免费提供
★★★ 精品教学资料包
服务热线：400-615-1233
www.huatengzy.com

高等院校公共基础课精品教材

新标准教材

高等数学

主编 彭先萌 黄 琳

本书将数学基础知识、数学建模和数学实验有机融合，具有以下特点：

- “一个突破，两个衔接”，实现内容和体系的创新
- “低起点，小步递进”，降低难度，突出应用
- 兼具应用性和启发性
- 教学方法和学习方法相融合

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

高等数学
主编 彭先萌 黄 琳
西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

X-B

高等数学

策划编辑：李 松
责任编辑：张明星
责任校对：张 博
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5504-4094-4

定价：48.00元

高等院校公共基础课精品教材

高等数学

主　编　彭先萌　黄　琳
副主编　王妍婷　李　波　姜秋明　李　松　李小敏
主　审　田运科　范　光

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/彭先萌,黄琳主编.—成都:西南财经大学出版社,2019.8
(2024.7 重印)
ISBN 978-7-5504-4094-4

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①彭…②黄…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 180755 号

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　彭先萌　黄　琳

策划编辑:李　松
责任编辑:张明星
责任校对:张　博
封面设计:刘文东
责任印制:朱曼丽

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://cbs.swufe.edu.cn
电子邮件	bookcj@swufe.edu.cn
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785
印　　刷	大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	17
字　　数	392 千字
版　　次	2019 年 8 月第 1 版
印　　次	2024 年 7 月第 6 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5504-4094-4
定　　价	48.00 元

版权所有,翻印必究。

前言 PREFACE

数学是一门重要的素质教育课程，能为学生学习后续专业课程提供必不可少的帮助和支撑.

本书在编写过程中，结合工科专业教学要求，淡化数学推导证明，强化理解基本的数学思想，培养学生初步建立数学模型的能力及通过自主学习拓展数学知识的能力，实现提升学生数学素养和加强其学习数学兴趣的目的.

本书将数学基础知识、数学建模和数学实验有机融合，主要体现以下几个特点：

1. 做到“一个突破，两个衔接”，实现内容和体系的创新

本书的指导思想是“一个突破，两个衔接”.“一个突破”是指突破传统的大学数学教材理论和内容体系，根据高素质应用型专门人才培养要求，形成新的理论和内容体系.“两个衔接”是指与技能型人才培养需要相衔接和与学生的实际数学水平相衔接.

2. 做到“低起点，小步递进”，降低难度，突出应用

本书注重与实际应用联系较多的数学基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求复杂的计算和变换；注重揭示抽象概念的本质，如极限——分析事物发展变化规律的重要工具，定积分——求总量的数学模型等，强化理论与实际的联系.

3. 兼具应用性和启发性

本书采用情境教学法和案例驱动法进行编写，收录了大量与专业和实际生活紧密联系的数学应用案例，将对概念的理解落实到用数学思想来消化和吸收概念及原理. 全书通过实际生活和制造维修类专业中的问题启发学生思维，引出数学知识，充分体现数学教学服务于专业学习的特点.

4. 教学方法和学习方法相融合

本书特别强调学生学习方法的掌握，更注重学生基础概念的建立、基本方法的突破，以及应用问题的分析和求解；让学生了解强调本质、结构和强化分类是突破基本方法的核心；并充分利用数学软件 Mathematica 的数值功能和图形功能让学生从感官上更形象地理解所学知识，加深对概念的认识和理解，真正做到简单、高效地掌握一些复杂的计算方法，提高运用数学知识解决实际问题的能力.

根据目前大多数院校的课程设置情况，本书的理论教学和数学实验总学时以 80～100 学时为宜.

本书由彭先萌、黄琳任主编，王妍婷、李波、姜秋明、李松、李小敏任副主编，由田运科、范光任主审.

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正.

编 者

目录 CONTENTS

第一章 函数 …… 1

第一节 函数及其性质 …… 1

一、常量与变量 …… 1

二、函数的概念 …… 1

三、函数的表示法 …… 3

四、函数的几种特性 …… 5

五、反函数 …… 6

六、函数建模举例 …… 7

七、知识拓展 …… 8

第二节 复合函数与初等函数 …… 9

一、基本初等函数 …… 9

二、复合函数 …… 13

三、初等函数 …… 14

数学实验一 Mathematica 入门 …… 14

复习题一 …… 19

数学故事 …… 20

第二章 极限与连续 …… 22

第一节 极限的概念 …… 22

一、数列的概念与极限 …… 22

二、函数的极限 …… 24

三、函数极限的性质 …… 27

四、知识拓展 …… 28

第二节 极限的运算 …… 29

一、极限的四则运算法则 …… 30

二、复合函数的极限运算法则 …… 30

三、知识拓展 …… 32

第三节　两个重要极限 …… 34
一、重要极限Ⅰ：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 34
二、重要极限Ⅱ：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ …… 36
三、知识拓展 …… 36
第四节　无穷小量与无穷大量 …… 38
一、无穷小量 …… 38
二、无穷大量 …… 40
三、无穷小量与无穷大量的关系 …… 41
第五节　函数的连续性 …… 43
一、连续的概念 …… 44
二、函数的间断 …… 46
三、初等函数的连续性 …… 48
四、闭区间上连续函数的性质 …… 50
数学实验二　利用 Mathematica 求极限 …… 53
复习题二 …… 54
数学故事 …… 56
第三章　导数和微分 …… 58
第一节　导数的概念 …… 58
一、导数问题举例 …… 58
二、导数的定义 …… 59
三、用定义求函数的导数 …… 62
四、初等函数的求导公式 …… 63
五、导数的几何意义 …… 63
六、可导与连续的关系 …… 64
七、知识拓展 …… 65
第二节　求导法则 …… 67
一、函数的和、差、积、商的求导法则 …… 67
二、反函数的求导法则 …… 68
三、复合函数的求导法则 …… 69
四、知识拓展 …… 70
第三节　高阶导数及几种特殊求导法则 …… 71
一、高阶导数的概念及求法 …… 71
二、参数方程求导法 …… 73
三、隐函数求导法 …… 74

四、知识拓展 …… 75
第四节　微分及其应用 …… 77
一、微分的概念 …… 77
二、微分的几何意义 …… 79
三、微分的基本公式与运算法则 …… 79
四、知识拓展 …… 81
数学实验三　利用 Mathematica 计算导数微分 …… 83
复习题三 …… 84
数学故事 …… 86
第四章　导数的应用 …… 87
第一节　微分中值定理 …… 87
一、拉格朗日中值定理 …… 87
二、罗尔定理 …… 89
三、柯西中值定理 …… 89
第二节　洛必达法则及其他类型未定式 …… 90
一、洛必达法则 …… 91
二、其他类型未定式 …… 92
第三节　函数的单调性 …… 93
一、函数的单调性的判定 …… 94
二、知识拓展 …… 95
第四节　函数的极值 …… 95
一、极值的定义 …… 95
二、极值的判定 …… 96
第五节　函数的最值及其应用 …… 98
一、闭区间上连续函数的最大值、最小值 …… 98
二、知识拓展 …… 100
第六节　函数图形的凹向与拐点 …… 102
一、曲线的凹向及其判别法 …… 102
二、曲线的拐点 …… 103
数学实验四　利用 Mathematica 求极值和最值 …… 105
复习题四 …… 106
数学故事 …… 108
第五章　不定积分 …… 110
第一节　不定积分的概念与几何意义 …… 110
一、原函数 …… 111

二、不定积分的概念 …… 111
三、不定积分的几何意义 …… 112
第二节　不定积分的性质与基本积分公式 …… 114
一、不定积分的性质 …… 114
二、不定积分的基本公式 …… 115
三、知识拓展 …… 117
第三节　不定积分的换元积分法 …… 119
一、第一类换元积分法 …… 119
二、第二类换元积分法 …… 123
第四节　不定积分的分部积分法 …… 127
数学实验五　利用 Mathematica 求不定积分 …… 133
复习题五 …… 134
数学故事 …… 135
第六章 定积分 …… 136
第一节　定积分的概念及几何意义 …… 136
一、两个实例 …… 136
二、定积分的概念 …… 139
三、定积分的几何意义 …… 141
四、知识拓展 …… 143
第二节　定积分的性质及应用 …… 144
一、定积分的性质 …… 144
二、分段函数的定积分 …… 147
第三节　微积分基本公式 …… 149
一、牛顿-莱布尼茨公式 …… 149
二、知识拓展 …… 150
第四节　定积分的积分法 …… 152
一、定积分的换元积分法 …… 152
二、定积分的分部积分法 …… 153
三、知识拓展 …… 154
第五节　广义积分 …… 155
一、无穷区间上的广义积分 …… 155
二、无界函数的广义积分 …… 157
数学实验六　利用 Mathematica 计算定积分 …… 160
复习题六 …… 162
数学故事 …… 162

第七章 定积分的应用 …… 164
第一节 定积分的几何应用 …… 164
一、定积分应用的微元法 …… 165
二、用定积分求平面图形的面积 …… 166
三、用定积分求旋转体的体积 …… 169
第二节 定积分的物理应用及在专业中的应用 …… 173
一、定积分的物理应用 …… 173
二、定积分在电工电子专业中的应用 …… 176
数学实验七 利用 Mathematica 求面积和体积 …… 177
复习题七 …… 179
数学故事 …… 180
第八章 常微分方程 …… 181
第一节 微分方程的概念 …… 181
一、微分方程的基本概念 …… 181
二、知识拓展 …… 184
第二节 常微分方程的分离变量法 …… 184
一、可分离变量微分方程的概念 …… 185
二、知识拓展 …… 187
第三节 一阶线性微分方程 …… 188
一、一阶线性微分方程的概念 …… 188
二、知识拓展 …… 191
第四节 可降阶的高阶微分方程 …… 191
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 192
二、$y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 192
三、$y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 193
第五节 二阶线性微分方程解的结构 …… 194
一、二阶线性齐次微分方程解的结构 …… 195
二、二阶线性非齐次微分方程解的结构 …… 196
第六节 二阶常系数线性微分方程的解法 …… 196
一、二阶常系数线性齐次微分方程的解法 …… 197
二、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 …… 199
第七节 微分方程的应用举例 …… 201
数学实验八 利用 Mathematica 解微分方程 …… 206
复习题八 …… 207
数学故事 …… 208

第九章 多元函数微积分学 …… 209

第一节 多元函数的基本概念、极限和连续性 …… 209
一、多元函数的概念 …… 209
二、多元函数的极限和连续性 …… 212
第二节 偏导数 …… 214
一、偏导数的概念及计算 …… 214
二、高阶偏导数 …… 217
第三节 全微分 …… 219
第四节 多元复合函数与隐函数的微分法 …… 221
一、多元复合函数的微分法 …… 221
二、全微分形式不变性 …… 223
三、隐函数的微分法 …… 224
第五节 二元函数的极值问题 …… 225
一、极值的概念 …… 225
二、极值存在的条件 …… 225
三、求无条件极值的一般方法 …… 226
四、条件极值 …… 228
第六节 二重积分的概念与性质 …… 229
一、二重积分的概念 …… 229
二、二重积分的性质 …… 231
三、二重积分的几何意义 …… 231
第七节 二重积分的计算 …… 232
一、在直角坐标系中计算二重积分 …… 232
二、在极坐标系中计算二重积分 …… 237
三、二重积分应用举例 …… 240
数学实验九 利用 Mathematica 计算二元函数微积分 …… 241
复习题九 …… 243
数学故事 …… 245

附录 习题参考答案 …… 246

第一章

函　　数

函数描述了客观世界中变量与变量之间的关系，是高等数学研究的主要对象. 微积分是从研究函数开始的，本章将在中学已有函数知识的基础上进一步讲解函数的概念，并介绍反函数、复合函数及初等函数的主要性质，为微积分的学习打下基础.

函数在工科专业中有许多应用，如出租车的收费问题，判断车速是否超速问题，机械构件的转动惯量问题，发电机的功率问题，减振器的减振原理，等等.

第一节　函数及其性质

问题情境

9 月 1 日，学校新生开学报到，有些外地同学由于没有赶上学校的接送车，只能自己乘出租车到学校. 该市出租车的起步价是 6.5 元(路程在 2.5 km 以内，不含 2.5 km)，超过 2.5 km 的路程，每千米 1.6 元(不足 1 km 的按 1 km 算). 你能写出路程与车费的关系吗？如果小张同学从火车站到学校付了 9.7 元的车费，你知道从火车站到学校有多远吗？

一、常量与变量

在研究自然现象、进行科学实验、解决生产中的问题时，我们会遇到各种各样的量，如时间、重量、温度、长度、面积、体积、速度等.

在一特定运动过程中，始终保持同一数值不变的量，称之为**常量**；有的量可以取不同的数值，称之为**变量**.

二、函数的概念

1. 函数的定义

首先我们通过几个与专业相关的实例来说明变量之间的依赖关系.

实例 1 对于汽车旋转构件而言，转矩与功率成正比，与转速成反比. 汽车爬坡时，需要降低车轮的转速（降低挡位）来增大转矩，以增加爬坡的能力. 这是因为，转矩 $M=\frac{P}{\omega}$，其中，P 是功率，ω 是转速.

实例 2 分析减振器的减振原理时需要研究液压传动中的液体静压力. 容器中盛有液体，假设作用在液面上的力为 p_0，则液面下深 h 处的液体的压力 $p=p_0+\rho gh$（液体静压力方程），其中，ρ 是液体密度，g 是重力加速度.

实例 3 发动机每输出 1 kW·h 的有效功所消耗的燃油量称为有效燃油消耗率，记作 b_e，单位为 g/(kW·h). b_e 可按式 $b_e=\frac{B}{P_e}\times 10^3$ 计算，其中，B 是发动机在单位时间内的耗油量，P_e 是发动机的有效功率.

实例 4 自由落体的运动规律为 $h=\frac{gt^2}{2}$. 式中，h 为下降距离，g 为重力加速度，t 为降落的时间. 这个公式描述了物体在自由降落的过程中，其下降的距离 h 与时间 t 之间的依赖关系.

在以上几个实例中，虽然各个变量的实际意义和解析式虽然不相同，但是它们都具有以下相同的特点：所描述的变化过程中有两个变量，变量之间有一个确定的依赖关系，或称为对应法则，虽然对应法则的表达式不同，但是当其中一个变量在一定范围内取定一个数值时，按照对应法则，另一个变量有唯一确定的数值与之对应. 数学上将变量之间对应关系的实质进行了总结，就得到函数的概念.

定义 1 设 x 与 y 是某一变化过程中的两个变量，D 是一个给定的数集，如果有一个对应法则 f，使得对于每一个数值 $x\in D$，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的 x 的函数，或简称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),x\in D$$

式中，x 为**自变量**；y 为**因变量**；集合 D 为函数的**定义域**.

若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应法则 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0)$$

函数值的集合，称为函数的**值域**，记作 M.

若函数在某个区间上的每一点处都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

2. 函数的本质

法国人把函数称为 black box（黑匣子）．“函数＝黑匣子”是什么意思呢？下面我们来看两个试验. 通过对试验进行分析，可以让我们比较清楚地了解函数的本质.

试验 1 教具：一个黑色盒子，在盒子的两个侧面分别设置一个口（出口、入口）. 再制作几个圆形的卡片，在卡片的正面写 1，2 等数字，表示 1 元、2 元等各种不同的币值；在卡片的背面画上相应的物品，如可乐、汉堡等.

试验过程：将 1 元的自制卡片从黑色盒子的入口输入后，从出口滚出来的是在卡片背面所画的物品，如一瓶可乐. 再取一张 3 元的自制卡片输入黑色盒子，则从盒子出口滚出来的是另一件物品. 你想知道这是为什么吗？

在没有看到滚出来的是什么物品时，谁也不知道会有怎样的结果，但是可以确定的是：必须投入一张卡片，才会有一个物品滚出来；投入不同的卡片，会滚出来不同的物品. 由此可知，物品是随着输入卡片的变化而变化的. 这一试验揭示了出口与入口的“变”性，而且出口会因入口的“变”而“变”.

试验 2 在另一组硬币卡片的正反面分别写上 1，2；2，4；3，6 等数组. 老师演示两次后，学生很快就猜出投入正面是 3 的硬币时出来的结果一定是 6. 这一试验揭示，有些变化我们知道它是怎样发生的，因此可以控制它.

通过两个试验的对比，我们可以明白生活中存在许多因变而变的例子，就像函数中的自变量与因变量，自变量是输入的数，因变量是输出的数，因变量随自变量而变，而且输入一个自变量只能得到一个因变量，它们之间的这种关系就是函数. 因此，函数的本质就是变量间的相互依赖“关系”.

3. 函数的两个要素

函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素. 只有当两个函数的定义域和对应法则都相同时，才认为两个函数是相同的，而与自变量或因变量用什么字母表示无关. 因此，在研究函数时，除了确定对应法则以外，还要明确函数的定义域.

(1)对应法则. 例如，$f(x)=x^2-2x+3$ 就是一个特定的函数，f 确定的对应法则为

$$f(\quad)=(\quad)^2-2(\quad)+3$$

例 1 设 $f(x+1)=x^2-2x$，求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，得到

$$f(t)=(t-1)^2-2(t-1)=t^2-4t+3$$

所以

$$f(x)=x^2-4x+3$$

(2)定义域. 自变量的取值范围称为函数的定义域.

例 2 判断下列函数是否相同？为什么？

①$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$； ②$y=\sqrt{x}$与 $w=\sqrt{u}$.

解 ①$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数，因为定义域不同.

② $y=\sqrt{x}$与 $w=\sqrt{u}$是相同的函数，因为对应法则和定义域均相同.

三、函数的表示法

根据问题的不同特点，函数常用的表示法有三种：解析法、列表法、图像法. 为了研究方便，不同的表示法还可以组合使用.

1. 解析法

例如，患者服用某药物，服用剂量 D 与体温 T 所产生的变化之间的关系由下式给出：

$$T=\left(\frac{C}{2}-\frac{D}{3}\right)D^2，C \text{ 是正常数}$$

解析法的优点是便于数学上的分析和计算. 本书主要讨论用解析式表示的函数.

在高等数学中，函数的解析式还有以下两种表示方式：

(1)隐函数. 在研究变量的变化规律时，根据问题的实际特点，用方程 $F(x,y)=0$ 的形

式来描述变量之间的依赖关系可能更方便. 当 x 在某个数集 D 内取定某一数值时,相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在,则通过方程 $F(x,y)=0$,在数集 D 上可以确定一个函数,称此函数为隐函数. 以前研究的函数,因变量 y 都能用含有 x 的解析式表示,称之为显函数. 有些隐函数能方便地化成显函数,如 $y+x=5$ 可转换成 $y=5-x$. 而有的隐函数则难以化成显函数的形式. 如隐函数 $e^{xy}-\sin(x+y)-y=0$ 就无法化成显函数. 虽然有些隐函数无法化成显函数的形式,但是在有些情况下并不影响研究函数的某些变化规律.

(2)分段函数. 在自变量的不同取值范围内,对应关系用不同的解析式来表示的函数称为分段函数.

例 3 旅客乘坐火车可免费携带不超过 20 kg 的物品,超过 20 kg 而不超过 50 kg 的部分每 1 kg 交费 a 元,超过 50 kg 的部分每 1 kg 交费 b 元,求运费与携带物品质量的函数关系.

解 当物品质量不超过 20 kg 时,

$$y=0,0\leqslant x\leqslant 20$$

当物品质量超过 20 kg 而不超过 50 kg 时,

$$y=a(x-20),20<x\leqslant 50$$

当物品质量超过 50 kg 时,

$$y=a(50-20)+b(x-50),x>50$$

于是,所求函数是一个分段函数,为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20), & 20<x\leqslant 50\\ 30a+b(x-50), & x>50\end{cases}$$

分段函数在工程技术及日常生活中都会遇到. 分段函数是定义域内的一个函数,不要理解为是多个函数. 在求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入相应取值范围的表达式进行计算.

2. 列表法

例如,要获得某地一天中的气温与时间的变化关系,可以每隔一段时间测量一些数据. 表 1-1 列出了某地从上午 10:00 到中午 12:00 每隔 20 min 测得的气温数据,由此可以观察出这段时间内该地气温的变化情况.

表 1-1

时间	10:00	10:20	10:40	11:00	11:20	11:40	12:00
气温 T/℃	18	18	18.5	19	20	21	23

列表法的优点是简明、直观. 在一些科技手册中常采用这种方法来表达数据.

3. 图像法

例如,心电图(见图 1-1)可以显示患者的心率模式,它是由心电图仪直接根据患者的心率情况绘制的. 通过心电图的分析,医生可以诊断患者是否患有心脏病.

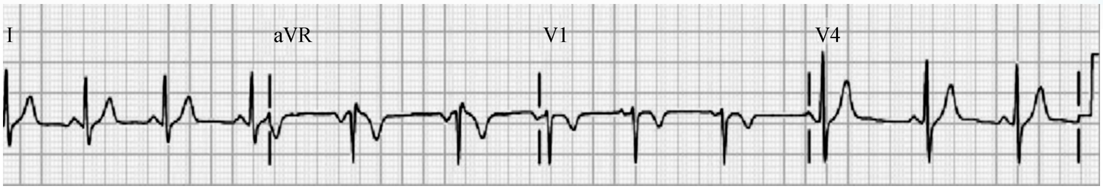


图 1-1

图像法的优点是直观、通俗、容易比较. 它的缺点是不便于做精细的理论研究.

四、函数的几种特性

在研究函数的变化规律时，经常需要考虑函数的部分性质，这些性质都与函数的几何图形有关，有时也称为函数的几何特性.

1. 有界性

若存在正数 M，使得函数 $f(x)$在区间 I 上恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上**有界**；若不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$在区间 I 上**无界**.

在定义域内有界的函数称为**有界函数**，如 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 等都是有界函数.

函数 $f(x)$在(a,b)内有界，在图形上表现为 $f(x)$在(a,b)内的一段图像必介于两条平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间，如图 1-2 所示.

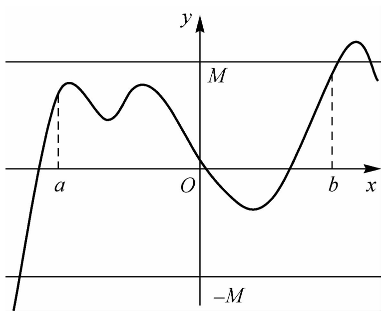


图 1-2

例 4 讨论 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$[1,2]$及区间$(0,1)$上的有界性.

证明 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，有$\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$[1,2]$上既有上界又有下界. 故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$[1,2]$上是有界函数.

当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$大于 1 且函数值会趋于无穷大. 所以在区间$(0,1)$上无界.

2. 单调性

对于函数 $f(x)$在区间 I 上的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在区间 I 上**单调递增**；

若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在区间 I 上**单调递减**.

例 5 求证函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

证明 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1^2+x_1x_2)\\&=(x_2-x_1)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]\end{aligned}$$

因为 $x_2-x_1>0$，$\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$，所以

$$f(x_2)-f(x_1)>0$$

故函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义，

若 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；

若 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

注意

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 6 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 由于 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$，故原函数是偶函数.

(2) 由于

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)\end{aligned}$$

故原函数是奇函数.

性质 1 设所考虑的函数在 $[-a,a]$ 上有定义，则有

(1) 两个偶函数之和、之积都为偶函数；

(2) 两个奇函数之和为奇函数，之积为偶函数；

(3) 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，对一切 x 均有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，并把 T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常讲的函数周期指的是函数的最小正周期.

例如，在三角函数中，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数. 常数函数 $y=C$ 以任意正数为周期，且没有最小正周期.

五、反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，如果对于数集 M 中的每个 y 值，在

数集 D 中都有使等式 $y=f(x)$ 成立的唯一的 x 值与之对应，其对应法则记为 f^{-1}，即变量 x 是 y 的函数. 这个定义在数集 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 记为

$$x=f^{-1}(y)$$

此时函数的定义域为 M，值域为 D，并且函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形在同一坐标系内是相同的.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此约定将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的自变量记号改为 x，因变量的记号改为 y，用 $y=f^{-1}(x)$ 来表示 $y=f(x)$ 的反函数. 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域仍为 M，值域仍为 D，此时由于改变了变量的记号，因此函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标系内是关于直线 $y=x$ 对称的.

由定义 2 可知，指数函数 $y=a^x\ (a>0,a\neq1)$ 与对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$ 互为反函数.

因此，反函数具有下列性质：

(1)反函数的定义域为原函数的值域，反函数的值域为原函数的定义域.

(2)原函数与反函数的单调性相同.

(3)原函数与反函数的图像在同一坐标系内是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 7　求 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)+\arcsin(2x-3)$ 的定义域.

解　该函数由三部分相加得到，先分别求出每一部分的取值范围，然后求其公共部分即可.

要使 $\sqrt{4-x^2}$ 有意义，应满足 $4-x^2\geqslant0$，即 $-2\leqslant x\leqslant2$.

要使 $\ln(x^2-1)$ 有意义，应满足 $x^2-1>0$，即 $x<-1$ 或 $x>1$.

要使 $\arcsin(2x-3)$ 有意义，应满足 $-1\leqslant2x-3\leqslant1$，即 $1\leqslant x\leqslant2$.

取上述三个范围的公共部分，于是所求函数的定义域为 $(1,2]$.

六、函数建模举例

用数学方法解决实际问题时，先要建立函数关系（函数模型），再用适当的数学工具加以解决. 建立函数模型的一般步骤为：

(1)分析问题中哪些是变量、哪些是常量，分别用不同的字母来表示，并确定哪个变量为自变量.

(2)根据问题所给的条件，运用数学知识或结合专业知识确定变量之间的等量关系.

(3)写出函数的具体解析式，并指明函数的定义域.

例 8　近几年，不少地区将“区间测速”作为判断车辆是否超速的依据之一. 所谓“区间测速”，就是通过在两个监测点上安装的监控探头和测速探头，测出一辆车通过两个监测点的时间 t，再根据两个监测点之间的距离 S，算出该车在这一区间段内的平均速度 v，如果这个平均车速超过了该路段的最高限速 $v_{\max}$，即被判为超速. 若监测点 A，B 相距 15 km，该路段的最高限速为 120 km/h，则车辆通过测速路段的最短时间 $t_{\min}$ 为多少？一辆车通过两个监测点的时间如图 1-3 所示，通过两个监测点的速度分别为 110 km/h 和 100 km/h，则该车在此路段的平均速度 $\bar{v}$ 为多少？该车会不会被判为超速？

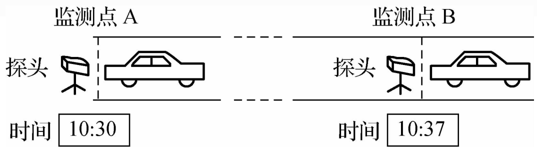


图 1-3

解 (1)由 $v=\frac{S}{t}$得 $t_{\min}=\frac{S}{v_{\max}}=\frac{15}{120}=0.125\text{ h}=7.5\text{ min}$.

(2)根据图 1-3 可知,轿车的行驶时间 $t_1=10:37-10:31=6\text{ min}=0.1\text{ h}$,轿车的平均速度 $\bar{v}=\frac{S}{t_1}=\frac{15}{0.1}=150\text{ km/h}$,所以该车超速.

七、知识拓展

问题 水稻田里的水渠截面为一等腰梯形,其底宽为 1.2 m,坡与底成 45°角,试将过水断面面积 s 表示为水深 x 的函数.

习题 1.1

一、选择题

1. 函数 $y=\frac{1}{\lg(x-1)}$的定义域是( ).

A. $(1,+\infty)$ B. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

C. $(0,2)\cup(2,+\infty)$ D. $(1,2)\cup(2,+\infty)$

2. 函数 $y=\ln(x-4)+\sqrt{x^2-16}$ 的定义域是( ).

A. $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ B. $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

C. $(4,+\infty)$ D. $[4,+\infty)$

3. 下列各对函数相同的有( ).

A. $f(x^2)=\log_a x^2$ 与 $g(x)=\log_a x$

B. $f(x)=x-1$ 与 $g(x)=\frac{(x-1)^2}{x-1}$

C. $f(x)=\ln(6-x-x^2)$与 $g(x)=\ln(3+x)+\ln(2-x)$

D. $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$与 $g(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$

4. 函数 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$ 的周期是( ).

A. 4 B. 2π

C. 4π D. π

5. $y=|\sin x|$的周期是( ).

A. $\frac{\pi}{2}$ B. π

C. 2π D. 4π

6. 函数 $y=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$是(　　).

A. 偶函数　　　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　　　D. 偶函数又是奇函数

二、填空题

1. 设 $f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}$,则 $f(\sqrt{x})=$________.

2. 函数 $y=\ln(x-1)$的反函数是________.

三、计算题

1. 下列各题中,$f(x)$与 $\varphi(x)$是否表示同一个函数,说明理由.

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$,$\varphi(x)=1$;

(2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$,$\varphi(x)=x+1$;

(3) $f(x)=x$,$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$;　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$;

(3) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;　　(4) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.

3. 写出下列函数关系式,并指出其中的常量与变量.

(1)底边长为 10 的三角形的面积 y 与高 x 之间的函数关系式.

(2)某种弹簧原长 20 cm,每挂重物 1 kg,伸长 0.2 cm,挂上重物后弹簧的长度 y(cm)与所挂重物 x(kg)之间的函数关系式.

(3)某种饮水机盛满 20 L 水,打开阀门每分钟可流出 0.2 L 水,饮水机中剩余水量 y(L)与放水时间 x(min)之间的函数关系式.

(4)挖掘机开始工作时,油箱中有油 40 L,如果每小时用油 4 L,求油箱中剩余油量 y(L)与工作时间 x(h)之间的函数关系式.

第二节　复合函数与初等函数

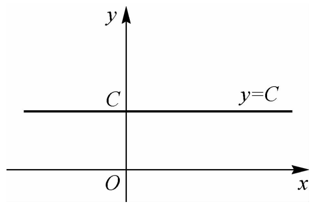
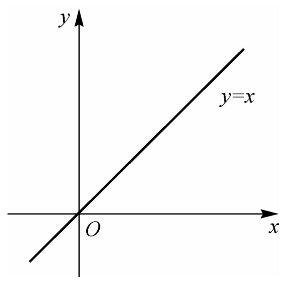
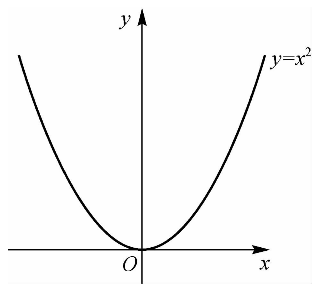
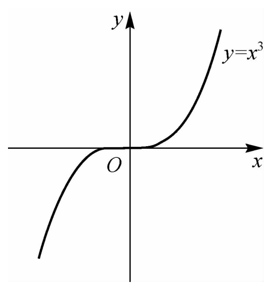
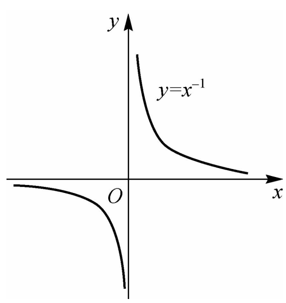
问题情境

在一 RC 电路的充电过程中,电容器两端的电压为 $U(t)$,充电时间为 t,则电压与时间的关系式为 $U(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$($E,R,C$ 均为常数).在利用微积分方法解决问题时,需要明确这个函数的类型与构成方式,才能顺利地进行计算.那么就需要对函数进行分类,对函数的构成方式进行分析.

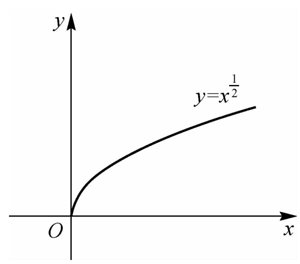
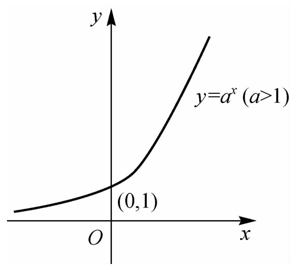
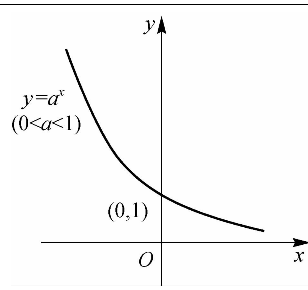
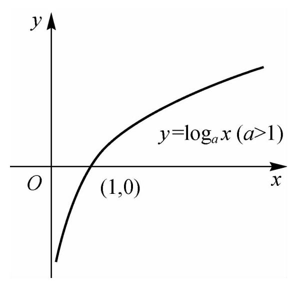
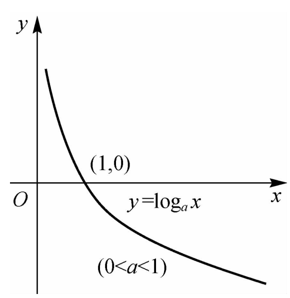
一、基本初等函数

定义 1　常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**(见表 1-2).

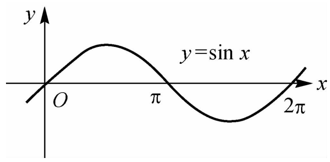
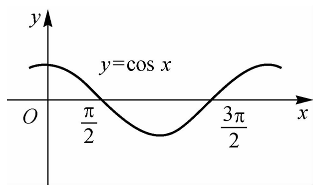
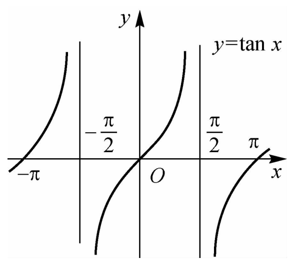
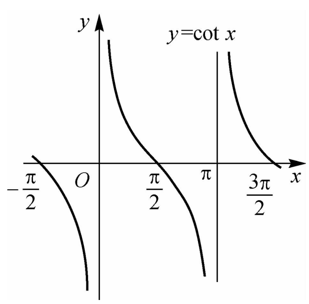
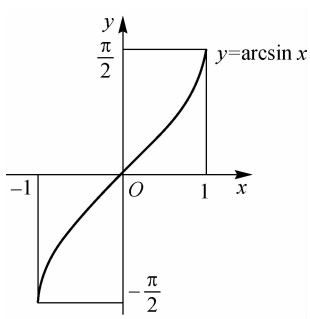
表 1-2

函　　数		定义域与值域	图　　像	性　　质
常量函数	$y=C$	C 为常数		偶函数，不增不减，有界函数
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，增函数
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数，在$(-\infty,0)$上是减函数，在$(0,+\infty)$上是增函数
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，增函数
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数，在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内是减函数

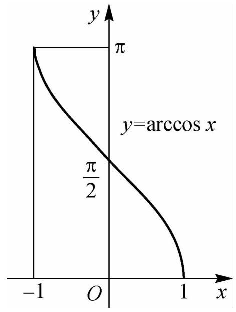
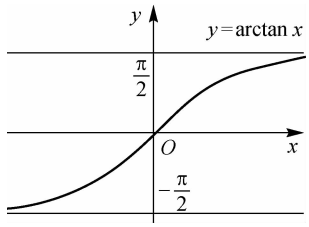
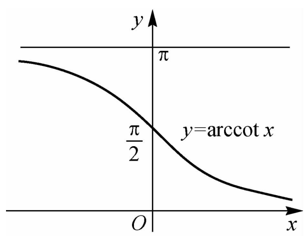
续表

<table>
<tr><th colspan="2">函 数</th><th>定义域与值域</th><th>图 像</th><th>性 质</th></tr>
<tr><td>幂函数</td><td>$y=x^{\frac{1}{2}}$</td><td>$x\in(0,+\infty)$
$y\in(0,+\infty)$</td><td>
</td><td>单调递增</td></tr>
<tr><td rowspan="2">指数函数</td><td>$y=a^x$
$(a>1)$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(0,+\infty)$</td><td>
</td><td>增函数</td></tr>
<tr><td>$y=a^x$
$(0<a<1)$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(0,+\infty)$</td><td>
</td><td>减函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">对数函数</td><td>$y=\log_a x$
$(a>1)$</td><td>$x\in(0,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>增函数</td></tr>
<tr><td>$y=\log_a x$
$(0<a<1)$</td><td>$x\in(0,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>减函数</td></tr>
</table>

续表

函数		定义域与值域	图像	性质
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界函数；在区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是增函数，在区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是减函数
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界函数；在区间 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是减函数，在区间 $[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是增函数
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，无界函数；在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是增函数
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，无界函数；在区间 $(k\pi,k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是减函数
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，有界函数，增函数

续表

函 数		定义域与值域	图 像	性 质
反三角函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界函数,减函数
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,有界函数,增函数
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界函数,减函数

二、复合函数

一个函数可以与另一个函数发生联系从而构成新的函数. 例如,函数 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 可以构成新的函数 $y=\sin x^2$,使得 y 成为 x 的函数. 这种由较简单的函数复合成较复杂的函数的情况在应用上常常出现,下面给出复合函数的定义.

定义 2 设函数 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=g(x)$. 如果对于 $u=g(x)$ 的定义域中的某些 x 值所对应的 u 值,函数 $y=f(u)$有定义,则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数,称为由 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数,记为 $y=f[g(x)]$,其中 u 称为中间变量.

注意

并不是任意两个函数都可以构成复合函数. 例如,函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数,因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,而 $u=2+x^2$ 的值域为$[2,+\infty)$.

在可能的情况下,更多的函数也可以构成复合函数,此时的中间变量为两个或更多个.

对于复合函数,应该明确其复合与分解的过程.函数的复合过程就是把中间变量依次代入的过程,而分解过程就是把复合函数分解为几个简单函数的过程,而这些简单函数往往都是基本初等函数,或者是基本初等函数与常数的四则运算的结果.

例 1 问函数 $y=\sqrt{\log_a\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ 是由哪些简单函数复合而成的?

解 $y=\sqrt{\log_a\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$, $u=\log_a v$, $v=1+\dfrac{1}{x}$ 三个简单函数复合而成的.

例 2 设 $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$,求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$, $g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

三、初等函数

由基本初等函数或常数经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成的,并且可以用一个解析式表示的函数叫作**初等函数**.否则就是**非初等函数**.

我们后面所讨论的函数大多数都是初等函数,但分段函数一般不是初等函数.例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\arcsin\dfrac{a}{x}$, $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 等都是初等函数.

习题 1.2

1. 下列函数是否能构成复合函数?如果能,请写出复合函数.

(1) $y=u^3$, $u=\sin x$; (2) $y=\ln u$, $u=x^2-2$;

(3) $y=\sqrt{-u}$, $u=x^3$; (4) $y=\sqrt{u}$, $u=\sin x-2$.

2. 说出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=\cos\sqrt{x}$; (2) $y=\arcsin 2^x$;

(3) $y=\cos^2(x^2+1)$; (4) $y=\sqrt{2-x^2}$;

(5) $y=\tan\sqrt{1+x}$; (6) $y=\lg(\sin x)$.

数学实验一 Mathematica 入门

Mathematica 是由美国 Wolfram 公司研究开发的一个数学软件.它的语法规则简单,操作语言与人们的日常语言非常相近.在功能方面,Mathematica 除了可以完成数值计算外,还有强大的符号运算功能和制图功能.Mathematica 能给出问题的解析符号解,可用来处理微积分、微分方程、线性代数和规划优化等各类问题.目前,Mathematica 软件已在工程、科研、教学等各个领域被广泛使用.

1. Mathematica 的启动和运行

运行 Mathematica 9.0,打开如图 1-4 所示的窗口,系统暂时取名“未命名-1”,直到用户保存时重新命名为止.

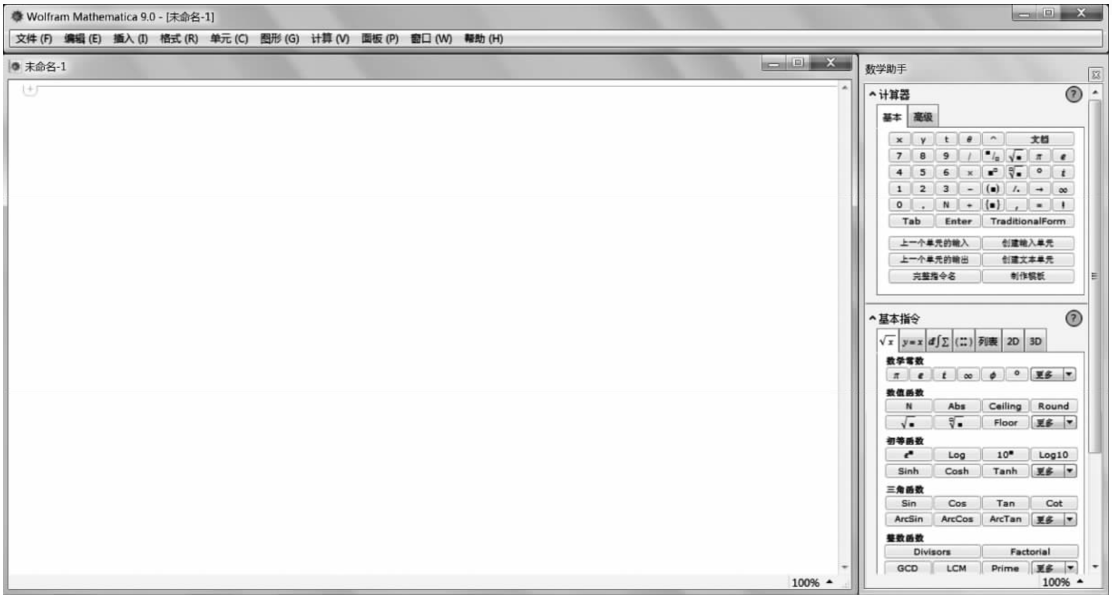


图 1-4

先在窗口中输入“2＋3”，然后按 Shift＋Enter 组合键或按右边小键盘中的 Enter 键，系统开始计算并输出计算结果，并给输入内容和输出结果附上次序标识 In[1]（In[1]是计算后才出现的）和 Out[1]. 再输入第二个表达式，要求系统在$[0,2\pi]$上画出函数$y=\sin x+\cos 3x$的图形，按 Shift＋Enter 组合键输出计算结果后，系统分别将输入的表达式和输出的图形标识为 In[2]和 Out[2]，如图 1-5 所示.

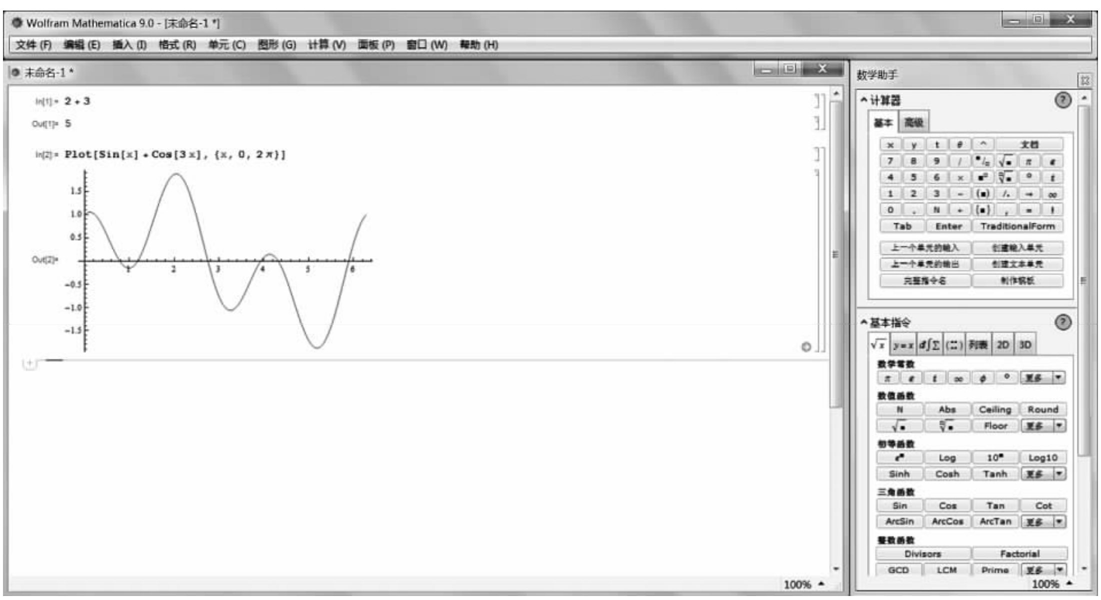


图 1-5

在 Mathematica 9.0 窗口中，可以用这种交互方式完成各种运算，如函数作图、求极限、解方程等.

注意

(1)Mathematica 严格区分大小写，一般情况下，内建函数的首字母必须大写，如果一个函数名是由几个单词构成的，则每个单词的首字母都必须大写，如求局部极小值的函数 FindMinimum[f,{x,x0}]等.

(2)在 Mathematica 中，函数名和自变量之间的分隔符是用方括号“[ ]”，而不是一般数学书上用的圆括号“( )”.

完成各种计算后，执行“文件”→“退出”命令退出程序，如果文件未存盘，系统会提示用户存盘，文件名以“.nb”作为后缀，称为笔记本文件. 以后想使用本次保存的结果时，可以执行“文件”→“打开”命令读入，也可以直接双击文件名，系统会自动调用 Mathematica 将文件打开.

2. Mathematica 的基本运算

例 1 计算 $4^2\times3-10\div(8-3)$.

解 In[1]: = $4^2\times 3-10/(8-3)$

Out[1] = 46

说明

(1)乘法可以用“ * ”和空格表示，如 2×3=2 * 3=2 3=6.

(2)乘方可以用“^”表示，如 5^2=5^2.

例 2 求 π^2 的近似值(保留 6 位有效数字).

解 In[1]: = N[π^2,6]

Out[1] = 9.86960

说明

(1)N[]在 Mathematica 中表示近似运算. N[]的语法如下：

N[表达式]可求 6 位有效数字的近似值；

N[表达式,n]可求 n 位有效数字的近似值.

(2)Mathematica 中定义了一些常见的数学常数，这些数学常数都是精确数. 如 Pi 表示 $\pi=3.141\ 59\cdots$；E 表示自然对数的底 $e=2.718\ 28\cdots$；Degree 表示 $1^\circ(\pi/180$ 弧度)；I 表示虚数单位 i；Infinity 表示无穷大∞；-Infinity 表示负无穷大-∞.

例 3 计算多项式 $3x^2-5x-2$ 与 x^2-4 的和、差、积、商.

解 In[1]: = (3 x^2 - 5 x - 2) + (x^2 - 4)

(3 x^2 - 5 x - 2) - (x^2 - 4)

```
      (3 x^2 - 5 x - 2) × (x^2 - 4)
      (3 x^2 - 5 x - 2)/(x^2 - 4)
Out[1] = - 6 - 5 x + 4 x^2
Out[2] = 2 - 5 x + 2 x^2
Out[3] = ( - 4 + x^2) ( - 2 - 5 x + 3 x^2)
```

$$\text{Out}[4] = \frac{-2-5x+3x^2}{-4+x^2}$$

说明

Mathematica 提供了一组按不同形式表示代数式的函数，其语法格式及意义见表 1-3.

表 1-3

函数的语法格式	意 义
Expand[多项式]	按升幂展开多项式
ExpandAll[多项式]	全部展开多项式
Factor[多项式]	对多项式进行因式分解
FactorTerms[多项式,{x,y,…}]	按变量 x,y,…进行分解
Simplify[多项式]	把多项式化为最简形式
FullSimplify[多项式]	化简多项式
Collect[多项式,x]	把多项式按 x 幂展开
Collect[多项式,{x,y,…}]	把多项式按 x,y,…的幂次展开
Solve[方程(组), vars]	求解关于变量(组)vars 的方程或方程组
Reduce[不等式(组), vars]	求解关于变量(组)vars 的不等式

例 4 展开多项式$(-1+x^2)(x+2x^2)$.

解 In[1]:= Expand[(- 1 + x^2) (x + 2 x^2)]

Out[1] = - x - 2 x^2 + x^3 + 2 x^4

例 5 对多项式 x^2+5x+6 进行因式分解.

解 In[1]:= Factor[x^2 + 5 x + 6]

Out[1] = (2 + x) (3 + x)

3. 用 Mathematica 定义的函数

定义函数的语法为：f[x_]=expr. 函数名为 f，自变量为 x，expr 是表达式. 在执行时会把 expr 中的 x 都换为 f 的自变量 x(不是 x_).

例 6 定义 $f(x)=x^2-5x-2$，计算 $f(10)$.

解 In[1]:= f[x_] = x^2 - 5 x - 2

Out[1] = - 2 - 5 x + x^2

In[2]:= f[x] /. x→10

```
Out[2] = 48
In[3]: = f[10]
Out[3] = 48
```

说明

f[x] /. x→x_1 表示变量替换运算，即用 x 替换 f[x]中的 x_1.

4. 用 Mathematica 作平面曲线

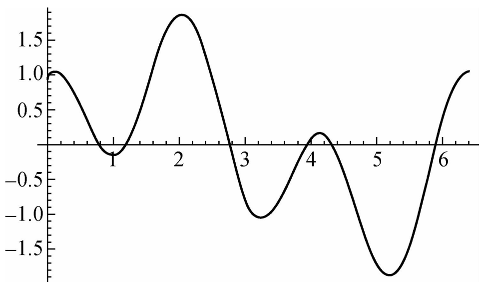
在区间内作函数 $y=f(x)$的图形的语法如下：

Plot[f(x), {x, a, b}]

例 7 做出函数 $y=\sin x+\cos 3x$ 在[0, 6.4]上的图形.

解 In[1]: = Plot[Sin[x] + Cos[3 x], {x, 0, 6.4}]

Out[1] =



5. Mathematica 系统函数

在 Mathematica 中定义了大量的可以直接调用的数学函数，这些数学函数的名称一般表达了一定的含义，可以帮助我们理解. 常用数学函数的语法格式及其意义见表 1-4.

表 1-4

数学函数的语法格式	意　　义
Clear[x,y,…]	清除变量 x,y,…的所有值
Sign[x]	根据 x 是负数、零，还是整数，返回−1,0 或 1
Abs[z]	给出实数或复数 z 的绝对值
Max[x_1,x_2,x_3,…]	给出 x_1,x_2,x_3,…中的最大值
Min[x_1,x_2,x_3,…]	给出 x_1,x_2,x_3,…中的最小值
Exp[z]	给出 z 的指数函数
Log[z]	给出 z 的自然对数(对数的底数是 e)
Log[b,z]	给出底数为 b 的对数
Sin[z],Cos[z],Tan[z],Csc[z],Sec[z],Cot[z]	计算三角函数(变量是以弧度为单位的)
Minimize[f, x]	得出函数 f 关于 x 的最小值

续表

数学函数的语法格式	意 义
Maximize[f, x]	得出函数 f 关于 x 的最大值
Mod[m,n]	给出 m 被 n 整除的余数,余数与 n 同号
Quotient[m,n]	给出 m/n 的整数部分
N!	计算 N 的阶乘

Mathematica 中的函数与数学上的函数有一些不同的地方. Mathematica 中的函数是一个具有独立功能的程序模块,可以直接被调用;同时,每一个函数既可以包括一个或多个参数,也可以不包括参数. 而且,参数的数据类型也比较复杂. 具体内容可以参看系统的帮助. 了解各种函数的功能和使用方法是学习 Mathematica 的基础.

复 习 题 一

1. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$;　　(2)$y=\arcsin(x-3)$;

(3)$y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;　　(4)$y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$.

2. 做出下列函数的图形,并指出其定义域.

(1)$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x+3, & 1<x<3 \end{cases}$;　　(2)$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 2, & x\leqslant 0 \end{cases}$.

3. 设 $f(x)=x^3-x$,计算$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

4. 设 $f(x)=x^2-x+1$,计算$\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<-1 \\ 1, & x\geqslant -1 \end{cases}$,求 $f(-4)$,$f(2)$,$f(2-x)$.

6. 设 $f(x)=x^2$,$\varphi(x)=\lg x$,求 $f[\varphi(x)]$,$f[f(x)]$,$\varphi[f(x)]$,$\varphi[\varphi(x)]$.

7. [**指数衰减模型**]设仪器由于长期磨损,使用 t 年后的价值由下列函数确定:

$$Q(t)=Q_0\,e^{-0.04t}$$

使用 20 年后仪器的价值为 8 986.58 元,试问当初此仪器的价值为多少?

8. [**Logistic 增长模型**]在一个拥有 80 000 人的城镇里,在时刻 t 患感冒的人数为

$$N(t)=\frac{10\ 000}{1+9\ 999e^{-t}}$$

其中 t 是以天为单位的. 试求开始时感冒的人数及第四天感冒的人数.

9. [**价格函数**]设某种商品的价格函数是由

$$p=5\ 000\left(1-\frac{4}{4+e^{-0.002x}}\right)$$

确定的，其中 p 是商品价格，x 是需求数量. 试求需求数量分别为 100(单位)和 500(单位)时商品的价格.

10.[**用水费用**]某城市为节约用水制定了如下收费方法：每户每月用水量不超过 4.5 t 时，水费按 0.64 元/t 计算，超过部分每吨以 5 倍的价格收费，试建立每月用水费用与用水数量之间的函数模型，并计算每月用水量分别为 3.5 t、4.5 t、5.5 t、9 t 的用水费用.

11.[**保本分析**]某公司生产糖果，每天生产 x kg 的成本(单位：元)为

$$C(x)=15x+400$$

$C(0)=400$ 元为固定成本. 试问：

(1)若糖果的售价为 16 元/kg，则每天应销售多少才能保本？

(2)若糖果的售价提高为 19 元/kg，则其保本点是多少？

(3)若每天至少能够销售 60 kg，则每千克定价多少才能保证不亏本？

12.[**国民生产总值(GNP)**]某个国家的 GNP 在 1985 年是 1 000 亿元，在 1995 年是 1 800 亿元，现假设 GNP 按指数函数增长，问这个国家在 2005 年的 GNP 是多少？

数学故事

函数概念发展的历史过程

函数概念是全部数学概念中最重要的概念之一，纵观 300 多年来函数概念的发展，众多数学家从集合、代数，直至对应、集合的角度不断赋予函数概念以新的思想，从而推动整个数学的发展. 函数概念的纵向发展如下：

1. 早期函数概念——几何观念下的函数

17 世纪，意大利数学家伽利略(G. Galileo)在《关于两门新科学的对话》一书中几乎从头到尾包含着函数或称为变量的关系这一概念，用文字和比例的语言表达函数的关系. 法国数学家笛卡尔(Descartes)虽然在他的解析几何中已经注意到了一个变量对于另一个变量的依赖关系，但由于当时尚未意识到需要提炼一般的函数概念，因此直到 17 世纪后期，牛顿、莱布尼茨建立微积分的时候，数学家还没有明确函数的一般意义，绝大部分的函数是被当作曲线来研究的.

2. 18 世纪函数概念——代数观念下的函数

1718 年，瑞士数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli)在莱布尼茨函数概念的基础上把函数定义为："由任一变量和常数的任一形式所构成的量."意思是凡变量 x 和常量构成的式子都叫作 x 的函数. 函数概念中所说的任一形式，包括代数式子和超越式子.

18 世纪中叶，瑞士数学家欧拉(L. Euler)给出了非常形象的、一直沿用至今的函数符号. 欧拉给出的定义是：一个变量的函数是由这个变量和一些数(常数)以任何方式组成的解析表达式. 他把约翰·贝努利给出的函数定义称为解析函数，并进一步把它区分为代数函数(只有自变量间的代数运算)和超越函数(三角函数、对数函数及变量的无理数幂所表示的函数)，还考虑了"随意函数"(表示任意画出曲线的函数). 不难看出，欧拉给出的函数定义比约翰·贝努利的定义更普遍、更具有广泛意义.

3. 19 世纪函数概念——对应关系下的函数

1822 年，法国数学家傅里叶(J. Fourier)发现某些函数可以用曲线来表示，也可以用一

个式子来表示，或者用多个式子来表示，从而结束了函数概念是否以唯一一个式子表示的争论，把对函数的认识推向一个新的层次. 1823 年，法国数学家柯西(A. L. Cauchy)从定义变量开始给出了函数的定义，同时指出，虽然无穷级数是规定函数的一种有效方法，但是对函数来说不一定要有解析表达式，不过他仍然认为函数关系可以用多个解析式来表示，这是一个很大的局限，突破这一局限的是德国数学家狄利克雷(Dirichlet).

1837 年，狄利克雷拓宽了函数的概念，他指出："对于在某区间上的每一个确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么 y 叫作 x 的函数."狄利克雷的函数定义出色地避免了以往函数定义中所有关于依赖关系的描述，简明精确，以完全清晰的方式被所有数学家无条件地接受. 至此，我们可以说，函数概念、函数的本质定义已经形成，这就是人们常说的经典函数定义.

美国数学家维布伦(Veblen)用"集合"和"对应"的概念给出了近代函数定义，通过集合概念把函数的对应关系、定义域及值域进一步具体化，并且打破了"变量是数"的极限，变量可以是数，也可以是其他对象(点、线、面、体、向量、矩阵等).

4. 现代函数概念——集合论下的函数

1914 年，豪斯多夫(F. Hausdorff)在《集合论纲要》中用"序偶"来定义函数. 其优点是避开了意义不明确的"变量""对应"概念，其不足之处是引入了不明确的概念"序偶". 波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowski)于 1921 年用集合概念定义"序偶"，即序偶(a,b)为集合$\{\{a\},\{b\}\}$，这样就使豪斯多夫的定义更加严谨. 1930 年，新的现代函数定义为：若对于集合 M 的任意元素 x，总有集合 N 确定的元素 y 与之对应，则称在集合 M 上定义一个函数，记为$y=f(x)$. 元素 x 称为自变元，元素 y 称为因变元.

函数概念的定义经过 300 多年的锤炼、变革，形成了函数的现代定义形式，但这并不意味着函数概念发展的历史终结. 20 世纪 40 年代，伴随着物理学研究的需要，发现了一种叫作 Dirac-δ 的函数，它只在一点处不为零，而在全直线上的积分等于 1，这在原来的函数和积分的定义下是不可思议的；但广义函数概念的引入，将函数、测度及以上所述的 Dirac-δ 函数等概念统一了起来. 因此，随着以数学为基础的其他学科的发展，函数的概念还会继续扩展.