得出下列结论.

> **定理 2.1**　若数列$\{a_n\}$收敛,则数列$\{a_n\}$有界.

证明　设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，根据数列极限定义，取定$\varepsilon_0=1$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall n>N$，有

$$|a_n-a|<1,$$

从而$\forall n>N$，有

$$|a_n|=|a_n-a+a|\leqslant|a_n-a|+|a|<1+|a|,$$

取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1+|a|\}$，有$|a_n|\leqslant M$，即数列$\{a_n\}$有界.

注意：(1)定理2.1的等价命题是：若数列$\{a_n\}$无界，数列发散.

例如，数列$\{n^{(-1)^{n-1}}\}=\left\{1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},\cdots,n^{(-1)^{n-1}},\cdots\right\}$无界，则此数列发散.

(2)数列有界是数列收敛的必要条件，不是充分条件.

数列有界也不一定收敛. 如例6中数列$\{(-1)^n\}$有界，但发散.

定理2.2　单调且有界的数列必有极限.（证明略）

注意：定理2.2可以理解为单调递增有上界(或单调递减有下界)的数列必有极限.

单调有界只是数列收敛的充分条件，其中有界性是数列收敛的必要条件. 而单调性既不是充分条件，也不是必要条件. 单调、有界和收敛之间的关系如图2-3所示.

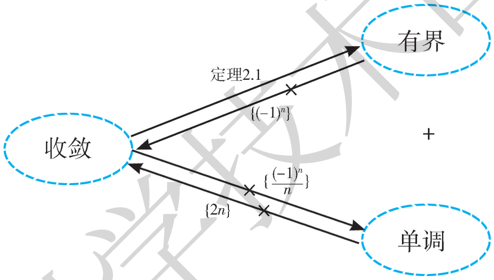


图2-3

例如，例3中数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$收敛，但不单调；例5中数列$\{2n\}$单调，但不收敛. 利用定理2.2，可以证明重要数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$收敛，我们把它的极限记为e，即$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

可以证明，e是介于2和3之间的一个无理数，它的值为$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\cdots$，以e为底的对数称为自然对数，记作$\ln x$.

习题2-1

1. 判断题.

(1)数列$\{a_n\}$中任意去掉或增加有限项，不影响$\{a_n\}$的极限.　(　　)

(2)数列$\{a_nb_n\}$的极限存在，则$\{a_n\}$的极限必存在.　(　　)

(3)若数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都发散，则数列$\{x_n+y_n\}$也发散.　(　　)

(4)若数列$\{a_n\}$是单调的，则数列$\{a_n\}$是收敛的.　(　　)

2. 观察一般项x_n的变化趋势，写出它们的极限.

(1)$x_n=\frac{1}{2^n}$；　(2)$x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$；　(3)$x_n=2+\frac{1}{n^2}$；　(4)$x_n=\frac{n-1}{n+1}$.

3. 用“$\varepsilon-N$”定义叙述下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0(\alpha>0)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n}=0(|q|<1)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$（$c$ 为常数）.

4. 设数列$\{x_n\}$的一般项 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.（1）求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；（2）求出 N，使当 $n>N$，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε；（3）当 $\varepsilon=0.001$ 时，N 是多少？

第二节　函数的极限

数列是定义在正整数集上的函数，它的自变量是离散的取值，因而数列的极限只是一种特殊函数的极限. 下面我们来讨论定义在实数集上自变量连续取值的函数 $y=f(x)$ 的极限. 根据自变量 x 的变化过程，我们分两种基本情况来讨论：第一种，在自变量 x 的绝对值无限增大的过程中，函数 $f(x)$ 的变化趋势，即 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限；第二种，在自变量 x 无限接近于 x_0 的过程中，函数 $f(x)$ 的变化趋势，即 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限.

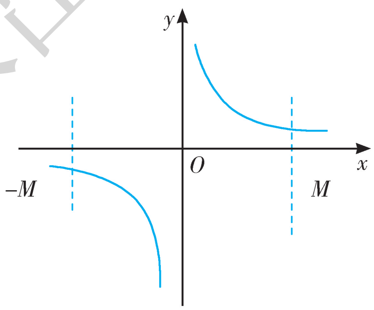


图 2－4

一、当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限.

考察　当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限.

结论　从图 2－4 知，$x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$.

下面就上述情况，给出定量定义.

回顾　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0 \Leftrightarrow n\to\infty$　　　　$\dfrac{1}{n}\to 0$

⇓量化　　　　⇓量化

(3) $\forall n>N$　　　　(4) $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ [(1) $\forall\varepsilon>0$]

[(2) $\exists N\in\mathbf{N}_+$]

类比　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x\to\infty$　　　　$\dfrac{1}{x}\to 0$

⇓量化　　　　⇓量化

(3) $\forall x,|x|>M$　　　　(4) $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ [(1) $\forall\varepsilon>0$]

[(2) $\exists M>0$]

即　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Leftrightarrow$ (1) $\forall\varepsilon>0$，(2) $\exists M>0$，(3) $\forall x,|x|>M$，(4) $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$.

那么对于一般函数 $y=f(x)$，若有常数 A，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限是 A 的定量定义如下.

定义 2.4（$\varepsilon-M$ 定义）　设有函数 $f(x)$，A 是常数，若对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在正数 $M>0$，使得对于一切的 x，当 $|x|>M$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$，即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0,\ \forall x,\text{当}|x|>M\text{时，有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

几何意义：$|f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$. 即作两条平行线 $y=A-\varepsilon$，$y=A+\varepsilon$，对于每一个预先给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 M，当 $|x|>M$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像就全部夹在这两条平行线之间，如图 2-5 所示.

从图 2-5 可以看到，$x\to\infty$ 包含两种情况. 一是 $x\to+\infty$，二是 $x\to-\infty$，而对函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

但对于函数 $y=\arctan x$ 与 $y=e^x$，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

从而 $x\to\infty$ 时，$\arctan x$ 极限不存在. 又因为

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0,$$

从而 $x\to\infty$ 时，e^x 也不存在极限.

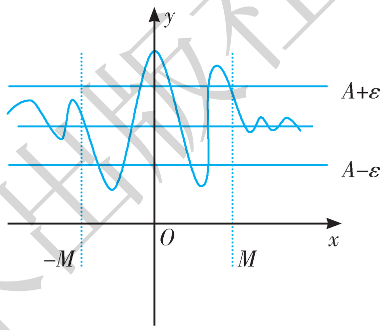


图 2-5

下面分别就两种情况 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 依照定义 2.4，给出定量定义.

定义 2.4′　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0,\ \forall x$，当 $x>M$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定义 2.4″　$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0,\ \forall x$，当 $x<-M$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

几何意义略.（可自行画图）

定理 2.3　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 有一个不存在，或存在但不相等，就说明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

二、当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

考察　$x\to\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 的变化情况.

分析　$f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处没有意义.

当 $x\neq\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}=2x+1$. 从图 2-6 可知，$x$ 无限趋近 $\dfrac{1}{2}$，但不等于 $\dfrac{1}{2}$ 时，对应的函数值 $\dfrac{4x^2-1}{2x-1}=2x+1$ 无限接近于 2.

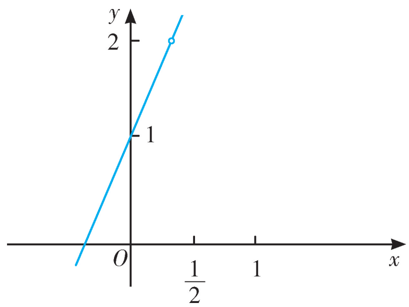


图 2-6

结论　$x\to\frac{1}{2}$时，$f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}\to 2$.

下面给出定量定义.

回顾　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x\to\infty$　　　$\frac{1}{x}\to 0$

$\Downarrow$ 量化　　　　　$\Downarrow$ 量化

(3) $|x|>M$

[(2) $\exists M>0$]　　　(4) $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ [(1) $\forall\varepsilon>0$]

类比　$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=2\Leftrightarrow x\to\frac{1}{2}$　　　$\frac{4x^2-1}{2x-1}\to 2$

$\Downarrow$ 量化　　　　　$\Downarrow$ 量化

(3) $0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$

[(2) $\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$]　　　(4) $\left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-2\right|<\varepsilon$ [(1) $\forall\varepsilon>0$]

$\Downarrow$

$|2x-1|<\varepsilon$

$\Downarrow$

$0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$　$\Leftarrow$　$2\left|x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$

即　$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=2\Leftrightarrow$(1) $\forall\varepsilon>0$，(2) $\exists\delta>0$，(3) $\forall x$，$0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$，(4) $\left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-2\right|<\varepsilon$.

对于一般函数 $y=f(x)$，设有常数 A，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$无限趋近于 A 的定量定义如下.

定义 2.5（$\varepsilon-\delta$ 定义）　设函数 $f(x)$在点 x_0 的去心邻域内有定义，A 是一个确定的常数. 若对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在正数 δ，使得对满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 x 无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$以 A 为极限（或 $f(x)$收敛于 A）. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或 $f(x)\to A(x\to x_0)$），即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\text{当 }0<|x-x_0|<\delta\text{ 时，有 }|f(x)-A|<\varepsilon.$$

几何意义：

$$|f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,$$
$$0<|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta(x\neq x_0),$$

即对每一个预先给定的 $\varepsilon>0$，在 x 轴上总存在这样一个小区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，只要 $x(x\neq x_0)$ 进入 x_0 的 $U(x_0,\delta)$ 内，则对应的函数值 $f(x)$ 一定落在 y 轴上的小区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内. 或者说，曲线 $y=f(x)$ 在小区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)(x\neq x_0)$ 内的部分被夹在两平行线 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 之间. 如图 2－7 所示.

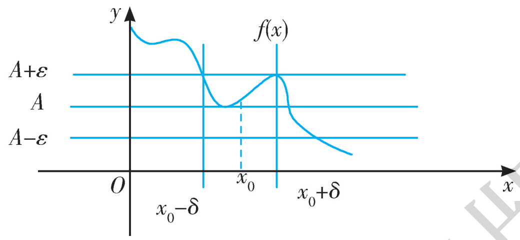


图 2－7

上面给出了当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限定义. 事实上，$x\to x_0$ 的方式是任意的，x 既可以从 x_0 的左侧趋近于 x_0，记作 $x\to x_0^-$，也可以从 x_0 的右侧趋近于 x_0，记作 $x\to x_0^+$. 当 $x\to x_0^-$ 时，若 $f(x)$ 的极限存在，这样的极限我们称为左极限，记作 $f(x_0^-)$. 当 $x\to x_0^+$ 时，若 $f(x)$ 的极限存在，这样的极限我们称为右极限，记作 $f(x_0^+)$. 左极限和右极限通称为单侧极限，其定量定义如下：

定义 2.5′　$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定义 2.5″　$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定理 2.4　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例 1　试求函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x<0, \\ x^2, 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, x>1 \end{cases}$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限.

解　(1) 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1, \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0,$$

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左、右极限存在但不相等，所以，由定理 2.4 可知，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

(2) 因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1, \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1,$$

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左、右极限存在而且相等，

所以，当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 的极限存在且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x-1)=1.$

例 3 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x}, x\neq0,\\ 0, x=0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x+1)=1.$

例 4 求证：$\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

证明

$$\lim_{x\to0^+}|x|=\lim_{x\to0^+}x=0,$$

$$\lim_{x\to0^-}|x|=\lim_{x\to0^-}(-x)=0,$$

所以由定理 2.4 得 $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

例 5 求证：$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处极限不存在.

证明 $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)=-1$，

所以由定理 2.4，$\lim\limits_{x\to0}\operatorname{sgn}(x)$ 不存在.

从以上例子可以看出，在点 x_0 处，函数 $f(x)$ 的函数值与极限值不是一个概念，比较它们之间的关系，有下列情况：

①$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $f(x_0)$ 不存在，如例 2.

②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，但 $f(x_0)$ 存在，如例 5.

③$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且 $f(x_0)$ 存在，但不相等，如例 3.

④$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且 $f(x_0)$ 存在，并相等，如例 4.

习题2-2

1. 判断题.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x_0)=A$. (　　)

(2) 已知 $f(x_0)$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 有可能存在. (　　)

(3) 若 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必存在. (　　)

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=0$. (　　)

2. 计算：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. 用 $\varepsilon-M$ 定义或 $\varepsilon-\delta$ 定义叙述下列各式.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0\ (n\in\mathbf{N}_+)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$；　　(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, x<3, \\ 0, x=3, \\ x^2, x>3. \end{cases}$ 试画出 $f(x)$ 的图形，并求单侧极限 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$.

第三节　极限的性质与运算

函数的极限有三种情况：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$（特殊函数），$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 本节将要讲到的性质、定理，除特别声明外，都适用于这三者. 为此我们常用统一的符号 $\lim f(x)=A$ 表示. 在定理的叙述及证明中，我们只选择一种情况给出结果.

*一、极限的性质

性质 2.1（唯一性）　若函数极限存在，则其极限值唯一.

性质 2.2（保号性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则

$\exists\delta>0$，$\forall x$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

性质 2.3（局部有界性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\exists M>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

注意：(1) 数列极限的有界性是整体的，即 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，都有 $|a_n|\leqslant M$，而函数极限的有界是局部的，例如 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$\forall n\in\mathbf{N}_+$ 有 $|a_n|\leqslant 1$. 而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x\to 1$，$f(x)\to 1$，只在 $\mathring{U}(1,\delta)$ 内，即 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时成立；而 $x\to\infty$，$f(x)\to 0$，在 x 充分大以后，$\exists M>0$，$|x|>M$ 时有界；至于 $|x-1|\geqslant\delta$ 或 $|x|\leqslant M$ 时，可以有界，也可以无界.

(2) 用本性质的逆否命题（无界变量一定无极限）可以判定某些变量没有极限，例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的邻域内无界，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无极限.

性质 2.4（迫敛性）　若在 x_0 的某个去心邻域内，有 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

二、函数极限的四则运算

本章前两节的方法只能解决两类问题：一是靠观察、实验的方法给出基本初等函数和简单数列的极限；二是用定义验证某个常数是否为某个函数的极限. 而对于求函数（初等函数与非初等函数）极限，还必须介绍函数极限的四则运算法则.

定理 2.5 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$，

特别地，$\lim kf(x)=k\lim f(x)=kA$（k 为常数），$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$（$n$ 为有限数）；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

这里只给出定理2.5(2)在 $x\to x_0$ 时的证明（用 $\varepsilon-\delta$ 定义）.

证明 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，对 $\forall\varepsilon>0$，

$$\exists\delta_1>0,\text{对}\ \forall x,0<|x-x_0|<\delta_1,|f(x)-A|<\varepsilon,$$
$$\exists\delta_2>0,\text{对}\ \forall x,0<|x-x_0|<\delta_2,|g(x)-B|<\varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以根据性质 2.3，

$$\exists M>0,\ \exists\delta_0>0,\ \forall x,0<|x-x_0|<\delta_0,\text{有}\ |f(x)|\leqslant M.$$

取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$，对 $\forall x$，$0<|x-x_0|<\delta$，同时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,|g(x)-B|<\varepsilon,|g(x)|\leqslant M.$$

于是对 $\forall x$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB|&=|f(x)g(x)-Bf(x)+Bf(x)-AB|\\&\leqslant|f(x)||g(x)-B|+|B||f(x)-A|\\&<M\cdot\varepsilon+|B|\cdot\varepsilon=(M+|B|)\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 $M+|B|$ 是一正数，所以根据极限定义

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=AB=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x).$$

注意：(1) 四则运算可以推广到有限个函数的代数和与乘积的情况；

(2) 每个函数极限都存在时，才能运用定理2.5.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4x+5)$.

解 根据定理 2.5 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(3x^2-4x+5)&=\lim_{x\to 2}(3x^2)-\lim_{x\to 2}(4x)+\lim_{x\to 2}5\\&=3\lim_{x\to 2}(x^2)-4\lim_{x\to 2}x+5=3(\lim_{x\to 2}x)^2-4\times 2+5\\&=3\times 2^2-4\times 2+5=9.\end{aligned}$$

归纳 对于多项式函数

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}f(x)&=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\\&=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n)+\lim_{x\to x_0}(a_1x^{n-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}a_n\\&=a_0\lim_{x\to x_0}(x^n)+a_1\lim_{x\to x_0}(x^{n-1})+\cdots+a_n\\&=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+a_n\\&=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).\end{aligned}$$

因此，对多项式函数 $f(x)$，当 $x\to x_0$ 时，极限值等于函数值.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2-4x+5}$.

解　这是两个函数的商，且分母的极限不为 0，所以可直接用定理 2.5(3)来计算.

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^3-x+1}{3x^2-4x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(2x^3-x+1)}{\lim\limits_{x\to2}(3x^2-4x+5)}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}.$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$.

解　$x\to2$ 时，分子、分母极限为零，此式称为"$\dfrac{0}{0}$"型不定式，不能直接用定理 2.5(3)，但可先约分再求极限.

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3}{x^2-4}$.

解　$x\to2$ 时，分母极限等于 0，所以不能用定理 2.5(3)，但分子极限不等于 0，所以可先求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x+3}$ 的极限.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x+3}=\frac{0}{5}=0.$$

故
$$\lim_{x\to2}\frac{x+3}{x^2-4}=\infty.$$

归纳　对于有理函数 $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$，

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\begin{cases}\dfrac{P_m(x_0)}{Q_n(x_0)}, Q_n(x_0)\neq0,\\ \infty, Q_n(x_0)=0, P_m(x_0)\neq0,\\ \dfrac{0}{0}, Q_n(x_0)=0, P_m(x_0)=0.\end{cases}$$

注意：当 $Q_n(x_0)=0$ 时，商的极限运算法则不能应用，需要特别考虑.

例 5　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{1-x^2}=\infty$，不能直接用定理 2.5(1)，此式称为"$\infty-\infty$"型不定式，需先化简，再求极限.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-x^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}.$$

例 6　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2-4x+5}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-4x+5)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+x-1)=\infty$，不能直接用定理2.5(3)商的运算法则，此式属于“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型不定式，但由于知道$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以分子、分母可同除以$x$的最高次幂$x^2$，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2-4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2+0-0}{3-0+0}=\frac{2}{3}.$$

例7 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{3x^2-4x+5}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{3x^2-4x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=\dfrac{0-0}{3-0+0}=0.$

例8 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{3x^2-4x+5}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{3x^2-4x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=\infty.$

归纳 对有理函数$f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\begin{cases}0, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

例9 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

解 当$n\to\infty$时，分子、分母都趋于∞，但分子是无限项之和，不能直接用定理2.5(1)，也不能同除以n^2，应先求和，再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

***例10** 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 本题虽也是无限项之和，但没有求和公式，考虑用性质2.4.

因为
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

令
$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},c_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},a_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}},$$

即
$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n.$$

又
$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$
根据性质 2.4
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

* 三、极限的复合运算

定理 2.6(复合函数的极限)　设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,且当 $x\neq x_0$ 时,$\varphi(x)\neq a$,对复合函数 $f[\varphi(x)]$,令 $u=\varphi(x)$,若$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

习题2–3

1. 判断题.

(1)在某过程中,若$f(x)$,$g(x)$均无极限,则$f(x)+g(x)$无极限.　(　　)

(2)在某过程中,若$f(x)$有极限,$g(x)$无极限,则$f(x)g(x)$无极限.　(　　)

(3)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$必不存在.　(　　)

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0.$　(　　)

(5)$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0.$　(　　)

(6)$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2-3\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty-\infty=0.$　(　　)

(7)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$都存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在.　(　　)

2. 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$;　(2)$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$;　(3)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-1}$;

(4)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;　(5)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;　(6)$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(7)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$;　(8)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-1}{x^2-3x+1}$;　(9)$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-1}{x^3-3x+5}$;

(10)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{2x^2+7}$;　(11)$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;　(12)$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$;

(13)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$.

3. 已知$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=1$,求常数 a 与 b 的值.

第四节　两个重要极限

一、第一个重要极限

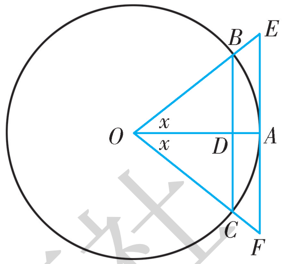


图 2－8

图 2－8 是中学常见的单位圆，易得

$$\overset{\frown}{BC}=2x,\overline{BC}=2\sin x,$$

则

$$\frac{\overline{BC}}{\overset{\frown}{BC}}=\frac{2\sin x}{2x}=\frac{\sin x}{x}.$$

表 2－1 给出了 $x\to0$ 时（$x>0$），$\sin x$ 取值的变化情况.

表 2－1　x 与 $\sin x$ 的变化情况

x	1	0. 5	0. 1	0. 05	0. 01	0. 005	…
$\sin x$	0. 841 5	0. 479 4	0. 099 8	0. 049 98	0. 009 999 8	0. 004 999 9	…

我们看到，当 $x\to0$ 时，$\sin x\to0$，并且当 $x\to0$ 时，$\sin x$ 与 x 的值越来越接近，可以证明

$$\frac{\overline{BC}}{\overset{\frown}{BC}}=\frac{\sin x}{x}\to1,$$

即

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{2.1}$$

这个极限通常称为第一个重要极限，或称为弦弧之比的极限.

证明　设 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$，先证 $x\to0^+$ 时的情况.

（1）从图 2－8 可以看到

$$S_{\triangle AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\triangle AOE},$$

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin x<\frac{1}{2}x\cdot1<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x,$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1$，而 $\lim\limits_{x\to0^+}1=1$，

根据性质 2. 4 得 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$.

（2）当 $x\to0^-$ 时，令 $x=-y$，$x\to0^-\Leftrightarrow y\to0^+$，

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin(-y)}{(-y)}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y}=1.$$

再根据定理 2. 4，得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

关于公式（2. 1）的几点说明：

①$x\to0$ 时，$\frac{f(x)}{g(x)}$ 为“$\frac{0}{0}$”型不定式；

②$\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}$中"Δ"位置的表达式相同；

③推广 $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$；

④凡是三角函数和反三角函数的不定式求极限时均可考虑用公式(2.1).

例 1　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$,

即
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.$$

例 2　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{3x}{\tan 3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\tan 3x}\\&=1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\\&=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

归纳　一般$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\tan nx}=\dfrac{m}{n}(m,n\in\mathbf{N}_+)$.

例 3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$,

即
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

例 4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解　令 $\arcsin x=y,x=\sin y$,则当 $x\to 0$ 时,$y\to 0$,故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1,$$

即
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.

解　令 $\pi-x=y$,则当 $x\to\pi$ 时,$y\to 0$,故
$$\sin x=\sin(\pi-y)=\sin y,$$
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

例 6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$.

解 法一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x\sin x}{x}$

$$=2\lim_{x\to 0}\cos 2x\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=2.$$

法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$$=3-1=2.$$

二、第二个重要极限

在第一节中，作为定理 2.2 的直接应用，曾得到$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$. 通过类比猜想，我们也可以得到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}. \tag{2.2}$$

这就是第二个重要极限.

* 证明 （1）首先证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

①利用二项式定理

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

类似地，

$$a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

比较 a_n 与 a_{n+1}，除了两首项是 1 外，a_n 的每一项都小于 a_{n+1} 的对应项，而且 a_{n+1} 还比 a_n 多了最后一项（为正），因此 $a_n<a_{n+1}$，a_n 是单增的.

②$a_n<1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}<1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=1+\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}$

$$=1+\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3.$$

因此，a_n 有上界. 根据定理 2.2，数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$有极限，记此极限值为 e，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

(2)再证明
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$
$$\forall x>1\ 总有\ n\leqslant x\leqslant n+1,$$
所以
$$\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n},$$
所以
$$1+\frac{1}{n+1}\leqslant 1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n},$$
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
而
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\mathrm{e},$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\mathrm{e},$$
当 $n\to\infty$ 时,有 $x\to+\infty$. 根据性质 2.4 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

(3)设 $x=-y, x\to-\infty\Leftrightarrow y\to+\infty$,则
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right]=\mathrm{e},$$
于是
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$
令 $x=\frac{1}{a}, x\to\infty\Leftrightarrow a\to0$,对公式(2.2)可以变形为
$$\lim_{a\to0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=\mathrm{e}. \tag{2.3}$$
关于公式(2.2)的几点说明:

①它是幂指函数的“1^{∞}”型不定式;

② $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}$ 中“□”位置的表达式相同;

③ $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathrm{e}$;

④幂指函数、对数函数、指数函数的不定式求极限时可以考虑使用第二个重要极限.

例 7　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}$.

解　令 $3x=y, x=\frac{y}{3}$,当 $x\to\infty$ 时,$y\to\infty$,
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{3}}=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}.$$
熟练后可以直接写成 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{3}(-3)-1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{3}}\right]^{-3}}{1-\dfrac{3}{x+1}}=e^{-3}.$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

解 令 $x-\dfrac{\pi}{2}=t$,则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}\\&=\lim_{t\to0}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right]^{\frac{3}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}}\\&=\lim_{t\to0}\left[(1-\sin t)^{-\frac{1}{\sin t}}\right]^{3}=e^{3}.\end{aligned}$$

例 10 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 令 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$,则当 $x\to0$ 时 $u\to e$,故

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to e}\ln u=1$,

即
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

例 11 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$.

解 令 $u=e^{x}-1$,则 $x=\ln(1+u)$,当 $x\to0$ 时 $u\to0$,有

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{u\to0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1.$$

即
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$$

习题2-4

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin5x}$;　(3) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$;　(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+3x}{\tan x+2x}$;　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^{3}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$;　(8) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$;　(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$;　(11) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{n}\sin\dfrac{x}{2^{n}}(x\neq0)$.

2. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-c}\right)^{x}=2$,求 c 的值.

第五节　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

1. 无穷小量的概念

定义 2.6　若 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为这一极限过程的无穷小量，简称无穷小.

注意：(1)极限过程包括 $\begin{cases} x\to x_0, \\ x\to x_0^+, \\ x\to x_0^-, \end{cases}$ $\begin{cases} x\to\infty, \\ x\to+\infty, \\ x\to-\infty, \end{cases}$ $n\to\infty$ 的情况，统一用记号 lim 表示.

①当 $x\to 0$ 时，$x,5x,x^2,x^3,\sin x,\tan x$ 都是无穷小；

②当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x},2^{-x},\frac{\pi}{2}-\arctan x$ 都是无穷小；

③当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n},\frac{1}{3^n}$ 都是无穷小.

(2)无穷小量的极限为 0，是表达变化状态的，不要与很小很小的数混为一谈. 0 是唯一可以作为无穷小量的常数.

又因为 $\lim f(x)=A\Leftrightarrow\lim f(x)-A=0\Leftrightarrow\lim f(x)-\lim A=0\Leftrightarrow\lim(f(x)-A)=0$，

所以，$f(x)-A$ 是这一过程的无穷小量，记为 $\alpha(x)=f(x)-A$.

定理 2.7　$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$.

2. 无穷小量的性质

根据极限定义和四则运算定理不难证明无穷小量有以下几个性质：

性质 2.5　有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

性质 2.6　有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量.

推论 1　任一常数与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

推论 2　有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

例 1　当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x$ 是无穷小量，而 $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ 是有界变量. 因为 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

3. 无穷小量阶的比较

从前面例子可以看到，当 $x\to 0$ 时，虽然 $x,5x,x^3$ 都是无穷小量，但实际上可以证明它们趋近于 0 的速度是不一样的. 因此为了比较两个无穷小量趋近于 0 的速度快慢，我们引入无穷小量阶的比较.

定义 2.7 设 α,β 是同一极限过程中的两个无穷小量，且 $\beta\neq0$，

(1)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记 $\alpha=o(\beta)$；

(2)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小；

(3)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=c$（$c$ 为不等于 0 的常数），则 α 是与 β 同阶的无穷小，特别地，当 $c=1$ 时，称 α 与 β 等价，记为 $\alpha\sim\beta$；

(4)若以 $x(x\to0)$ 为标准无穷小，且 $\lim\frac{\alpha}{x^k}=c$（$c\neq0,k>0$ 均为常数），则称 α 是关于 x 的 k 阶无穷小，记作 $o^*(x^k)$.

例 2 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{x}=0$，则 x^3 是 x 的高阶无穷小；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x^3}=\infty$，则 x 是 x^3 的低阶无穷小；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{x}=2$，则 $\tan2x$ 是 x 的同阶无穷小；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，则 $\sin x$ 与 x 等价，即 $\sin x\sim x$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，则 $1-\cos x$ 是 x^2 的同阶无穷小，而 $1-\cos x$ 是 x 的 2 阶无穷小.

定理 2.8 若在同一极限的过程中，$\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

例 3 求：(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin3x}$；(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}$.

解 (1)因为 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x,\sin3x\sim3x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

(2)因为 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\sin^2x\sim x^2$ 故

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2x}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

注意：在此例中，对分子、分母要采用整体或乘积因子作等价无穷小替换，否则若一开始就令 $\tan x\sim x,\sin x\sim x$，则会导致 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$ 的错误结果.

二、无穷大量

定义 2.8　极限为无穷大的变量称为无穷大量，若 $\lim f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 为这一极限过程的无穷大量，简称无穷大.

注意：极限为无穷大的函数 $f(x)$，按函数极限的定义来说，极限是不存在的，为了方便描述函数的这一性质，我们也说“函数的极限为无穷大”.

例如，当 $x\to\infty$ 时，x,x^2,x^3 是无穷大量；当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x^2},\frac{1}{\sin x}$ 也是无穷大量.

同无穷小量的理解一样，无穷大量不能与很大很大的数混为一谈，而“∞”是一记号，也不是无穷大量.

三、无穷大量与无穷小量之间的关系

定理 2.9　(1)若 $\lim f(x)=\infty$，则 $\lim\frac{1}{f(x)}=0$；

(2)若 $\lim f(x)=0(f(x)\neq0)$，则 $\lim\frac{1}{f(x)}=\infty$（证明从略）.

无穷大量与无穷小量指的都是因变量 $f(x)$，但判断一个变量 $f(x)$ 是否为无穷大(小)量，不仅与 $f(x)$ 本身有关，还与自变量 x 的趋近过程有关.

例 4　当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 为无穷小量；

当 $x\to0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 为无穷大量；

当 $x\to2$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 既不是无穷大量，也不是无穷小量.

习题2-5

1. 判断题.

(1)非常小的数是无穷小.　　(　　)

(2)零是无穷小.　　(　　)

(3)无限变小的变量称为无穷小.　　(　　)

(4)无限个无穷小的和还是无穷小.　　(　　)

2. 指出下列各式中，哪些是无穷小？哪些是无穷大？并说明理由.

(1)$\frac{1+x}{x^2}(x\to\infty)$；　(2)$\frac{3x-1}{x}(x\to0)$；　(3)$\ln|x|(x\to0)$；　(4)$e^{\frac{1}{x}}(x\to0)$.

3. 当 $x\to+\infty$ 时，下列哪个无穷小与无穷小 $\frac{1}{x}$ 是同阶无穷小？哪个无穷小与无穷小 $\frac{1}{x}$ 是等价无穷小？哪个无穷小是比无穷小 $\frac{1}{x}$ 高阶的无穷小？

(1)$\frac{1}{2x}$；　(2)$\frac{1}{x^2}$；　(3)$\frac{1}{|x|}$.

4. 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan5x}{3x}$；　(2)$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x^2}$；　(3)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3x}{\tan x^2}$；　(4)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{e^x-1}$.

第六节　函数的连续性

一、连续函数的概念

第二节研究函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的极限与函数值问题时，曾有四种情况出现，其中之一就是函数在 x_0 处函数值存在，极限值也存在，并且相等. 此时，我们就称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，这就是本节所要讨论的问题——连续函数. 连续函数是高等数学中的主要研究对象，也是许多自然过程中数量变化的抽象，如：自然界中气温的变化、河水的流动、植物的生长等，都是连续变化着的. 这种现象在函数关系上的反映，就是函数的连续性，连续函数的图像直观表现为一条不间断的曲线. 本节根据极限概念给出连续函数的几种定义方式，并讨论连续函数的性质和初等函数的连续性.

1. 函数在一点连续的概念

定义 2.9　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，x_0 是 $f(x)$ 的连续点.

从定义 2.9 可以看到，$f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足三个条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义 ；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) 极限值等于函数值 $f(x_0)$.

将式 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 改写为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0,$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0,$$

令 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

定义 2.10　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注意：设变量 u 从初值 u_1 变到终值 u_2，终值与初值之差 u_2-u_1 就叫作变量 u 的增量（或改变量），记为 Δu. 增量 Δu 可正可负，在 Δu 为正时，u 从 u_1 变到 u_2 是增大的，在 Δu 为负时，u 是减小的. 对于函数 $y=f(x)$，如图 2－9 所示，当自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 $f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，即当自变量 x 有一改变量 Δx 时，函数 $f(x)$ 相应地也有一改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

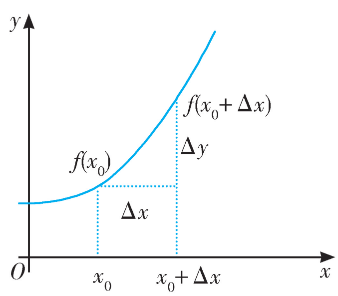


图 2－9

把式 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 用“$\varepsilon-\delta$”语言叙述如下.

定义 2.11　设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，对 $\forall x$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

2. 单侧连续

定义 2.12　设函数 $f(x)$ 在 x_0 处左（右）邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$），则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续（或右连续），统称为单侧连续.

读者可自行写出其定量定义.

显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是：$f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

3. 函数在区间上连续

定义 2.13　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在该区间 I 上连续.

区间 I 可以是开区间，也可以是闭区间；可以是有限区间，也可以是无限区间.

若 $I=[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续包含的意义有两方面：

(1) $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续；

(2) $f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续.

例 1　讨论函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

$$f(0)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，如图 2－10 所示.

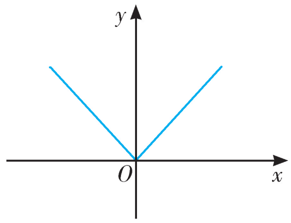


图 2－10

例 2　讨论 $\mathrm{sgn}x$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解

$$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

$$f(0)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{sgn}x=\lim_{x\to 0^+}1=1\neq f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-}\mathrm{sgn}x=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1\neq f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，如图 2－11 所示.

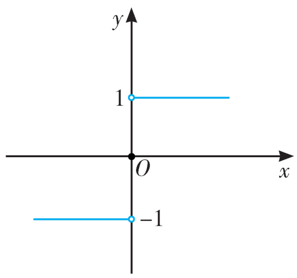


图 2－11

例 3　讨论函数 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的连续性.

解　$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x\\&=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2},\end{aligned}$$

故
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\right).$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{\Delta x}{2}=0$，而 $\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}$ 是有界变量，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，即 $y=\sin x$ 在点 x 处是连续的，由 x 的任意性可知，$y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

同理 $f(x)=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上也连续.

例 4 讨论 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq f(0)$，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

二、函数的间断点及分类

定义 2.14 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，且函数 $f(x)$ 有下列三种情况之一：

(1) 在 $x=x_0$ 处无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点.

间断点可按下述情况分类.

1. 第 Ⅰ 类间断点

定义 2.15 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，且在 x_0 处 $f(x)$ 的左、右极限都存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的第 Ⅰ 类间断点.

特别地，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq f(x_0)$，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的可去间断点. 对于可去间断点，我们可以补充在点 x_0 处的函数值，或改变在 x_0 处的定义（一般补充或修改在 x_0 处的函数值等于极限值），使 $f(x)$ 在点 x_0 连续，这正是“可去”的本义.

例如，本节例 2 是第 Ⅰ 类间断点，例 4 是可去间断点，可修改为
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0,\\ 1, x=0,\end{cases}$$
则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 第 Ⅱ 类间断点

定义 2.16 若函数 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第 Ⅱ 类间断点.

例 5　函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x>0,\\ 0, x\leqslant 0,\end{cases}$ 由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}0=0,$$

所以，$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第Ⅱ类间断点.

例 6　$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 都不存在，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第Ⅱ类间断点.

三、初等函数的连续性

1. 连续函数的运算

定理 2.10　若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$ 也在 x_0 处连续.

例如，例 3 中，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 **R** 上连续. 由定理 2.10 可知，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 也在其定义域内连续.

定理 2.11　若函数 $y=f(x)$ 在某区间上严格单调且连续，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在相应区间上也严格单调且连续.

例如，$y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格单增且连续，由定理 2.11 知，$y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也严格单增且连续. 同理 $y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 在其定义域内连续. 用定义可以证明 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 在 **R** 上连续，则由定理 2.11 知，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

定理 2.12　若函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，而 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

例如，$u=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $y=\sin\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty]$ 上连续；$y=x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$，可以看成 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\alpha\ln x$ 的复合，所以 $y=x^\alpha(\alpha\neq 0)$ 在其定义域内连续.

2. 初等函数的连续性

从上面讨论可知，基本初等函数在其定义域内连续，反复运用定理 2.10 与定理 2.12 可以得到一切初等函数在其定义域内都是连续的. 这个结论又为我们提供了一个求极限的方法. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$，这说明对连续函数 $f(x)$ 而言，f 与 lim 可以交换.

例 7　求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\arctan\sqrt{\log_a x}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{x}{a}\right)}$（$a$ 为定义域内一点）.

解 因为 $f(x)$ 是初等函数，a 又是定义域内一点，所以

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=\frac{\arctan\sqrt{\log_a a}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{a}\right)}=\frac{\pi}{4}.$$

四、闭区间上连续函数的性质

定理 2.13（最值性） 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必定在该区间上达到最大值 M 和最小值 m.

如图 2－12 所示，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(\xi_1)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，$f(\xi_2)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值.

本定理两个条件缺一不可.

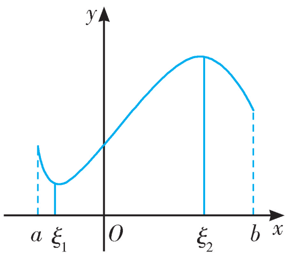


图 2－12

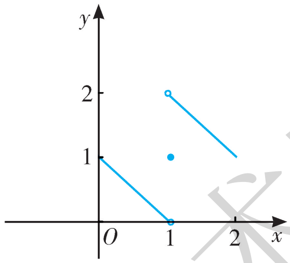


图 2－13

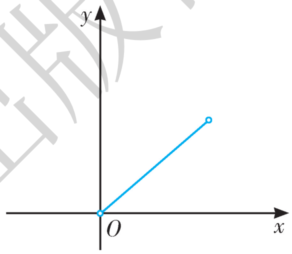


图 2－14

例如，如图 2－13 所示的函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, x\in[0,1),\\ 1, x=1,\\ -x+3, x\in(1,2],\end{cases}$$

在 $[0,2]$ 上有间断点 $x=1$，易看出 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 既不能达到最大值，也不能达到最小值. 再如，$y=x$ 在开区间 $(0,1)$ 内连续，但它既达不到最大值也达不到最小值，如图 2－14 所示.

定理 2.14（有界性） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上有界.

一般来说，开区间（或半开区间）的连续函数不一定有界. 如 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界.

定理 2.15（介值性） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，ξ 是介于 m 与 M 之间的数（即 $m\leqslant\xi\leqslant M$），则在 $[a,b]$ 内至少存在一点 c，使得 $f(c)=\xi$.

如图 2－15 所示.

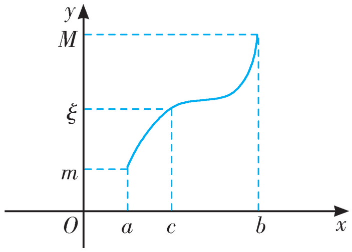


图 2－15

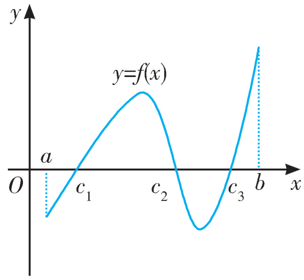


图 2－16

定理 2.16（零点定理）　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $c\in(a,b)$，使 $f(c)=0$.

如图 2－16 所示.

例 8　研究方程 $x^5+x^3+x^2-1=0$ 在区间 $[0,1]$ 内根的位置.

解　设 $f(x)=x^5+x^3+x^2-1$，$f(0)=-1<0$，$f(1)=2>0$，由定理 2.16 知方程 $x^5+x^3+x^2-1=0$ 在 $(0,1)$ 内有根 ξ，为进一步研究 ξ 的位置，做如下计算和推断：

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{19}{32}<0,\text{故 }\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right);$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{227}{1\ 024}>0,\text{故 }\xi\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right);$$

$$f\left(\frac{5}{8}\right)=-\frac{8\ 843}{32\ 768}<0,\text{故 }\xi\in\left(\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right),\xi\approx\frac{11}{16}.$$

$\xi=\frac{11}{16}$ 是区间 $\left(\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right)$ 的中点，其误差不超过 $\frac{1}{16}$，这种方法称为二分法，常用来求根的近似值，缺点是计算量较大.

习题2–6

1. 判断题.

(1) $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不连续.　(　　)

(2) 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且无零点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为正或恒为负.　(　　)

2. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图像.

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

3. 指出下列函数的间断点，并指明是哪一类型间断点.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$；　　(2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$；

(3) $f(x)=\begin{cases} x, x\neq 1, \\ \dfrac{1}{2}, x=1; \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, x<-1, \\ x, -1\leqslant x\leqslant 1, \\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, x>1. \end{cases}$

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$;　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(2\alpha\sin\alpha)^3$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{\sin x}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$.

5. 证明下列方程在(0,1)之间至少有一实根.

(1) $x^5+x^3=1$;　　(2) $e^{-x}=x$;　　(3) $\arctan x=1-x$.

综合测试题二

一、填空题

1. 已知 $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{a^2+bn-5}{3n-2}=2$，则 $a=$________，$b=$________.

2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=$________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\tan\beta x=$________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}=$________.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{\frac{1}{x}}=$________.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}2^{x^2}=$________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}2^{-\frac{1}{x^2}}=$________.

8. 当 $x\to 0^+$ 时，x 是 $e^{\sqrt{x}}-1$ 的________阶无穷小.

9. 当 $x\to 0$ 时，$e^{2x}-1$ 是 $\sin x$ 的________阶无穷小.

10. 设 $x\to 0$ 时，$1-\cos^2 x$ 与 $a\sin^2\dfrac{x}{2}$ 为等价无穷小，则 $a=$________.

11. 设 $\varphi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$\psi(x)=1-\sqrt[3]{x}$，则当 $x\to 1$ 时，$\varphi(x)$ 是 $\psi(x)$ 的________阶无穷小.

12. 设 $x\to 0$ 时，ax^b 与 $(\tan x-\sin x)$ 为等价无穷小，则 $a=$________，$b=$________.

二、判断题

1. 有界数列一定收敛.　　(　　)
2. 发散数列一定是无界数列.　　(　　)
3. 单调数列一定是收敛数列.　　(　　)
4. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续.　　(　　)

5. 若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,则它在闭区间$[a,b]$上连续.　(　　)

6. 分段函数必定存在间断点.　(　　)

三、选择题

1. $f(x)$在x_0处左、右极限存在并且相等是$f(x)$在x_0处有极限的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件

2. 单调并且有界是数列收敛的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件

3. 两个非无穷小量之和为(　　).

A. 非无穷小量　　B. 无穷小量　　C. 可能是无穷小量

4. 两个非无穷小量之积(　　).

A. 必定不是无穷小量　　B. 可能是无穷小量　　C. 必定是无穷小量

5. 设$x\to x_0$时,$f(x)$为无穷小量,$g(x)$为无穷大量,则(　　)必为无穷大量.

A. $f(x)+g(x)$　　B. $\dfrac{1}{f(x)}+g(x)$　　C. $f(x)g(x)$　　D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

6. 当$x\to\infty$时,函数$f(x)=x+\sin x$是(　　).

A. 无穷大量　　B. 无穷小量

C. 有极限且极限不为0　　D. 有界函数

7. $f(x)$在x_0处左、右极限存在是$f(x)$在x_0处连续的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D 前三者均不是

8. $x=0$是函数$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$的(　　).

A. 第Ⅰ类间断点

B. 第Ⅱ类间断点

C. 既不是第Ⅰ类间断点,也不是第Ⅱ类间断点

D. 以上都不对

9. $x=2$是函数$f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$的(　　).

A. 第Ⅰ类间断点

B. 第Ⅱ类间断点

C. 既不是第Ⅰ类间断点,也不是第Ⅱ类间断点

D. 以上都不对

10. 设函数$f(x)=\begin{cases}ax+b, x\geqslant 0,\\(a+b)x^2+x, x<0,\end{cases}$其中$a+b\neq 0$,则$f(x)$处处连续的充要条件是$b=$(　　).

A. a　　B. 0　　C. 1　　D. -1

11. 已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=2$,则$a$的值是(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

四、计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$；

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$；

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$；

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^3}$；

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$；

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x^2-x}(\sin x+2)$；

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$；

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\tan 5x}$；

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{4(x-1)}$.

五、讨论 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续性.

六、已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，求 a.

七、设 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+ax^2-x+4}{x+1}=b$（常数），求 a,b.

八、$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型.

九、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<f(x)<b$，证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

阅读材料

数学实验

一、内部函数求极限

在 Mathematica 中，可由 limit 函数求解极限，其格式为：

Limit[f,x→x0]　表示求函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限；

Limit[f,x→x0,Direction→1]　表示求函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时的极限，即左极限；

Limit[f,x→x0,Direction→-1]　表示求函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 时的极限，即右极限.

例 1　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\ln(x-1)}$.

解　In[1]: = Limit[Sin[2x]/x,x→0]

Out[1]: =2

In[2]: = Limit[Cos[x]/x,x→∞]

Out[2]: =0

In[3]: = Limit[(x-1)/(ln(x-1)),x→0,Direction→-1]

Out[3]: =0

注意：Mathematica 中没有区分∞和 -∞，求 $x\to\infty$ 时的极限要小心.

二、调用外部函数求极限

Mathematica 自带的外部程序中还有求极限的同名函数，增强了解题能力，文件位于 Mathematica 的标准扩展程序包集中，查看 Help 可以找到相应文件.

例 2　求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$.

解　In[1]：= Limit[(1 + 1/x)^(x^2)/Exp[x], x→∞]

Out[1]：= $\text{Limit}\left[e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}, x\to\infty\right]$

In[2]：= << Calculus\`Limit\`

In[3]：= Limit[(1 + 1/x)^(x^2)/Exp[x], x→∞]

Out[3]：= $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

注意：第一次求解中首先使用内部函数求极限，结果输出的仍是原函数的输入式，这就表明求值失败. 第二次求解时调入了含有同名函数的外部程序文件“Limit. m”，求解成功.

尽管使用 Limit 语句求解极限简单方便，但在有些情况下求不出极限，这时我们不妨画出函数图像，观察函数的变化趋势，从而判断出函数的极限.

数学史话　刘徽，魏晋时期杰出的数学家，中国传统数学理论的奠基者. 幼年曾学习过《九章算术》，成年后又继续深入研究，在魏景元四年（公元 263 年）注《九章算术》，并撰《重差》作为《九章算术注》第十卷. 唐初以后，《重差》以《海岛算经》为名单行. 刘徽全面论述了《九章算术》所载的方法和公式，指出并且纠正了其中的错误，在数学方法和数学理论上做出了杰出的贡献.