

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn



策划编辑 王晓军
责任编辑 胡思佳
封面设计 黄燕美

职教高考 数学

真题分类集训



扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信



ISBN 978-7-313-31309-6

定价: 45.00元

职教高考 数学 真题分类集训

主编 胡杰 王灿



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

华腾新思

适用于中职对口升学考试、春季高考、“三校生”考试、高职单招考试

职教高考 数学

真题分类集训



主编 胡杰 王灿
副主编 韦春雷 罗岚方 梁群

精选经典好题，开阔眼界

点拨解题技巧，触类旁通

增强同类练习，挑战高分



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

适用于中职对口升学考试、春季高考、“三校生”考试、高职单招考试

职教高考 **数 学**

真题 **分类 集训**

主 编 胡 杰 王 灿
副主编 韦春雷 罗岚方 梁 群



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书分为“集合”“不等式”“函数”“指数函数与对数函数”“三角函数”“数列”“平面向量”“解析几何”“立体几何”“概率与统计”十个专项内容. 每个专项又设置“命题趋势”“真题集训”“专项知识精粹”“巩固练习”“专项复盘”五个板块. “命题趋势”板块回顾本专项知识在近年来职教高考中的命题特点及变化情况, 让考生对命题趋势有整体认知, 为接下来的复习指引方向. “真题集训”板块汇总大量真题, 让考生分考点进行集中训练, 熟悉命题方向、常见的答题误区, 训练解题思路. “专项知识精粹”板块集中梳理本专项的知识, 防止遗漏. “巩固练习”板块提供一定数量的模拟题, 供考生进行巩固练习, 以达到举一反三、学以致用目的. “专项复盘”板块中, 考生可以在此记录本专项学习中的典型错题, 并在独立思考的基础上进行自我小结, 形成个性化的学习成果. 通过以上逻辑清晰、密不可分的几个板块, 考生可实现学习的完美闭环, 达到最佳的学习效果.

本书既可作为参加中职对口升学考试、春季高考、“三校生”考试、高职单招考试的复习资料, 也可作为广大专科学校学生的学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

职教高考数学真题分类集训 / 胡杰, 王灿主编.

上海: 上海交通大学出版社, 2024. 8. -- ISBN 978-7-313-31309-6

I. G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024KM0762 号

职教高考数学真题分类集训

ZHIJIAO GAOKAO SHUXUE ZHENTI FENLEI JIXUN

主 编: 胡 杰 王 灿

出版发行: 上海交通大学出版社

地 址: 上海市番禺路 951 号

邮政编码: 200030

电 话: 021-64071208

印 制: 大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 880 mm×1 230 mm 1/16

印 张: 16

字 数: 277 千字

版 次: 2024 年 8 月第 1 版

印 次: 2024 年 8 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-313-31309-6

定 价: 45.00 元

版权所有 侵权必究

告读者: 如您发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 0316-8836866

前言

PREFACE

职教高考也叫职业教育高考,主要面向中等职业学校毕业生或具备相应职业技能的人群,是他们提升学历、继续深造的重要通道。

近年来,作为我国职业教育改革的重要组成部分,职教高考越来越受到中职师生、学生家长的重视。随着职教高考改革越来越深入,其制度越来越完善,难度也越来越大。

为了帮助广大考生在较短的时间内高效、便捷、准确地把握考试重点,我们精心编写了这套“职教高考真题分类集训”丛书,供广大考生在复习时使用。

本书是该套丛书之《职教高考数学真题分类集训》,具有以下两大鲜明特色。

立足真题,快速提升学习能力

各地职教高考的真题代表性强、命制水平高,凝聚了命题专家的智慧。再加上当前各地职教高考互相借鉴的趋势明显,因此,考生深入了解包括本地真题在内的全国各地的真题很有必要。

本书以此为出发点,在广泛收集全国各地职教高考数学真题的基础上,按照“多中选优,优中选精”的原则,将各地有代表性的真题汇总成册,力图帮助考生通过在短时间内进行大量练习,实现学习能力的快速提升。

范例科学,为职教高考考生量身定制

本书按照专项组织内容,将职教高考数学科目的考点进行科学分类,并设置如下板块:

“命题趋势”板块:回顾本专项知识在近年来职教高考中的命题特点及变化情况,让考生对命题趋势有整体认知,为接下来的复习指引方向。

“真题集训”板块:汇总大量真题,让考生分考点进行集中训练,熟悉命题方向、常见的答题误区,训练解题思路。

“专项知识精粹”板块:集中梳理本专项的知识,防止遗漏。

“巩固练习”板块:提供一定数量的模拟题,供考生进行巩固练习,以达到举一反三、学以致用目的。

“专项复盘”板块:考生可以在此记录本专项学习中的典型错题,并在独立思考的基础上进行自我小结,形成个性化的学习成果。

通过以上逻辑清晰、密不可分的几个板块,考生可实现学习的完美闭环,达到最佳的学习效果。

另外,本书随书赠送“参考答案及解析”电子文件,可联系销售方索取。

最后,预祝广大考生取得好成绩!

编者

目录

CONTENTS

专项一	集合	1
	命题趋势	1
	真题集训	1
	一、集合的概念与集合之间的关系	1
	二、集合的运算	2
	三、充要条件	6
	专项知识精粹	8
	巩固练习	8
	专项复盘	12
专项二	不等式	13
	命题趋势	13
	真题集训	13
	一、不等式的基本性质与区间	13
	二、一元二次不等式及其应用	15
	三、含绝对值的不等式	17
	专项知识精粹	19
	巩固练习	20
	专项复盘	24
专项三	函数	25
	命题趋势	25
	真题集训	25
	一、函数的概念及其表示	25
	二、函数的单调性	33

三、函数的奇偶性	37
四、函数的实际应用	43
专项知识精粹	49
巩固练习	50
专项复盘	54

专项四 指数函数与对数函数 55

命题趋势	55
真题集训	55
一、实数指数幂和幂函数	55
二、指数函数	57
三、对数及其运算	58
四、对数函数	60
专项知识精粹	64
巩固练习	64
专项复盘	69

专项五 三角函数 70

命题趋势	70
真题集训	70
一、角的概念推广与弧度制	70
二、任意角的三角函数	72
三、同角三角函数的基本关系式	73
四、诱导公式	74
五、三角函数的图像与性质	78
六、和角公式与倍角公式	83
七、正弦型函数的图像与性质	87
八、正弦定理和余弦定理	90
专项知识精粹	101
巩固练习	103
专项复盘	108

专项六	数列	109
	命题趋势	109
	真题集训	109
	一、数列的概念	109
	二、等差数列	110
	三、等比数列	115
	四、等差数列与等比数列的应用	124
	专项知识精粹	125
	巩固练习	126
	专项复盘	129
专项七	平面向量	130
	命题趋势	130
	真题集训	130
	一、平面向量的概念及线性运算	130
	二、平面向量的坐标表示	131
	三、平面向量的内积	133
	专项知识精粹	136
	巩固练习	137
	专项复盘	141
专项八	解析几何	142
	命题趋势	142
	真题集训	142
	一、两点间的距离公式与线段中点的坐标	142
	二、直线的方程	143
	三、两条直线的位置关系	144
	四、圆的方程	147
	五、椭圆	154
	六、双曲线	162
	七、抛物线	166
	专项知识精粹	171

巩固练习	172
专项复盘	176
专项九 立体几何	177
命题趋势	177
真题集训	177
一、平面的基本性质	177
二、空间的平行关系	178
三、空间的垂直关系	181
四、柱、锥、球及其组合体	190
专项知识精粹	194
巩固练习	195
专项复盘	200
专项十 概率与统计	201
命题趋势	201
真题集训	201
一、计数原理	201
二、排列与组合	202
三、二项式定理	203
四、概率	204
五、统计	209
六、离散型随机变量及其分布	214
专项知识精粹	217
巩固练习	218
专项复盘	224
学习效果检测卷(一)	225
学习效果检测卷(二)	233
学习效果检测卷(三)	241



专项一

集合



命题趋势

本专项内容在历年高考题中多以选择题形式出现,难度不大,要求不高,主要从两个方面考查:一是考查集合的基本运算,命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主,多与不等式、绝对值等相结合;二是考查充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件的判定,多与函数等相结合.



真题集训



一、集合的概念与集合之间的关系

一、单项选择题

- (2021·河南) 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{0\}$, 则().
A. N 为空集
B. $N \in M$
C. $N \subseteq M$
D. $M \subseteq N$
- (2020·河北) 下列集合中不是空集的是().
A. $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 0\}$
B. $\{x \mid x^2 + 4x + 5 = 0\}$
C. $\{x \mid e^x < 0\}$
D. \emptyset
- (2023·江苏) 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid x = a^2, a \in A\}$, 则集合 B 中的元素个数为().
A. 2 个
B. 3 个
C. 4 个
D. 5 个

- C. $\{1,2,3\}$ D. $\{3,4,5\}$
9. (2021·河北) 设集合 $P=\{x|-2<x<4\}$, $M=\{2,3,5\}$, 则 $P\cap M=(\quad)$.
- A. $[2,3]$ B. $\{2,3\}$
C. $(2,3)$ D. $\{3,5\}$
10. (2022·安徽) 设集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{0,2,3\}$, 则 $A\cup B=(\quad)$.
- A. $\{3\}$ B. $\{0,2\}$
C. $\{-1,0,1,2,3\}$ D. $\{-1,1\}$
11. (2021·安徽) 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{0,1\}$, 则 $A\cup B=(\quad)$.
- A. $\{0,1\}$ B. $\{-1,0\}$
C. $\{-1,0,1\}$ D. $\{-1,1\}$
12. (2020·安徽) 设全集 $U=\{1,2,3,4\}$, $A=\{3,4\}$, 则 $\complement_U A=(\quad)$.
- A. $\{1,2,3,4\}$ B. $\{3,4\}$
C. $\{1,2\}$ D. \emptyset
13. (2022·云南) 设 $I=\mathbf{R}$, $A=\{x|2<x\leq 3\}$, $B=\{x|-3\leq x\leq 4\}$, 则 $\complement_I(A\cup B)=(\quad)$.
- A. $\{x|x<3 \text{ 或 } x>4\}$ B. $\{x|x<-6 \text{ 或 } x>-4\}$
C. $\{x|x<-3 \text{ 或 } x>4\}$ D. $\{x|-3<x<4\}$
14. (2021·云南) 设全集 $I=\mathbf{R}$, $A=\{x|x\leq -3\}$, $B=\{x|x\geq 3\}$, 则 $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=(\quad)$.
- A. $\{x|x<-3 \text{ 或 } x>3\}$ B. $\{x|x>-3\}$
C. $\{x|-3<x<3\}$ D. $\{x|x<3\}$
15. (2020·云南) 设集合 $M=\{x|0<x<1, x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{x||x|<2, x\in\mathbf{R}\}$, 则下面选项中正确的是 (\quad) .
- A. $M\cap N=M$ B. $M\cap N=N$
C. $M\cup N=M$ D. $M\cup N=\mathbf{R}$
16. (2022·四川) 已知集合 $M=\{1,2,3\}$, $N=\{1,3,5\}$, 则 $M\cup N=(\quad)$.
- A. \emptyset B. $\{1,3\}$
C. $\{2,5\}$ D. $\{1,2,3,5\}$
17. (2021·四川) 设集合 $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{x|x^2-1=0\}$, 则 $A\cap B=(\quad)$.
- A. $\{-1\}$ B. $\{1\}$
C. $\{-1,1\}$ D. $\{-1,0,1\}$
18. (2020·四川) 已知集合 $A=\{1,0\}$, $B=\{-1,a\}$, 且 $A\cap B=\{1\}$, 则 $a=(\quad)$.
- A. -2 B. 0

C. 1

D. 2

 19. (2023 · 广东) 已知集合 $A = \{1, 2\}$, 集合 $B = \{1, 3, 4\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

 A. $\{1, 2, 3, 4\}$

 B. $\{1, 2, 4\}$

 C. $\{2, 3, 4\}$

 D. $\{3, 4\}$

 20. (2022 · 广东) 已知集合 $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

 A. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

 B. $\{1, 2, 3\}$

 C. $\{0, 1\}$

 D. $\{1\}$

 21. (2021 · 广东) 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

 A. $\{-1, 1\}$

 B. $\{-1, 0, 1, 2, 4\}$

 C. $\{0\}$

 D. $\{-1, 1, 2, 4\}$

 22. (2022 · 陕西) 已知集合 $A = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | -5 \leq x < 2\}$, 则集合 $A \cap B = (\quad)$.

 A. $\{x | -5 \leq x < 1\}$

 B. $\{x | -5 \leq x \leq 1\}$

 C. $\{x | 1 < x < 2\}$

 D. $\{x | 1 \leq x < 2\}$

 23. (2021 · 陕西) 已知集合 $A = \{x | -4 < x \leq 1\}$, $B = \{x | -3 \leq x < 3\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

 A. $\{x | -4 < x < 3\}$

 B. $\{x | -4 < x \leq -3\}$

 C. $\{x | -3 \leq x \leq 1\}$

 D. $\{x | 1 \leq x < 3\}$

 24. (2022 · 江苏) 已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $N = \{2, 3, 5\}$, 则 $M \cap N$ 等于 (\quad) .

 A. $\{1, 3\}$

 B. $\{2, 3\}$

 C. $\{1, 2, 3, 4\}$

 D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

 25. (2021 · 江苏) 已知集合 $M = \{1, 3\}$, $N = \{1 - a, 3\}$, 若 $M \cup N = \{1, 2, 3\}$, 则 a 的值是 (\quad) .

 A. -2

 B. -1

C. 0

D. 1

 26. (2022 · 湖北) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

 A. $\{1, 2, 3, 4\}$

 B. $\{1, 2, 3\}$

 C. $\{2, 3, 4\}$

 D. $\{1, 3, 4\}$

 27. (2021 · 湖北) 若集合 $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

 A. $\{0, 2, 3, 4, 6, 9\}$

 B. $\{2, 3, 4, 9\}$

 C. $\{0, 6\}$

 D. $\{0\}$

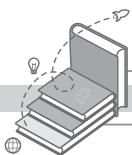
 28. (2020 · 湖北) 若集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

 A. $\{2, 3\}$

 B. $\{1, 2, 3\}$

 C. $\{0, 2, 3, 4\}$

 D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$



三、充要条件

单项选择题

- (2022·湖南)“ $(x+1)(x-3)=0$ ”是“ $x=3$ ”的().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充分且必要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2021·湖南)“ $x=1$ ”是“ $x^2-3x+2=0$ ”的().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2022·河南)“ $a>5$ ”是“ $a\geq 3$ ”的().
 A. 充分条件
 B. 必要条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2022·河北)“四边形是平行四边形”是“四边形是菱形”的().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2021·河北)“ $a=b$ ”是“ $|a|=|b|$ ”的().
 A. 必要不充分条件
 B. 充分不必要条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2020·河北)设 A, B 为两个集合, 则“ $A\subseteq B$ ”是“ $A\cap B=A$ ”的().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2022·安徽)“ $x=2$ ”是“ $-1<x\leq 3$ ”的().
 A. 充分条件
 B. 必要条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2021·安徽)“ $a>1$ ”是“ $a^2>1$ ”的().
 A. 充分条件
 B. 必要条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2020·安徽)“ $x=1$ ”是“ $x>0$ ”的().
 A. 充分条件
 B. 必要条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

10. (2022 · 云南) “ $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ”是“ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ”的().
- A. 必要不充分条件
B. 充要条件
C. 充分不必要条件
D. 既不充分也不必要条件
11. (2020 · 云南) 已知命题甲: “ $|x| > 3$ ”, 命题乙: “ $x > 3$ ”, 那么命题甲是命题乙的().
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件
12. (2023 · 广东) “ $x = 2$ ”是“ $x(x - 2) = 0$ ”的().
- A. 充分必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分不必要条件
D. 既不充分也不必要条件
13. (2022 · 广东) “ $x > 1$ ”是“ $|x| > 1$ ”的().
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
14. (2021 · 广东) “ $x < -1$ ”是“ $|x| > 1$ ”的().
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件
15. (2022 · 陕西) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x < 1$ ”是“ $|x| < 1$ ”的().
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件
16. (2021 · 陕西) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > \sqrt{3}$ ”是“ $x > \sqrt{5}$ ”的().
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件
17. (2022 · 江苏) 已知 x 是实数, 则“ $|x + 1| > 3$ ”是“ $x > 2$ ”的().
- A. 充要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件
18. (2023 · 浙江) “ $e^x = 1$ ”是“ $x = 0$ ”的().
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
19. (2022 · 浙江) “ $x^2 > 1$ ”是“ $x > 0$ ”的().
- A. 充分必要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

20. (2021·浙江) 已知 a, b 为实数, 则“ $a^3 - b^3 = 0$ ”是“ $a = b$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件



专项知识精粹

1. 集合子集的数量

集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 的子集有 2^n 个, 真子集有 $(2^n - 1)$ 个, 非空子集有 $(2^n - 1)$ 个, 非空真子集有 $(2^n - 2)$ 个.

2. 交集的性质

(1) $A \cap B = B \cap A$; (2) $A \cap A = A$; (3) $A \cap \emptyset = \emptyset$; (4) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$; (5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$.

3. 并集的性质

(1) $A \cup B = B \cup A$; (2) $A \cup A = A$; (3) $A \cup \emptyset = A$; (4) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$; (5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$.

4. 补集的性质

(1) $\complement_U(\complement_U A) = A$; (2) $\complement_U \emptyset = U, \complement_U U = \emptyset$; (3) $A \cup (\complement_U A) = U$; (4) $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$; (5) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

5. 充要条件的判断方法

- (1) 若 $p \Rightarrow q$, 但 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件;
 (2) 若 $p \not\Rightarrow q$, 但 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要不充分条件;
 (3) 若 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件;
 (4) 若 $p \not\Rightarrow q$, 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.



巩固练习

一、单项选择题

1. 已知集合 $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $N = \{x | x < 2\}$, 则 $M \cap (\complement_{\mathbb{R}} N) = ()$

- A. $(-\infty, 2)$
B. $(2, 3)$
C. $\{2, 3\}$
D. $\{1, 2, 3\}$

2. 若集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. $\{x | 0 \leq x < 3\}$
B. $\{x | 0 \leq x < 1\}$
C. $\{x | 3 < x \leq 4\}$
D. $\{x | 1 < x \leq 4\}$

3. 下列各式中:① $0 \notin \mathbf{N}$;② $0 \in \emptyset$;③ $\emptyset \in \{0\}$;④ $\emptyset \subseteq \{0\}$;⑤ $\{0,1\} = \{(0,1)\}$;
⑥ $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$,正确的个数是()

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

4. 已知集合 $M = \{1,2,3,4\}$, $N = \{x \mid x^2 = 1\}$,则 $M \cup N =$ ()

A. $\{2,3,4\}$ B. $\{1\}$

C. $\{-1,2,4\}$ D. $\{-1,1,2,3,4\}$

5. 已知集合 $M = \{x \mid x < 1\}$, $N = \{x \mid x^2 < 1\}$,则()

A. $M = N$ B. $M \subseteq N$

C. $N \subseteq M$ D. $M \cap N = \emptyset$

6. 已知集合 $A = \{-1, a^2 - 2a + 1, a - 4\}$,若 $4 \in A$,则 a 的值可能为()

A. $-1, 3$ B. -1

C. $-1, 3, 8$ D. $-1, 8$

7. 集合 $A = \{x \mid -4 < x < 2\}$ 的一个真子集可以为()

A. $\{3\}$ B. $\{x \mid -1 < x < 3\}$

C. $\{0\}$ D. $\{x \mid -4 < x < 2\}$

8. “ $a + 1 > b$ ”是“ $a^3 > b^3$ ”的()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. “ $1 < x < 3$ ”是“ $\frac{1}{x-2} > 1$ ”的()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 若 a 为实数,则“ $a < 1$ ”是“ $\frac{1}{a} > 1$ ”的()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

二、填空题

11. 集合 $A = \{-3, m\}$, $B = \{m^2 + 4m, -1\}$,且 $A = B$,则实数 $m =$ _____.

12. 若集合 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid x > 2\}$,则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ _____.

13. 已知 $p: x^2 - (2a + 3)x + a(a + 3) < 0$, $q: |x - 1| < 1$,若 p 是 q 的必要不充分条件,则实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知集合 $A = \{(x, y) | x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) | (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9\}$, 则 $A \cap B$ 的子集个数为_____.

15. 已知 $m, n \in \mathbf{R}$, 则“ $mn \neq 0$ ”是“ $m \neq 0$ 且 $n \neq 0$ ”的_____条件.

三、解答题

16. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{1, 2\}$.

(1) 求 $A \cap (B \cap C)$;

(2) 求 $\complement_A(B \cup C)$.

17. 已知集合 $M = \{x \mid 6x - x^2 > 0\}$, $N = \{x \mid 2a < x < 3 - a\}$.

(1) 若 $a = -1$, 求 $M \cup N$;

(2) 若 $N \subseteq M$, 求 a 的取值范围.

18. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x | m - 1 \leq x \leq 2m + 3\}$.

(1) 若 $m = 1$, 求 $A \cup B$;

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件, 求 m 的取值范围.

19. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq m + 3, m \in \mathbf{R}\}$, 且 $B \neq \emptyset$.

(1) 当 $m = 5$ 时, 求 $A \cup B$;

(2) 若 $A \cap B = B$, 求 m 的取值范围.

20. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | a - 1 \leq x \leq 2a + 1\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$.

(1) 若 $a = 2$, 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$;

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.



专项复盘

“真题集训”错题 1:第_____部分_____题第_____题.

错误反思:

“真题集训”错题 2:第_____部分_____题第_____题.

错误反思:

“巩固练习”错题:第_____部分_____题第_____题.

错误反思:



自我小结





专项二

不等式

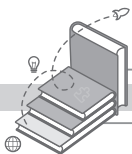


命题趋势

本专项内容在历年高考题中多以选择题形式出现,要求不高,难度不大.不等式主要从三个方面进行考查:一是考查不等式的基本性质;二是考查一元二次不等式、一元一次绝对值不等式的解法,会用集合、区间表示不等式的解集;三是从实际问题中抽象出一元二次不等式模型解决简单实际问题.



真题集训



一、不等式的基本性质与区间

单项选择题

1. (2021·湖南)若 $a > b, c > d$, 则().

A. $a+c > b+d$

B. $a-c > b-d$

C. $ac > bd$

D. $ad > bc$

2. (2022·山西)设 a 为一个正数,若方程 $a^2x^2 + 4x + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根,则 a 的取值范围是().

A. $(0, \sqrt{2})$

B. $(-\sqrt{2}, 0)$

C. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

D. \emptyset

2. (2020 · 河南)解不等式 $2x^2 - 3x - 4 > 0$.

3. (2023 · 江苏)若实数 a 满足不等式 $16 - 24a \leq -9a^2$.

(1)求实数 a 的值;

(2)解关于 x 的不等式 $\log_a(x^2 + 1) < \log_a(2x + 9)$.



三、含绝对值的不等式

一、单项选择题

1. (2022 · 湖南)不等式 $|2x + 5| > 7$ 的解集是().

A. $(-6, 1)$

B. $(-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$

C. $(-1, 6)$

D. $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$

12. (2021·浙江)不等式 $|3.5-x| \leq 1.5$ 的解集为().

A. $[2,5]$

B. $(2,5)$

C. $(-\infty,2] \cup [5,+\infty)$

D. $(-\infty,2) \cup (5,+\infty)$

二、填空题

1. (2021·河北)不等式 $5^{|x-1|} \leq 1$ 的解集为_____.

2. (2021·云南)不等式 $|2x^2-x| \geq 1$ 的解集是_____.

3. (2022·江西)不等式 $|x-1| < a (a > 0)$ 的解集为_____.

4. (2021·江西)不等式 $|1-3x| < 2$ 的解集为_____.

三、解答题

(2022·河南)解绝对值不等式 $|2x-5| \leq 3$.



专项知识精粹

1. 不等式的基本性质

(1) 对称性: $a > b \Leftrightarrow b < a$;

(2) 传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;

(3) 加法性质: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$;

推论 $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$. (同向不等式可加性)

推论 $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$. (异向不等式可减性)

(4) 乘法性质: $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$; $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$;

推论 $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

推论 $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

(5) 可乘方性: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N} \text{ 且 } n \geq 1)$;

(6) 可开方性: $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N} \text{ 且 } n \geq 2)$.

2. 基本不等式及其变形

$$(1) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, a>0, b>0 (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时, 等号成立});$$

$$(2) a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbf{R});$$

$$(3) \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a>0, b>0).$$

3. 含绝对值不等式的解法

$$|ax+b| < c \Leftrightarrow -c < ax+b < c; |ax+b| > c (c>0) \Leftrightarrow ax+b < -c \text{ 或 } ax+b > c.$$



巩固练习

一、单项选择题

1. 若实数 a, b, c 满足 $ac^2 > bc^2, m > 0$, 则下列结论中正确的是()

A. $a > b$

B. $|a| > |b|$

C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

D. $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$

2. 下列命题为真命题的是()

A. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 若 $a > b$, 则 $\frac{b+1}{a+1} > \frac{b}{a}$

C. 若 $a-c < b-d, c < d$, 则 $a+c < b+d$

D. 若 $a > b > 0$, 则 $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$

3. 若实数 a, b, c 满足 $c < b < a$ 且 $ac < 0$, 则下列不等式一定成立的是()

A. $ab > bc$

B. $cb^2 < ab^2$

C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

D. $a^b > c$

4. 若命题“ $\forall x \in [-1, 2], m \leq x^2 + 1$ ”是真命题, 则实数 m 的取值范围是()

A. $[1, +\infty)$

B. $(-\infty, 2]$

C. $(-\infty, 1]$

D. $(-\infty, 5]$

5. 函数 $f(x) = x^2(x+a)$, 若 $f(1) \cdot f(2) < 0$, 则 $f(-1), f(1), f(2)$ 的大小关系是()

A. $f(-1) < f(1) < f(2)$

B. $f(1) < f(-1) < f(2)$

C. $f(-1) < f(2) < f(1)$

D. $f(2) < f(-1) < f(1)$

6. 不等式 $(x+1)(x-3) < 0$ 的解集为()

A. $-1 < x < 3$

B. $-3 < x < 1$

C. $x < -1$ 或 $x > 3$

D. $x < -3$ 或 $x > 1$

7. 已知不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集为 $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > -1\}$, 则不等式 $2x^2 + bx + a < 0$ 的解集为()

A. $\left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2}\right\}$

D. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$

8. $|x-1| < 5$ 的解集是

()

A. $(-6, 4)$

B. $(-4, 6)$

C. $(-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$

D. $(-\infty, -4) \cup (6, +\infty)$

9. 不等式 $|x+5| \geq 3$ 的解集为

()

A. $\{x \mid -8 \leq x \leq 8\}$

B. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

C. $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$

D. $\{x \mid x \leq -8 \text{ 或 } x \geq -2\}$

10. 不等式 $|2x-5| < 7$ 的解集为

()

A. $\{x \mid x > -1\}$

B. $\{x \mid x < 6\}$

C. $\{x \mid -1 < x < 6\}$

D. $\{x \mid x > 6 \text{ 或 } x < -1\}$

二、填空题

11. 已知 $-2 < 3a + 2b < 3$, $2 < a - 3b < 4$, 则 $5a + 7b$ 的取值范围是_____.

12. 已知 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则 $2 - a$ _____ $3 - b$ (填“>”或“<”).

13. 已知 $a < b < 0, c > 0$, 请用恰当的不等号或等号填空: $(a-2)c$ _____ $(b-2)c$.

14. 设 $a \in \mathbf{R}$, 若 $x > 0$ 时均有 $(x-1)(x^2 + ax - 1) \geq 0$, 则 $a =$ _____.

15. 若命题 $\exists x \in \mathbf{R}, -x^2 - 2mx + 2m - 3 \geq 0$ 为真命题, 则 m 的取值范围为_____.

三、解答题

16. 已知 $a + b > 0$, 试比较 $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$ 与 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的大小.

17. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a + b + c = 0$, a, b, c 不同时为 0.

(1) 证明: $ab + bc + ca < 0$;

(2) 若 $a > b$, 证明 $a^3 > b^3$.

18. 比较下列各题中两个代数式值的大小.

(1) $(x^2 + 1)^2$ 与 $x^4 + x^2 + 1$;

(2) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ 与 $\frac{a - b}{a + b}$ ($a > b > 0$).

19. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$.

(1) 若 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-3, 1)$, 求 a, b ;

(2) 若 $f(1) = 2, a, b \in (0, +\infty)$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值.

20. 已知函数 $f(x) = x^2 + 5ax + 6 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | -3 < x < b\}$, 求 a, b 的值;

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x) + 4a^2 - 6 > 0$.



专项复盘

“真题集训”错题 1:第_____部分_____题第_____题.

错误反思:

“真题集训”错题 2:第_____部分_____题第_____题.

错误反思:

“巩固练习”错题:第_____部分_____题第_____题.

错误反思:



自我小结



Blank area for self-summary.

(赠册)

职教高考数学真题分类集训 参考答案及解析



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

目 录

专项一 集合	1
专项二 不等式	4
专项三 函数	8
专项四 指数函数与对数函数	18
专项五 三角函数	23
专项六 数列	37
专项七 平面向量	46
专项八 解析几何	49
专项九 立体几何	66
专项十 概率与统计	79
学习效果检测卷(一)	86
学习效果检测卷(二)	89
学习效果检测卷(三)	91

参考答案及解析

专项一 集合

一、集合的概念与集合之间的关系

一、单项选择题

1. C 解析: \because 集合 N 中含有 1 个元素 0, \therefore 集合 N 不是空集, 又 \because 集合 N 中的元素属于集合 M , \therefore 集合 N 是集合 M 的子集, 故 $N \subseteq M$.
2. A 解析: 选项 A 中, 由 $|x| + |y| = 0$ 得 $x = 0, y = 0$, 所以 $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 0\} = \{(0, 0)\} \neq \emptyset$.
选项 B 中, 对于方程 $x^2 + 4x + 5 = 0, \Delta = 4^2 - 4 \times 5 < 0$, 或者 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$, 所以方程无解, 即 $\{x \mid x^2 + 4x + 5 = 0\} = \emptyset$.
选项 C 中, 由指数函数的性质可知 $e^x > 0$, 所以 $\{x \mid e^x < 0\} = \emptyset$.
故选 A.
3. B 解析: 因为 $a \in A$, 所以 $B = \{0, 1, 4\}$, 共有 3 个元素.

二、填空题

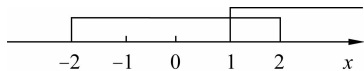
1. $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 解析: 18 的约数有 1, 2, 3, 6, 9, 18, 则 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.
2. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 解析: 要使 $\{2a, a^2 + 1\}$ 为一个集合, 应有 $2a \neq a^2 + 1$, 即 $a^2 - 2a + 1 \neq 0$, 解得 $a \neq 1$, 所以 a 的取值范围是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

二、集合的运算

一、单项选择题

1. D 解析: 由并集的定义得 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 故选 D.
2. A 解析: 由补集的定义得 $\complement_U A = \{1, 7\}$.
3. A 解析: 因为 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$, 故 $A \cap B = \{1, 3\}$. 故选 A.
4. D 解析: 由题意可知, $B = \{-1, 0, 1, 2\}, A = \{x \mid x \geq 0\}$, 则 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$, 故选 D.
5. B 解析: 因为 $B \cap C = \{1, 3\}, A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$, 所以 $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\}$.
6. C 解析: 本题考查集合与集合的运算中的并集和含有绝对值的不等式的解法.
求解这类题目, 一般需要在数轴上画出图形来. 为了能够画出集合 B 的解集, 需要先求出集合 B 中

的含有绝对值的不等式的解集: $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$, 画出图形如下.



从图形上寻找两个集合合并而成的新集合为 $\{x \mid x \geq -2\}$, 也就是说 $A \cup B = \{x \mid x \geq -2\}$, 用区间表示为 $[-2, +\infty)$.

7. A 解析: 由 $A = \{x \mid (x+3)(x-2) < 0\}$ 得 $A = \{x \mid -3 < x < 2\}, B = \{-2, -1, 1, 2\}$, 因此, $A \cap B = \{-2, -1, 1\}$.
8. B 解析: 因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, M = \{2, 4\}$, 所以集合 M 的补集为 $\{1, 3, 5\}$.
9. B 解析: $P = \{x \mid -2 < x < 4\}, M = \{2, 3, 5\}$, 由交集的定义得 $P \cap M = \{2, 3\}$, 故选 B.
10. C 解析: $A = \{-1, 0, 1, 2\}, B = \{0, 2, 3\}$, 由并集的定义得 $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 故选 C.
11. C 解析: $A = \{-1, 0, 1\}, B = \{0, 1\}$, 由并集的定义得 $A \cup B = \{-1, 0, 1\}$, 故选 C.
12. C
13. C 解析: 由题得 $I = \mathbf{R}, A \cup B = \{x \mid 2 < x \leq 3\} \cup \{x \mid -3 \leq x \leq 4\} = \{x \mid -3 \leq x \leq 4\}$, 则 $\complement_I(A \cup B) = \{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 4\}$. 故选 C.
14. C 解析: 由题得 $\complement_I A = \{x \mid x > -3\}, \complement_I B = \{x \mid x < 3\}, \therefore (\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{x \mid x > -3\} \cap \{x \mid x < 3\} = \{x \mid -3 < x < 3\}$. 故选 C.
15. A 解析: 由题知 $N = \{x \mid |x| < 2, x \in \mathbf{R}\} = \{x \mid -2 < x < 2, x \in \mathbf{R}\}$, 所以 $M \cap N = \{x \mid 0 < x < 1, x \in \mathbf{R}\} = M$, $M \cup N = \{x \mid -2 < x < 2, x \in \mathbf{R}\} = N$. 故选 A.
16. D 解析: 由并集的定义得 $M \cup N = \{1, 2, 3, 5\}$, 故选 D.
17. C 解析: 因为集合 $A = \{-1, 0, 1\}, B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{-1, 1\}$.
18. C 解析: 由 $A \cap B = \{1\}$, 得 $1 \in B$, 所以 $a = 1$, 故选 C.
19. A 解析: 由集合的并集运算得 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. 故选 A.
20. D 解析: 给定两个集合 A, B , 由既属于 A 又属于 B 的所有公共元素所构成的集合, 叫作 A, B 的交集. 由题意可知 $1 \in A$ 且 $1 \in B$, 所以 $A \cap B =$

{1}. 故选 D.

21. B 解析: $A \cup B$ 是指 A 和 B 中的所有元素合在一起组成的集合. 重复元素只取一项. 故选 B.
22. D 解析: $A = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | -5 \leq x < 2\}$, 由交集的定义得 $A \cap B = \{x | 1 \leq x < 2\}$, 故选 D.
23. A 解析: $A = \{x | -4 < x \leq 1\}$, $B = \{x | -3 \leq x < 3\}$, 由并集的定义得 $A \cup B = \{x | -4 < x < 3\}$, 故选 A.
24. B 解析: 两个集合的交集, 即两个集合公共元素构成的集合. 因为 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $N = \{2, 3, 5\}$, 所以 $M \cap N = \{2, 3\}$.
25. B 解析: 因为 $M = \{1, 3\}$, $N = \{1 - a, 3\}$, $M \cup N = \{1, 2, 3\}$, 所以 $1 - a = 2$, 解得 $a = -1$.
26. A 解析: 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 由并集定义得 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.
27. C 解析: 集合 $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$, 由交集定义得 $A \cap B = \{0, 6\}$.
28. D 解析: 若集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 故选 D.
29. B 解析: 由交集的定义得 $S \cap T = \{2\}$, 故选 B.
30. A 解析: 由补集的定义得 $\complement_U A = \{0, 6, 8\}$. 故选 A.
31. D 解析: 由并集的定义得 $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, 故选 D.

二、填空题

1. {4} 解析: $\complement_U M$ 为集合 M 在全集 U 中的补集, $\therefore \complement_U M = \{0, 4, 5\}$, 故 $\complement_U M \cap N = \{4\}$.
2. {0, 4} 解析: $\complement_U A$ 为求集合 A 在 U 中的补集, $\therefore \complement_U A = \{0, 4\}$.
3. $(-2, 6)$ 解析: 因为 $A = \{(x, y) | y = 2x + 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x^2 + ax + 5\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 由 $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = x^2 + ax + 5, \end{cases}$ 化简得 $x^2 + (a - 2)x + 4 = 0$, 所以方程无解, 即 $\Delta = (a - 2)^2 - 16 < 0$, 解得 $-2 < a < 6$.

三、解答题

- 解: 由 $|x - 2| > 3$ 得 $x < -1$ 或 $x > 5$, 故 $A = \{x | |x - 2| > 3\} = \{x | x < -1$ 或 $x > 5\}$. 若 $m = 0$, 则 $B = \mathbf{R}$, 故 $A \cap B = \{x | x < -1$ 或 $x > 5\}$. 若 $m < 0$, 则 $B = \{x | mx + 1 > 0\} = \{x | x < -\frac{1}{m}\}$. 当 $-\frac{1}{m} \leq 5$, 即 $m \leq -\frac{1}{5}$ 时, $A \cap B = \{x | x < -1\}$.

当 $-\frac{1}{m} > 5$, 即 $-\frac{1}{5} < m < 0$ 时, $A \cap B = \{x | x < -1$ 或 $5 < x < -\frac{1}{m}\}$.

三、充要条件

一、单项选择题

1. B 解析: 方程 $(x + 1)(x - 3) = 0$ 的解为 $x = -1$ 或 $x = 3$, 所以“ $(x + 1)(x - 3) = 0$ ”是“ $x = 3$ ”的必要不充分条件.
2. A 解析: 将 $x = 1$ 代入 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 可得 $1 - 3 + 2 = 0$, 故“ $x = 1$ ”是“ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”的充分条件; 由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = 2$, 故“ $x = 1$ ”不是“ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”的必要条件. 故选 A.
3. A 解析: “ $a > 5$ ”能推出“ $a \geq 3$ ”, 但“ $a \geq 3$ ”推不出“ $a > 5$ ”, 所以“ $a > 5$ ”是“ $a \geq 3$ ”的充分条件.
4. B 解析: 由“四边形是平行四边形”不能得到“四边形是菱形”, 而“四边形是菱形”可以得到“四边形是平行四边形”, 故“四边形是平行四边形”是“四边形是菱形”的必要不充分条件.
5. B 解析: “ $|a| = |b|$ ”等价于“ $a = b$ 或 $a = -b$ ”, 所以“ $a = b$ ”是“ $|a| = |b|$ ”的充分不必要条件, 故选 B.
6. C 解析: 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$; 反之, 若 $A \cap B = A$, 则 A 是 B 的子集, 即 $A \subseteq B$. 所以“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cap B = A$ ”的充要条件. 故选 C.
7. A 解析: “ $x = 2$ ”能推出“ $-1 < x \leq 3$ ”, 但是“ $-1 < x \leq 3$ ”不能推出“ $x = 2$ ”, 所以“ $x = 2$ ”是“ $-1 < x \leq 3$ ”的充分条件, 故选 A.
8. A 解析: 因为 $a^2 > 1$ 等价于 $a < -1$ 或 $a > 1$, 所以“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的充分条件, 故选 A.
9. A 解析: 本题考查充分条件和必要条件. 由“ $x = 1$ ”可以推出“ $x > 0$ ”成立; 但反之不一定成立, 所以本题为充分条件. 故选 A.
10. A 解析: 若 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 或 $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, \therefore “ $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ”是“ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ”的必要不充分条件. 故选 A.
11. B 解析: 若 $|x| > 3$, 则 $x > 3$ 或 $x < -3$, 所以由命题甲推不出命题乙; 若 $x > 3$, 则 $|x| > 3$, 所以由命题乙可以推出命题甲, 因此命题甲是命题乙的必要不充分条件. 故选 B.
12. C 解析: 由“ $x = 2$ ”可以推出“ $x(x - 2) = 0$ ”, 充分性成立; 由“ $x(x - 2) = 0$ ”可以推出“ $x = 2$ 或 $x = 0$ ”, 必要性不成立, \therefore “ $x = 2$ ”是“ $x(x - 2) = 0$ ”的充分不必要条件. 故选 C.
13. A 解析: 若 $x > 1$, 则 $|x| > 1$, 所以充分性成立;

若 $|x| > 1$, 则 $x > 1$ 或 $x < -1$, 所以必要性不成立. 故选 A.

14. A 解析: 因为“ $|x| > 1$ ”可整理为“ $x > 1$ 或 $x < -1$ ”, 所以“ $x < -1$ ”可推出“ $|x| > 1$ ”, 但“ $|x| > 1$ ”不可推出“ $x < -1$ ”. 故选 A.

15. B 解析: $|x| < 1$ 等价于 $-1 < x < 1$, 由小范围推大范围得, “ $x < 1$ ”是“ $|x| < 1$ ”的必要不充分条件, 故选 B.

16. B 解析: 因为 $\sqrt{3} < \sqrt{5}$, 由小范围推大范围得“ $x > \sqrt{3}$ ”是“ $x > \sqrt{5}$ ”的必要不充分条件, 故选 B.

17. C 解析: $|x+1| > 3 \Leftrightarrow x+1 > 3$ 或 $x+1 < -3 \Leftrightarrow x > 2$ 或 $x < -4$, 所以 $x > 2 \Rightarrow |x+1| > 3$, 所以为必要而不充分条件.

18. C 解析: 当 $e^x = 1$ 时, $x = 0$; 当 $x = 0$ 时, $e^x = 1$. 所以“ $e^x = 1$ ”是“ $x = 0$ ”的充要条件.

19. D 解析: “ $x^2 > 1$ ” \Leftrightarrow “ $x < -1$ 或 $x > 1$ ”, 推不出“ $x > 0$ ”,

同时“ $x > 0$ ”也推不出“ $x^2 > 1$ ”, 故选 D.

20. C 解析: $a^3 - b^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{b^3} \Leftrightarrow a = b$, 故选 C.

巩固练习

一、单项选择题

1. C 解析: $\complement_{\mathbb{R}} N = \{x | x \geq 2\}$, 故 $M \cap (\complement_{\mathbb{R}} N) = \{0, 1, 2, 3\} \cap \{x | x \geq 2\} = \{2, 3\}$.

2. C 解析: 由 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 可得: $x < -1$ 或 $x > 3$, 即 $A = \{x | x < -1$ 或 $x > 3\}$,

因 $B = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, 故 $A \cap B = \{x | x < -1$ 或 $x > 3\} \cap \{x | 0 \leq x \leq 4\} = \{x | 3 < x \leq 4\}$.

3. B 解析: ① $0 \notin \mathbb{N}$ 错误, \mathbb{N} 中包括 0;

② $0 \in \emptyset$ 错误, \emptyset 中没有任何元素;

③ $\emptyset \in \{0\}$ 错误, \emptyset 与 $\{0\}$ 之间为包含关系, 不应该用属于符号;

由③可知, ④正确;

⑤ $\{0, 1\} = \{(0, 1)\}$ 错误, $\{0, 1\}$ 中有两个元素 0, 1, $\{(0, 1)\}$ 中只有一个元素 $(0, 1)$;

⑥ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ 正确, 有理数中包括整数.

4. D 解析: 由于 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $N = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$, 所以 $M \cup N = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$.

5. C 解析: 由题意集合 $M = \{x | x < 1\}$, $N = \{x | x^2 < 1\} = \{x | -1 < x < 1\}$, 所以 $N \subseteq M$.

6. D 解析: 由题意, 若 $a^2 - 2a + 1 = 4$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -1$, 若 $a - 4 = 4$, 解得 $a = 8$,

当 $a = -1$ 时, $A = \{-1, 4, -5\}$ 满足题意,

当 $a = 3$ 时, $A = \{-1, 4, -1\}$ 违背了集合中元素

间的互异性,

当 $a = 8$ 时, $A = \{-1, 4, 49\}$ 满足题意,

综上所述, a 的值可能为 $-1, 8$.

7. C 解析: $3 \notin A = \{x | -4 < x < 2\}$, 显然 A, B 错误;

因为 $\{x | -4 < x < 2\}$ 是集合 $A = \{x | -4 < x < 2\}$ 的子集, 但不是真子集, 故 D 错误;

$\{0\}$ 是集合 $A = \{x | -4 < x < 2\}$ 的真子集, 故 C 正确.

8. B 解析: 由 $a + 1 > b$ 等价于 $a > b - 1$,

由 $a^3 > b^3$ 等价于 $a > b$,

由 $a > b - 1$ 推不出 $a > b$, 由 $a > b$ 可以推出 $a > b - 1$,

则“ $a + 1 > b$ ”是“ $a^3 > b^3$ ”的必要不充分条件.

9. B 解析: 不等式 $\frac{1}{x-2} > 1$ 可化为 $\frac{1}{x-2} - 1 > 0$, 即

$\frac{3-x}{x-2} > 0$, 即 $(x-3)(x-2) < 0$, 解得 $2 < x < 3$,

因为“ $1 < x < 3$ ”不能推出“ $2 < x < 3$ ”, “ $2 < x < 3$ ”能推出“ $1 < x < 3$ ”,

所以“ $1 < x < 3$ ”是“ $\frac{1}{x-2} > 1$ ”的必要不充分条件.

10. B 解析: 解不等式 $\frac{1}{a} > 1$, 得 $0 < a < 1$, 显然集合

$\{a | 0 < a < 1\}$ 真包含于集合 $\{a | a < 1\}$,

所以“ $a < 1$ ”是“ $\frac{1}{a} > 1$ ”的必要不充分条件.

二、填空题

11. -1 解析: 由题意得 $A = B$, 故 $-1 \in A$, 则 $m = -1$, $m^2 + 4m = -3$, 则 $B = \{-3, -1\}$, 符合题意.

12. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ 解析: 由 $B = \{x | x > 2\}$, 故 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \leq 2\}$,

则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$.

13. $[-1, 0]$ 解析: 由 $x^2 - (2a+3)x + a(a+3) < 0$ 解得 $x \in (a, a+3)$,

由 $|x-1| < 1$ 解得 $x \in (0, 2)$,

根据题意得: $(0, 2)$ 是 $(a, a+3)$ 的真子集,

$\therefore \begin{cases} a \leq 0 \\ a+3 \geq 2 \end{cases}$ (等号不同时成立), 解得: $a \in$

$[-1, 0]$.

14. 4 解析: 集合 A 表示直线 $x - y = 1$ 上点的集合, 集合 B 表示圆 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ 上点的集合.

圆 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ 的圆心坐标为 $(2, -3)$, 半径为 3,

点 $(2, -3)$ 到直线 $x - y = 1$ 的距离为 $\frac{|2+3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2} < 3$,

所以直线 $x - y = 1$ 与圆 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ 相交,

所以 $A \cap B$ 共有 2 个元素, 所以 $A \cap B$ 的子集个数为 $2^2 = 4$.

15. 充要 解析: 因为 $mn \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ 且 $n \neq 0$, 所以“ $mn \neq 0$ ”是“ $m \neq 0$ 且 $n \neq 0$ ”的充要条件.

三、解答题

16. 解: (1) 因为 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

故 $B \cap C = \{1, 2\}$,

所以 $A \cap (B \cap C) = \{1, 2\}$.

(2) 易知 $B \cup C = \{0, 1, 2\}$,

$\complement_A(B \cup C) = \{-2, -1\}$.

17. 解: (1) 由 $M = \{x | 6x - x^2 > 0\}$, 解得: $M = \{x | 0 < x < 6\}$,

$a = -1$ 时, $N = \{x | -2 < x < 4\}$,

所以 $M \cup N = \{x | -2 < x < 6\}$.

(2) 当 $N = \emptyset$ 时, $2a \geq 3 - a$, 解得 $a \geq 1$;

当 $N \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} 2a < 3 - a \\ 2a \geq 0 \\ 3 - a \leq 6 \end{cases}$, 解得 $0 \leq a < 1$.

综上, a 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

18. 解: (1) 不等式 $x^2 - x - 2 \leq 0$ 的解集是 $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$.

当 $m = 1$ 时, $B = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$, 故 $A \cup B = \{x | -1 \leq x \leq 5\}$.

(2) 因为“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件, 所以 A 是 B 的子集,

故 $\begin{cases} m - 1 \leq 2m + 3 \\ m - 1 \leq -1 \\ 2m + 3 \geq 2 \end{cases}$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$, 即 $m \in [-\frac{1}{2}, 0]$.

19. 解: (1) 当 $m = 5$ 时, $B = \{x | 6 \leq x \leq 8\}$, 因为 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}$,

所以 $A \cup B = \{x | -2 \leq x \leq 8\}$.

(2) 由题可知, $B \subseteq A$, 因为 $B = \{x | m + 1 \leq x \leq m + 3, m \in \mathbf{R}\}$,

所以 $m + 1 \geq -2$ 且 $m + 3 \leq 7$, 解得 $-3 \leq m \leq 4$,

所以 m 的取值范围为 $\{m | -3 \leq m \leq 4\}$.

20. 解: (1) 当 $a = 2$ 时, 集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, 可得

$\complement_{\mathbf{R}}A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 5\}$,

所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = \{x | -3 \leq x < 1\}$.

(2) 由题知, 集合 A 是集合 B 的真子集,

当 $A = \emptyset$ 时, $a - 1 > 2a + 1$, 即 $a < -2$, 符合题意,

当 $A \neq \emptyset$ 时, 则 $2a + 1 \geq a - 1$, 即 $a \geq -2$, 且满足

$\begin{cases} 2a + 1 \leq 3 \\ a - 1 \geq -3 \end{cases}$, 两式不能同时取等号, 解得 $-2 \leq a < 1$,

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

专项二 不等式

一、不等式的基本性质与区间

一、单项选择题

1. A 解析: 根据不等式的性质, 可知 A 正确; 若 $a = 1, b = -1, c = 2, d = -2$, 则 $a - c < b - d, ac = bd, ad = bc$, 故 B, C, D 不正确. 故选 A.

2. A 解析: 因为方程 $a^2x^2 + 4x + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根, 所以 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a > 0, \\ 16 - 8a^2 > 0, \end{cases}$

解得 $0 < a < \sqrt{2}$.

3. C

4. B 解析: 题干中, $2^{-3} = \frac{1}{8}, 3^{-2} = \frac{1}{9}, (-2)^3 = -8, (-3)^2 = 9$, 故 $(-2)^3 < 3^{-2} < 2^{-3} < (-3)^2$.

5. D 解析: 根据不等式的基本性质可知 D 正确.

6. A 解析: 已知 a, b, c 为实数, 且 $a > b$, 则 $c^2 \geq 0$, 所以 $ac^2 \geq bc^2$, 故选 A.

7. B 解析: 因为 $x > 0$ 时, $y = \sqrt{x}$ 是增函数, 所以 $0 < a < b$ 时, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, 即选项 B 正确.

8. D 解析: 令 $a = -2, b = -1$, 可排除 A. 令 $a = -1, b = 1$, 可排除 B 和 C. 故选 D.

9. A 解析: $a - b = x^2 + 1 - (2x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$, 即 $a > b$, 故选 A.

10. D 解析: 本题考查不等式的基本性质. 由 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a > b$, 可推出 $a - b > 0$, 分析四个选项, 只有 D 项“ $-b > -a$ ”可变形得到. 故选 D.

11. A 解析: $\because a < b < 0, c < d < 0, \therefore -a > -b > 0, -c > -d > 0, \therefore (-a)(-c) > (-b)(-d)$, 即 $ac > bd$. 故选 A.

12. C 解析: 由题图知 $a < 0, b > 0$, 所以 $a - b < 0$, 所以 $|a - b| - \sqrt{a^2} = -(a - b) - (-a) = -a + b + a = b$. 故选 C.

13. B 解析: 因为 $a > b > c$, 所以 $a > c, b > c$, 故 $a + b > 2c$. B 选项正确

14. B 解析: 由题图可知数轴上表示的范围是 $-2 \leq$

$x < 4$, 经验证, 选项 B 的解集符合要求.

15. D 解析: 当 $m < n < 0$ 时, 由指数函数的性质得 $0 < 2^m < 2^n$, 故 A 错误;
当 $m < n < 0$ 时, $m^2 > n^2$, 故 B 错误;
当 $m < n < 0$ 时, $n - m > 0, m - n < 0$, 所以 $n - m > m - n$, 故 C 错误;
故选 D.

二、一元二次不等式及其应用

一、单项选择题

1. A 解析: $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ 可化为 $(x-3)(x+1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 3$, 故选 A.
2. A 解析: 由 $-x^2 + 2x \geq 0$ 变形为 $x^2 - 2x \leq 0$, 解得 $0 \leq x \leq 2$. 故选 A.
3. A 解析: 由 $x^2 + x - 12 \leq 0$ 得 $(x+4)(x-3) \leq 0$, 解得 $-4 \leq x \leq 3$, 故选 A.
4. B 解析: 由 $x^2 + x - 2 > 0$ 得 $(x+2)(x-1) > 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > 1$.
5. D 解析: 不等式 $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ 等价于 $(x-1)(x-5) \geq 0$, 由数轴标根法得 $x \leq 1$ 或 $x \geq 5$, \therefore 不等式 $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ 的解集为 $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$. 故选 D.
6. B 解析: 原不等式可整理为 $(x+1)(x-7) \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 7$. 故选 B.
7. B 解析: $x^2 - x - 12 < 0$ 可化为 $(x+3)(x-4) < 0$, 解得 $-3 < x < 4$, 故选 B.
8. C 解析: 由题意可知, -4 和 1 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根, 则可列方程组 $\begin{cases} (-4)^2 - 4a + b = 0, \\ 1^2 + a + b = 0, \end{cases}$
解得 $\begin{cases} a = 3, \\ b = -4. \end{cases}$ 故选 C.

二、填空题

1. $(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ 解析: $\frac{x+2}{2x-1} > 0$ 可以化简为 $(x+2)(2x-1) > 0$, 解得 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -2$.
2. $(-\infty, \frac{1}{5}) \cup (1, +\infty)$ 解析: 因为不等式 $x^2 + ax + b > 0$ 的解集为 $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$, 所以方程 $x^2 + ax + b = 0$ 对应的两个根是 $x_1 = 2, x_2 = 3$.
 $x_1 + x_2 = -a = 5$, 所以 $a = -5$. $x_1 \cdot x_2 = b = 6$, 所以 $b = 6$.
所以不等式 $ax^2 + bx - 1 < 0$ 可转化为 $-5x^2 + 6x - 1 < 0$, 即 $5x^2 - 6x + 1 > 0$,
解得 $x < \frac{1}{5}$ 或 $x > 1$.

3. $\{x | \frac{3}{4} \leq x < 2\}$ 解析: 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 可转化为 $\frac{3x-1}{2-x} - 1 \geq 0$, 即 $\frac{4x-3}{2-x} \geq 0$, 等价于 $\begin{cases} (4x-3)(x-2) \leq 0, \\ 2-x \neq 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{3}{4} \leq x < 2$. 故原不等式的解集为 $\{x | \frac{3}{4} \leq x < 2\}$.

三、解答题

1. 解: 将不等式移项得 $2x^2 - 9x + 7 > 0$,
即 $(x-1)(2x-7) > 0$,
所以 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ 2x-7 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1 < 0, \\ 2x-7 < 0 \end{cases}$,
解得 $x < 1$ 或 $x > \frac{7}{2}$.
故不等式的解集为 $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > \frac{7}{2}\}$.
2. 解: 由求根公式求得方程 $2x^2 - 3x - 4 = 0$ 的解为 $\frac{3-\sqrt{41}}{4}$ 或 $\frac{3+\sqrt{41}}{4}$, 由“大于取两边”得不等式的解集为 $\{x | x < \frac{3-\sqrt{41}}{4} \text{ 或 } x > \frac{3+\sqrt{41}}{4}\}$.
3. 解: (1) 因为不等式化简得 $9a^2 - 24a + 16 \leq 0$, 所以 $(3a-4)^2 \leq 0$, 所以 $a = \frac{4}{3}$.
(2) 由(1)可得 $\begin{cases} x^2 + 1 > 0, \\ 2x + 9 > 0, \\ x^2 + 1 < 2x + 9, \end{cases}$ 解得 $-2 < x < 4$,
所以不等式的解集是 $(-2, 4)$.

三、含绝对值的不等式

一、单项选择题

1. B 解析: 由 $|2x+5| > 7$ 得 $2x+5 < -7$ 或 $2x+5 > 7$, 解得 $x < -6$ 或 $x > 1$.
2. C 解析: 由 $|2x-1| < 3$ 得 $-3 < 2x-1 < 3$, 解得 $-1 < x < 2$, 所以不等式的解集是 $\{x | -1 < x < 2\}$. 故选 C.
3. D 解析: 由 $|ax-3| < 1$ 可得 $-1 < ax-3 < 1$, 化简得 $2 < ax < 4$, 又因为不等式的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$, 可得 $a > 0$, 故 $\frac{2}{a} < x < \frac{4}{a}$, $\frac{2}{a} = 1$, $\frac{4}{a} = 2$, 解得 $a = 2$.
4. A 解析: 解 $|x+1| \geq 2$, 得 $x+1 \leq -2$ 或 $x+1 \geq 2$, 即 $x \leq -3$ 或 $x \geq 1$, 故选 A.
5. B 解析: 解不等式 $|x| < 2$ 得 $-2 < x < 2$, 故选 B.
6. B 解析: $|-2x+1| \geq 3$ 等价于 $-2x+1 \geq 3$ 或 $-2x+1 \leq -3$, 解得 $x \leq -1$, 或 $x \geq 2$, 所以

$|-2x+1| \geq 3$ 的解集是 $\{x|x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$.
故选 B.

7. A 解析: 由绝对值的性质得 $1-2x \geq 0$, 解得 $x \leq \frac{1}{2}$. 故选 A.

8. D 解析: 原不等式可化为 $x+1 < -2$ 或 $x+1 > 2$, 解得 $x < -3$ 或 $x > 1$, 故选 D.

9. C 解析: 不等式 $|x-2| \leq 1$ 可化为 $-1 \leq x-2 \leq 1$, 解得 $1 \leq x \leq 3$, 故选 C.

10. A 解析: $|x+1| \leq 2$ 可化为 $-2 \leq x+1 \leq 2$, 得 $-3 \leq x \leq 1$.

11. B 解析: $|x-1| \geq 2$ 可化为 $x-1 \leq -2$ 或 $x-1 \geq 2$, 得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$.

12. A 解析: 原不等式等价于 $|x-3.5| \leq 1.5$, 即 $-1.5 \leq x-3.5 \leq 1.5$, 解得 $2 \leq x \leq 5$, 故选 A.

二、填空题

1. $\{x|x=1\}$ 解析: 不等式 $5^{|x-1|} \leq 1$ 可化为 $5^{|x-1|} \leq 5^0$, 即 $|x-1| \leq 0$, 解得 $x=1$.

2. $\left\{x \mid x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2}\right\}$ 解析: 不等式 $|2x^2-x| \geq 1$ 等价于 $2x^2-x \geq 1$ ① 或 $2x^2-x \leq -1$ ②, 由①解得 $x \geq 1$, 或 $x \leq -\frac{1}{2}$, 由②得 $x \in \emptyset$, \therefore 不等式 $|2x^2-x| \geq 1$ 的解集为 $\left\{x \mid x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2}\right\}$.

3. $(1-a, 1+a)$ 解析: 由题意可知, 不等式 $|x-1| < a$ 可变形为 $-a < x-1 < a$, 解得 $1-a < x < 1+a$, 所以不等式 $|x-1| < a$ ($a > 0$) 的解集为 $(1-a, 1+a)$.

4. $\left\{x \mid -\frac{1}{3} < x < 1\right\}$ 解: 不等式 $|1-3x| < 2$ 等价于 $-2 < 1-3x < 2$, 解得 $-\frac{1}{3} < x < 1$, \therefore $|1-3x| < 2$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{3} < x < 1\right\}$.

三、解答题

解: 原不等式 $|2x-5| \leq 3$ 可化为 $-3 \leq 2x-5 \leq 3$, 三端同时加 5, 得 $2 \leq 2x \leq 8$, 解得 $1 \leq x \leq 4$, 故原不等式的解集为 $\{x|1 \leq x \leq 4\}$ 或者 $[1, 4]$

巩固练习

一、单项选择题

1. A 解析: 因为 $ac^2 > bc^2, m > 0$, 所以 $a > b$, 故 A 正确;
若 $0 > a > b \Rightarrow |a| < |b|$, 故 B 错误;

若 $a > 0 > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 C 错误;

若 $0 > a > b, m = -b \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 = \frac{b+m}{a+m}$, 故 D 错误.

2. C 解析: 对于 A, 当 $b=0$ 时, $\frac{1}{b}$ 无意义, 故 A 错误,

对于 B, 当 $a=-1$ 时, $\frac{b+1}{a+1}$ 无意义, 故 B 错误,

对于 C, 若 $a-c < b-d$ 且 $c < d$, 则 $a < b+c-d$, $a+c < b+2c-d < b+d$, 故 C 正确,

对于 D, 令 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$, 则 $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}, b + \frac{1}{b} = \frac{17}{4}$, 显然 $a + \frac{1}{a} < b + \frac{1}{b}$, 故 D 错误.

3. D 解析: 由 $ac < 0, c < b < a$ 可得 $a > 0, c < 0$,

对于选项 A: 令 $b = -1, a = 1, c = -2$ 可得 $ab < bc$, 故选项 A 不正确;

对于选项 B: 令 $b = 0$, 可得 $cb^2 = 0 = ab^2$, 故选项 B 不正确;

对于选项 C: 因为 $c < 0 < a$, 当 $b = -1, a = 1$ 时, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故选项 C 不正确;

对于选项 D: 因为 $c < 0 < a, a^b > 0$, 所以 $a^b > c$, 故选项 D 正确.

4. C 解析: 由“ $\forall x \in [-1, 2], m \leq x^2 + 1$ ”是真命题可知,

不等式 $m \leq x^2 + 1, x \in [-1, 2]$ 恒成立, 因此只需 $m \leq (x^2 + 1)_{\min}, x \in [-1, 2]$,

易知函数 $y = x^2 + 1$ 在 $x \in [-1, 2]$ 上的最小值为 1, 所以 $m \leq 1$.

即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

5. A 解析: 因为 $f(1) \cdot f(2) < 0$, 所以 $(1+a) \times 4(2+a) < 0$, 所以 $-2 < a < -1$,

所以 $f(-1) = (-1)^2(-1+a) < 1^2(1+a) = f(1) < 0$, 又 $f(2) = 2^2(2+a) > 0$,

所以 $f(-1) < f(1) < f(2)$.

6. A 解析: 不等式 $(x+1)(x-3) < 0$ 的解集为 $-1 < x < 3$.

7. C 解析: 由不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集为 $\{x|x < -2 \text{ 或 } x > -1\}$,

得 $-2, -1$ 是方程 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 的两个根, 且 $a > 0$,

因此 $-2 + (-1) = -\frac{b}{a}$, 且 $-2 \times (-1) = \frac{2}{a}$, 解得 $a = 1, b = 3$,

不等式 $2x^2 + bx + a < 0$ 化为: $2x^2 + 3x + 1 < 0$, 解

得 $-1 < x < -\frac{1}{2}$,

所以不等式 $2x^2 + bx + a < 0$ 的解集为

$$\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2}\right\}.$$

8. B 解析: $|x-1| < 5 \Rightarrow -5 < x-1 < 5 \Rightarrow -4 < x < 6$.

9. D

10. C 解析: 去掉绝对值符号, 解 $-7 < 2x-5 < 7$ 可得.

二、填空题

11. $(-8, 4)$ 解析: $-2 < 3a+2b < 3, 2 < a-3b < 4$,

$$\text{设 } 5a + 7b = x(3a+2b) + y(a-3b) = (3x+y)a + (2x-3y)b,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=7 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases},$$

$$\text{所以 } 5a+7b=2(3a+2b)-(a-3b),$$

$$\text{又 } -4 < 2(3a+2b) < 6, -4 < -(a-3b) < -2,$$

所以 $2(3a+2b)-(a-3b) \in (-8, 4)$, 即 $5a+7b$ 的取值范围是 $(-8, 4)$.

12. $<$ 解析: 由题意知, $a > b$, 则 $-a < -b$,

$$\text{所以 } -a+2 < -b+3, \text{即 } 2-a < 3-b.$$

13. $<$ 解析: 因为 $a < b < 0, c > 0$, 则 $a-2 < b-2$, 由不等式的基本性质可得 $(a-2)c < (b-2)c$.

14. 0 解析: 当 $x=1$ 时, 显然 $(x-1)(x^2+ax-1) \geq 0$ 成立, 此时 $a \in \mathbf{R}$;

当 $0 < x < 1$ 时, 由 $(x-1)(x^2+ax-1) \geq 0$ 成立, 得 $x^2+ax-1 \leq 0$ 成立,

$$\therefore 1+a-1 \leq 0, \therefore a \leq 0,$$

当 $x > 1$ 时, 由 $(x-1)(x^2+ax-1) \geq 0$ 成立, 得 $x^2+ax-1 \geq 0$ 成立,

$$\therefore 1+a-1 \geq 0, \therefore a \geq 0,$$

$$\therefore x > 0 \text{ 时均有 } (x-1)(x^2+ax-1) \geq 0, \therefore a = 0.$$

15. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ 解析: 由题意, 不等式 $-x^2-2mx+2m-3 \geq 0$ 有解, 即不等式 $x^2+2mx-2m+3 \leq 0$ 有解,

设 $f(x) = x^2+2mx-2m+3$, 则函数图像开口向上,

要使不等式 $f(x) \leq 0$ 有解, 则函数 $f(x)$ 图像与 x 轴有交点,

则 $\Delta = 4m^2 - 4(-2m+3) \geq 0$, 化简得 $m^2 + 2m - 3 \geq 0$, 解得 $m \leq -3$ 或 $m \geq 1$.

三、解答题

16. 解: 由 $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{a-b}{b^2} + \frac{b-a}{a^2} = (a-b) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2}$,

因为 $a+b > 0, (a-b)^2 \geq 0$, 可得 $\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2} \geq 0$,

$$\text{所以 } \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

17. (1) 证明: $\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0$,

$$\therefore ab+bc+ca = -\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

a, b, c 不同时为 0, 则 $a^2+b^2+c^2 > 0$,

$$\therefore ab+bc+ca = -\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) < 0.$$

(2) 解: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$\therefore a^2+ab+b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0,$$

取等号的条件为 $a=b=0$,

而 $a > b$, \therefore 等号无法取得,

$$\text{即 } a^2+ab+b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0,$$

又 $a > b$, $\therefore a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) > 0$,

$$\therefore a^3 > b^3.$$

18. 解: (1) $(x^2+1)^2 - (x^4+x^2+1) = x^4 + 2x^2 + 1 - (x^4+x^2+1) = x^2 \geq 0$,

$$\therefore (x^2+1)^2 \geq x^4+x^2+1.$$

$$(2) \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a^2-b^2)(a+b)}{(a^2+b^2)(a+b)} -$$

$$\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{(a+b)(a^2+b^2)} = \frac{2ab(a-b)}{(a+b)(a^2+b^2)},$$

$$\therefore a > b > 0,$$

$$\therefore 2ab > 0, a-b > 0, a+b > 0, a^2+b^2 > 0,$$

$$\text{则 } \frac{2ab(a-b)}{(a+b)(a^2+b^2)} > 0,$$

$$\therefore \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} > \frac{a-b}{a+b}.$$

19. 解: (1) 因为 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-3, 1)$, 所以 $-3, 1$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根,

$$\text{则 } \begin{cases} -3+1=-a \\ -3 \times 1=b \end{cases}, \text{解得 } a=2, b=-3.$$

(2) 因为 $f(1) = 1+a+b=2$, 即 $a+b=1$,

且 $a, b \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) = 1 + \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} +$$

$$4 \geq 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + 5 = 4 + 5 = 9,$$

当且仅当 $\frac{4a}{b} = \frac{b}{a}$, 即 $b=2a = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立,

所以当 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ 时, $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 9.

20. 解: (1) 因为 $f(x) < 0$ 的解集为

$$\{x|-3 < x < b\},$$

所以 $x^2+5ax+6=0$ 的根为 $-3, b$,

$$\text{所以 } \begin{cases} -3+b=-5a, \\ -3 \times b=6 \end{cases},$$

解得 $a=1, b=-2$.

(2) 由 $f(x)+4a^2-6 > 0$,

可知 $x^2+5ax+4a^2 > 0$, 即 $(x+a)(x+4a) > 0$,

当 $a=0$ 时, 解得 $x \neq 0$;

当 $a > 0$ 时, $-4a < -a$,

解得 $x > -a$ 或 $x < -4a$;

当 $a < 0$ 时, $-4a > -a$,

解得 $x > -4a$ 或 $x < -a$.

综上: 当 $a=0$ 时, 不等式 $f(x)+4a^2-6 > 0$ 的解集为 $\{x|x \neq 0\}$;

当 $a > 0$ 时, 不等式 $f(x)+4a^2-6 > 0$ 的解集为 $\{x|x > -a \text{ 或 } x < -4a\}$;

当 $a < 0$ 时, 不等式 $f(x)+4a^2-6 > 0$ 的解集为 $\{x|x > -4a \text{ 或 } x < -a\}$.

专项三 函数

一、函数的概念及其表示

一、单项选择题

1. B 解析: 由题意可得 $1+x > 0$, 解得 $x > -1$. 故选 B.

2. C 解析: $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 即 $-1 < x < 1$. 对于 $f(2x+1)$, 由 $-1 < 2x+1 < 1$, 得 $-1 < x < 0$. 故函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(-1, 0)$.

3. B 解析: 因为 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,
所以 $f(-2) = \frac{-2+1}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$.

4. D 解析: 选项 A 中, $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, 与 $y = \sin x$ 不是同一函数.
选项 B 中, $y = \ln x^2$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 而 $y = 2\ln x$ 的定义域为 $\{x|x > 0\}$, 故两个函数不是同一函数.

选项 C 中, $y = e^0$ 的定义域为 \mathbf{R} , 而 $y = \frac{x}{x}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 故两个函数不是同一函数.

选项 D 中, $y = \sqrt{x^2} = |x|$, 且两个函数的定义域相同, 故两个函数是同一函数.
故选 D.

5. A 解析: 要使函数 $y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$ 有意义, 应有 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x^2-1 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x^2 \leq 1, \\ x^2 \geq 1, \end{cases}$ 即 $x^2 = 1$,

所以函数的定义域是 $\{-1, 1\}$, 故选 A.

6. A 解析: 因为 $f(-1) = -a+1 = \frac{1}{2}$, 所以 $a = \frac{1}{2}$, 故 $f(1) = a = \frac{1}{2}$, 故选 A.

7. C 解析: 要使 $f(x) = \frac{1}{5^x-1}$ 有意义, 应有 $5^x-1 \neq 0$, 即 $x \neq 0$, 故选 C.

8. A 解析: $f(-1) + f(1) = 2^{-1} + 1^2 = \frac{3}{2}$, 故选 A.

9. B 解析: $f(x) = x^2 - 2x$ 的对称轴是 $x = 1$, 因为 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上的最大值与最小值的和为 3, 所以 $a > 1$.

此时 $f(x)_{\min} = f(1) = 1 - 2 = -1$, $f(x)_{\max} = f(a) = a^2 - 2a$, 所以 $-1 + a^2 - 2a = 3$, 解得 $a = 1 + \sqrt{5}$, 故选 B.

10. D 解析: 本题考查函数的定义域求法. 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 中, $x \neq 0$, 则此函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 故选 D.

11. A 解析: 本题考查分段函数的应用. 根据题意, $f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$, $f(1) = -1$, 所以 $f(-1) \cdot f(1) = -3$. 故选 A.

12. D 解析: 由 $y = 2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 2 \times \frac{9}{16} + 1 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$, 得顶点坐标为 $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$. 故选 D.

13. A 解析: 由题得 $x^2 - 3x + 2 > 0$, 解得 $x < 1$ 或 $x > 2$, 所以函数 $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ 的定义域为 $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$. 故选 A.

14. C 解析: 由题知 $\begin{cases} x+1 > 0, \\ -x^2-3x+4 > 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < x < 1$. 故选 C.

15. B 解析: 令 $2x-1 = \frac{2}{3}$, 解得 $x = \frac{5}{6}$, 所以 $f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = 3$. 故选 B.

16. D 解析: 要使函数有意义, 需满足 $2x-4 \neq 0$, 得 $x \neq 2$, 故选 D.

17. B 解析: 要使函数有意义, 须满足 $x-1 > 0$, 解得 $x > 1$.

18. B 解析: 由 $x-3 \neq 0$ 得 $x \neq 3$, 故选 B.

19. A 解析: 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x}$ 的值域为 $(0, +\infty)$; 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x$ 的值域为 $[1, +\infty)$. 综上, 函数的值域为 $(0, +\infty)$. 故